PHYSICS BAC 3AS

الظواهر الكهربائية

ثنائيا القطب (R,C) و (R,L)

ج. سايس
أستاذ جامعي

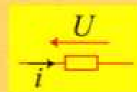
المكثفة وثنائي القطب RC

المكثفة

- **تعريفها و رمزها** : تتشكل المكثفة من سطحين معدنيين ناقلين (لبوسي المكثفة) مفصولين بعازل (هواء، ورق، خزف،...)

- الرمز النظامي للمكثفة هو:

- **اصطلاح الآخذة والمولد**: من أجل دراسة السلوك الكهربائي لثنائي قطب، يجب توجيه الدارة المتسلسلة أو الفرع الذي يحتوي عليه.



اصطلاح الآخذة

◄ عادة يختار اتجاه التوجيه كيفيا ويستعمل في ذلك أسهم للشدات.

اصطلاح المولد

◄ تكون الشدة موجبة إذا كان اتجاه التيار الكهربائي هو نفسه اتجاه التوجيه المختار وتكون الشدة سالبة في الحالة العكسية.

- **العلاقة بين التوتر الكهربائي لمكثفة والشحنة «q» لأحد لبوسيها** :

اصطلاح المكثفة

نمثل مكثفة ونختار الاصطلاحات التالية:

◆ السهم الممثل للتوتر الكهربائي موجه نحو اللبوس الذي يحمل الشحنة «q».

◆ السهمان الممثلان للتوتر والشدة متعاكسان في الاتجاه.

على ضوء هذين الاصطلاحين، فإن العلاقة التي تربط بين التوتر الكهربائي U والشحنة q هي على النحو التالي :

$$q=C.U$$

حيث : q هي الشحنة الكهربائية مقدرة بالكولوم (C).

C هي سعة المكثفة مقدرة بالفاراد (F).

U التوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة مقدر بالفولط (V).

وللتعبير عن السعة نستعمل غالبا أجزاء الفاراد :

- الميكروفاراد : $1\ \mu F = 10^{-6} F$
- النانوفاراد : $1\ nF = 10^{-9} F$
- البيكوفاراد: $1\ pF = 10^{-12} F$

نماذج مختلفة من المكثفات

- **العلاقة بين الشحنة الكهربائية والشدة** : الشدة هي تدفق الشحنات الكهربائية التي تحملها الإلكترونات (في المعادن) أو الشوارد (في المحاليل). تذكر دائما أن اتجاه انتقال الالكترونات هو معاكس للاتجاه الاصطلاحي للتيار الكهربائي.

العلاقة التي تعطي شدة التيار هي على النحو التالي: $i=\frac{dq}{dt}$

حيث: i هي شدة التيار الكهربائي الذي يصل إلى اللبوس ذي الشحنة q.

q :هي شحنة أحد لبوسي المكثفة.

تمثل الكتابة $\frac{dq}{dt}$ مشتق الشحنة q بالنسبة للزمن.

فإذا كان التيار الكهربائي يسري فعليا في الإتجاه الذي يشير إليه السهم الممثل للشدة، فإن i، وبالتالي $\frac{dq}{dt}$ موجب وهذا يعني أن الشحنة «q» تزداد.

- **الطاقة المخزنة في المكثفة** :

تعطى الطاقة المخزنة في المكثفة بالعلاقة : $E=\frac{1}{2}CU^2$

وبتعويض U بـ $\frac{q}{C}$ ، ينتج : $E=\frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{C}$

إن تخزين وتفريغ الطاقة لا يمكن أن يتمّا لحظيا ولأجل ذلك فإن شحن وتفريغ المكثفة لا يمكن أن يحدثا لحظيا.

وبالتالي فإن التوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة والشحنة الكهربائية لكل لبوس لهذه المكثفة هما دوما مستمران.

- **التحليل البعدي**: يمكن تعيين وحدة ثابت الزمن $\tau = \dfrac{L}{r+r'}$ باستعمال التحليل البعدي.

لدينا: $U = L.\dfrac{di}{dt} + r.i$ إذن: $[U] = \dfrac{[L].[i]}{[t]}$

و $[U] = [r][i]$ ومنه نستنتج: $\dfrac{[L].[i]}{[t]} = [r].[i]$

أي أن: $\boxed{\dfrac{[L]}{[r]} = [t]}$

النسبة $\tau = \dfrac{L}{r+r'}$ هي إذن متجانسة مع الزمن، تسمى ثابت الزمن لثنائي القطب RL وتقدر بالثانية (s).

تعيين ثابت الزمن τ

◄ **الحساب المباشر**: بمعرفة قيمتي r و r' المقدرتين بالأوم (Ω) والذاتية L المقدرة بالهنري (H) يمكن حساب النسبة $\dfrac{L}{r+r'}$ التي تمثل ثابت الزمن τ لثنائي القطب RL والمقدر بالثانية (s).

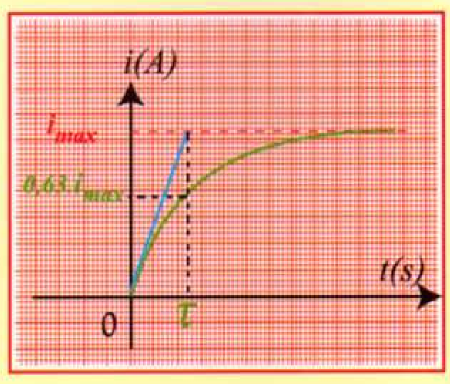
◄ **استعمال التمثيل البياني للاستجابة بالشدة إلى درجة التوتر لثنائي القطب RL :**

$$i(t) = \frac{E}{r+r'}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = i_{max}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

* إذا كان : $t = \tau$، إذن : $i = i_{max}.(1 - e^{-1}) = 0,63.i_{max}$

توافق قيمة τ إلى فاصلة النقطة من المنحنى البياني $i(t)$ ذات الترتيبة $0,63.i_{max}$.

* المماس للمنحنى البياني $i(t)$ في اللحظة $t = 0$ يقطع الخط المقارب $i = i_{max}$ في النقطة ذات الفاصلة τ.

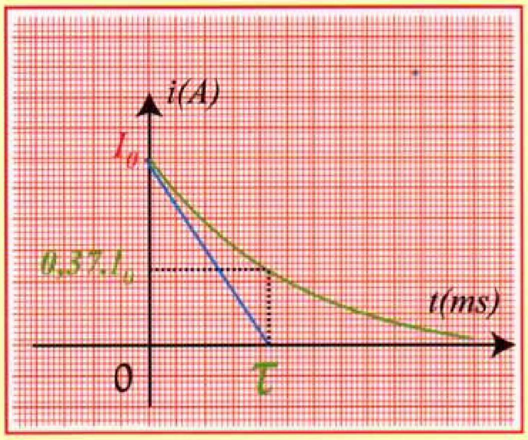


◄ **استعمال التمثيل البياني للاستجابة بالشدة أثناء انقطاع التيار في ثنائي القطب RL :**

لدينا عبارة الشدة : $i(t) = I_0.e^{-\frac{t}{\tau}}$

* إذا كان : $t = \tau$، إذن : $i = I_0.e^{-1} = 0,63.I_0$

* المماس للمنحنى البياني $i(t)$ في اللحظة $t = 0$ يقطع الخط المقارب $i = 0$ في النقطة ذات الفاصلة τ.



تأثير مميزات ثنائي القطب RL على مدة النظام الانتقالي :

تزداد مدة النظام الإنتقالي والمقدرة عموما بـ 5τ عندما تزداد الذاتية L وعندما تنقص المقاومة الكلية $R_{totale} = r + r'$.

تتم نشأة وانقطاع التيار بسرعة أكبر عندما:
- يكون ثابت الزمن τ صغيرا.
- تكون الذاتية L صغيرة.
- تكون المقاومة الكلية $(r + r')$ كبيرة.

ضبط مطابقته للبرنامج المقرر :
أوراغ مولود مفتش التربية الوطنية

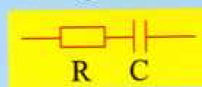
2010-060

كليك للنشر
ClicEditions

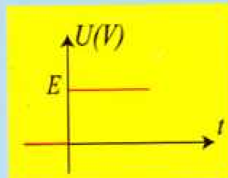
حي الكثبان، عمارة أ، مدخل 10 محل 23، المحمدية، الجزائر.
الهاتف: 15 00 82 021 / 37 96 82 021، الناسوخ: 37 96 82 021.
البريد الإلكتروني: clicedition@gmail.com
www.cliceditions.com

تعاريف

- نسمي **ثنائي قطب** RC عملية جمع مقاومة R على التسلسل مع مكثفة سعتها C.



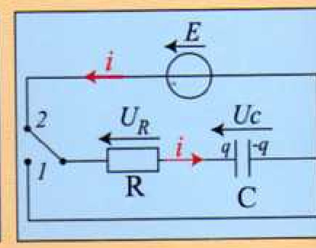
- **درجة التوتر (échelon de tension)**:

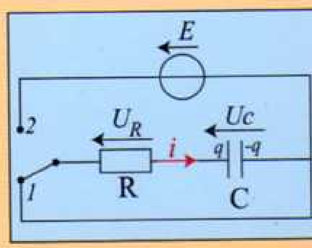


هي إشارة كهربائية من الشكل المقابل:
حيث يكون التوتر متقطعا يقفز فجأة من القيمة $0V$ إلى القيمة الثابتة E.

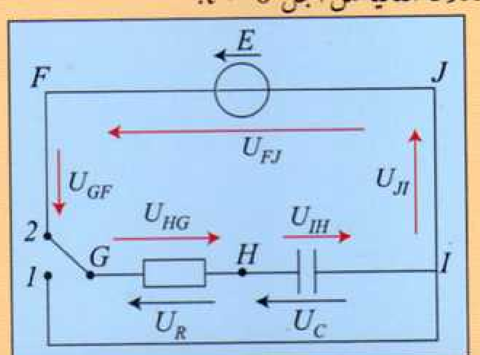
- **الإستجابة بالتوتر** لثنائي القطب RC هي التوتر $U(t)$ للمكثفة.
- **الإستجابة بالشدة** لثنائي القطب RC هي شدة التيار $i(t)$ الذي يجتازه.

- **وصف التركيب المستعمل في دراسة ثنائي القطب RC**: عندما تنتقل القاطعة من الوضع (1) إلى الوضع (2)، ينتقل فجأة التوتر الكهربائي بين طرفي ثنائي القطب RC من القيمة 0 إلى القيمة الثابتة E وبذلك يخضع ثنائي القطب إلى درجة توتر.





- **دراسة تطور التوتر U_C بين طرفي المكثفة**: في اللحظة $t = 0$، ننقل القاطعة من الوضع (1) إلى الوضع (2). يسمح قانون جمع التوترات بكتابة العلاقة التالية من أجل $t > 0$:



$$U_{FJ}+U_{GF}+U_{HG}+U_{IH}+U_{JI}=0$$

حيث: • $U_{HG}=-U_R$ • $U_{FJ}=E$ • $U_{IH}=-U_C$

• $U_{JI}=0$ • $U_{GF}=0$

وبذلك يكون لدينا:

$$E - U_R - U_C = 0 \Rightarrow E = U_R+U_C \ \dots (1)$$

لكن: $U_R = R\,i$ و $i=\dfrac{dq}{dt}$، إذن: $U_R=R.\dfrac{dq}{dt}$

وكذلك: $q = C.U_c$

إذن: $\dfrac{dq}{dt}=\dfrac{d(C.U_c)}{dt}=C.\dfrac{dU_c}{dt}$

وعليه، فإن: $U_R=RC.\dfrac{dU_c}{dt}$

وبذلك تصبح المعادلة (1):

$$E=RC.\frac{dU_c}{dt}+U_C \quad \dots(2)$$

• أو:

$$\frac{dU_c}{dt}+\frac{U_c}{RC}=\frac{E}{RC} \quad \dots(3)$$

المعادلتان (2) و (3) هما معادلتان تفاضليتان تظهر فيهما الدالة $U_C(t)$ مع مشتقتها $\dfrac{dU_c}{dt}$.

نقبل أن حل المعادلة التفاضلية: $\dfrac{dU_c}{dt}+\dfrac{U_c}{RC}=\dfrac{E}{RC}$ هو من الشكل: $U_C(t) = Ae^{\alpha t} + B$.

ومن أجل تعيين قيم الثوابت α، B، A يلزمنا إيجاد معادلتين.

◄ نحصل على المعادلة الأولى بتعويض U_c بـ $Ae^{\alpha t}+B$ في المعادلة التفاضلية: $\dfrac{dU_c}{dt}+\dfrac{U_c}{RC}=\dfrac{E}{RC}$

إذن:

$$\alpha\, Ae^{\alpha t}+\frac{Ae^{\alpha t}+B}{RC}=\frac{E}{RC}$$

$$\Rightarrow A.e^{\alpha t}\left(\alpha+\frac{1}{RC}\right)+\frac{B}{RC}=\frac{E}{RC} \ \dots (4)$$

الحد $\dfrac{E}{RC}$ هو مقدار ثابت. فحتى تتحقق المعادلة (4) من أجل كل لحظة t، يجب أن يكون الحد: $Ae^{\alpha t}\left(\alpha+\dfrac{1}{RC}\right)+\dfrac{B}{RC}$ هو أيضا ثابت لا يتعلق بالزمن t. إن ذلك لا يكون ممكنا إلا إذا كان: $\alpha+\dfrac{1}{RC}=0 \Rightarrow \alpha=-\dfrac{1}{RC}$

فتصبح بذلك المعادلة (4) إذن: $\dfrac{B}{RC}=\dfrac{E}{RC}$ أي: $B = E$

◄ ونحصل على المعادلة الثانية إنطلاقا من الشروط الإبتدائية:

$$U(0) = Ae^{\alpha.0} + B = A+B$$

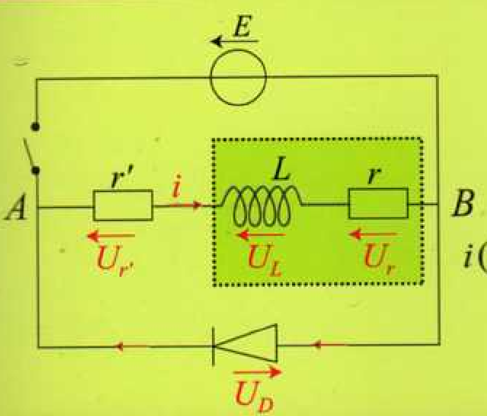
في اللحظة $t = 0$، تكون المكثفة فارغة أي $q = 0$، وبالتالي فإن التوتر بين طرفيها معدوم، لأن: $U_c=\dfrac{q}{C}$

ومنه: $U(0) = 0$

$$U(t) = e^{-(\frac{r+r'}{L})t}\left(\frac{E(r+r') - rE}{r+r'}\right) + r\frac{E}{r+r'} = \frac{r'}{r+r'}Ee^{-(\frac{r+r'}{L})t} + r\frac{E}{r+r'}$$

ومنه: $U(t) = \frac{E}{r+r'}\left(r'e^{-(\frac{r+r'}{L})t} + r\right)$ أو : $U(t) = \frac{E}{r+r'}\left(r'e^{-\frac{t}{\tau}} + r\right)$ ،حيث: $\tau = \frac{L}{r+r'}$

انقطاع التيار الكهربائي في الوشيعة



• شدة التيار الكهربائي في الوشيعة : نغلق القاطعة في الدارة المقابلة لمدة زمنية أكبر من 5τ حتى يستقر النظام الدائم. تبلغ الشدة i قيمتها العظمى: $\frac{E}{r+r'}$

نفتح بعد ذلك القاطعة، في اللحظة $t = 0$، ينتقل التوتر بين الطرفين A و B لثنائي القطب RL لحظيا من القيمة E إلى $0V$، في حين تبقى الشدة : $i(0) = \frac{E}{r+r'}$

يسمح تطبيق قانون جمع التوترات في الدارة بكتابة العلاقة التالية:

$$U_{r'} + U_L + U_r + U_D = 0$$

أي أن : $r'i + L\frac{di}{dt} + r.i + U_D = 0$

وللتبسيط نأخذ : $U_D = 0$ إذن : $\frac{di}{dt} + \frac{r+r'}{L}.i = 0$

إن حل هذه المعادلة التفاضلية هو من الشكل:

$$i(t) = Ae^{\alpha t} + B$$

وبعد المعالجة الحسابية، نجد : $\alpha = -\frac{r+r'}{L}$ و $B = 0$

وحيث أن : $i(0) = A$ ، وأيضا: $i(0) = \frac{E}{r+r'}$

إذن: $A = \frac{E}{r+r'}$

وبذلك تكون عبارة الشدة للتيار الكهربائي الذي يجتاز الدارة هي: $i(t) = \frac{E}{r+r'}.e^{-(\frac{r+r'}{L})t}$

أو: $i(t) = \frac{E}{r+r'}.e^{-\frac{t}{\tau}}$ ،حيث: $\tau = \frac{L}{r+r'}$

التوتر بين طرفي الوشيعة

لدينا: $U = L.\frac{di}{dt} + ri$ و $i(t) = \frac{E}{r+r'}e^{-(\frac{r+r'}{L})t}$

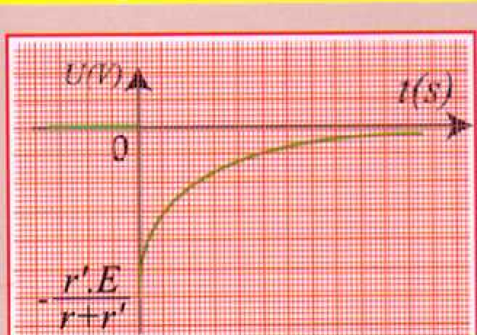
بعد الإشتقاق، نجد:

$$U(t) = L.\frac{E}{r+r'}e^{-\frac{r+r'}{L}\cdot t}\times\left(-\frac{r+r'}{L}\right) + r.\frac{E}{r+r'}e^{-\frac{r+r'}{L}\cdot t}$$

$$U(t) = -E.e^{-(\frac{r+r'}{L})t} + r.\frac{E}{r+r'}e^{-(\frac{r+r'}{L})t}$$

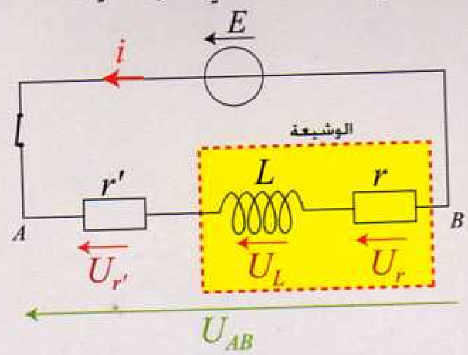
ومنه : $U(t) = E.e^{-(\frac{r+r'}{L})t}\left(-1 + \frac{r}{r+r'}\right)$

$U(t) = -\frac{r'}{r+r'}Ee^{-(\frac{r+r'}{L})t}$ أو $U(t) = -\frac{r'}{r+r'}E\,e^{-\frac{t}{\tau}}$



نشأة التيار الكهربائي وحل المعادلة التفاضلية :

نغلق القاطعة في اللحظة $t = 0$ في الدارة المتالية :



ينتقل التوتر بين الطرفين A و B لثنائي القطب RL فجأة ولحظيا من القيمة $0V$ إلى القيمة E، لكنّ الشدة تبقى معدومة : $i(0)=0$.

بتطبيق قانون جمع التوترات نكتب : $U_{AB} = U_r+U_L+U_{r'}$.

وحيث أن: $U_{AB} = E$ إذن: $E = r'.\, i + L.\dfrac{di}{dt} + r.i$

أي أن: $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{r+r'}{L}.i = \dfrac{E}{L}$

يعطى حل المعادلة التفاضلية السابقة بالشكل التالي:

$$i(t) = A.e^{\alpha t} + B$$

ولتعيين قيم الثوابت B ، A و α، نبحث عن كتابة معادلتين.

◄ نحصل على المعادلة الأولى بتعويض i بـ $A.e^{\alpha t} + B$

في المعادلة التفاضلية : $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{r+r'}{L}.i = \dfrac{E}{L}$

بالاشتقاق: $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{d}{dt}(Ae^{\alpha t} + B) = \alpha.Ae^{\alpha t}$

ومنه : $\alpha\, Ae^{\alpha t} + \dfrac{r+r'}{L}(Ae^{\alpha t} + B) = \dfrac{E}{L}$

إذن: $Ae^{\alpha t}(\alpha + \dfrac{r+r'}{L}) + \dfrac{r+r'}{L}.B = \dfrac{E}{L}$ ... (1)

فحتى تتحقق المعادلة (1) مهما كانت قيمة t،

يجب أن يكون: $\alpha + \dfrac{r+r'}{L} = 0 \Rightarrow \alpha = -\dfrac{r+r'}{L}$

فتصبح بذلك المعادلة (1) على النحو التالي:

$$\frac{r+r'}{L}B = \frac{E}{L} \Rightarrow B = \frac{E}{r+r'}$$

◄ ويمكن الحصول على المعادلة الثانية إنطلاقا من الشروط الابتدائية: $i(0) = A.e^{\alpha.0} + B = A + B$ و $i(0) = 0$

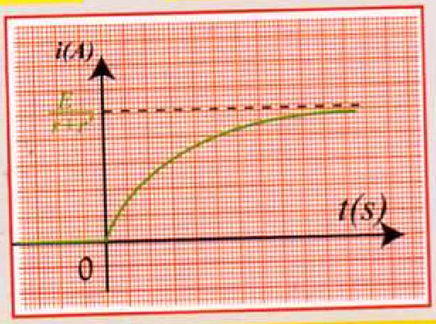
ومنه: $A + B = 0 \Rightarrow A = -B = -\dfrac{E}{r+r'}$

وبذلك تكون عبارة الشدة $i(t)$ للتيار الذي يجتاز الدارة هي:

$$i(t) = -\frac{E}{r+r'}e^{-(\frac{r+r'}{L})t} + \frac{E}{r+r'}$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{E}{r+r'}\cdot(1 - e^{-(\frac{r+r'}{L})t})$$

أو: $i(t) = \dfrac{E}{r+r'}.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ ،حيث: $\tau = \dfrac{L}{r+r'}$



ملاحظة هامة:

إذا كان $t = 5\tau$ ، فإن : $e^{-(\frac{r+r'}{L})t} = e^{-5} = 0,007$

وعليه $i(t) = \dfrac{E}{r+r'}\left(1 - e^{-5}\right) = 0.993\dfrac{E}{r+r'} \approx \dfrac{E}{r+r'}$

إذن يمكننا اعتبار أن النظام الدائم يتم بلوغه إذا كان $t \geq 5\tau$. الشدة i هي إذن ثابتة لا تتعلق سوى بـ E ، r و r' وعليه فإن الذاتية L للوشيعة لا يكون لها أي تأثير.

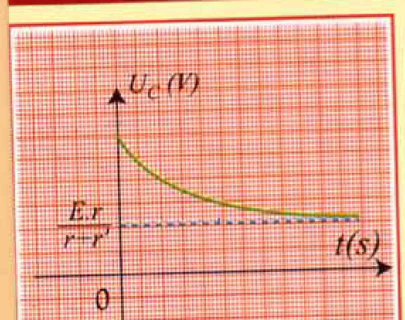
التوتر بين طرفي الوشيعة

لدينا : $U = L.\dfrac{di}{dt} + r.i$ و $i(t) = \dfrac{E}{r+r'}(1 - e^{-(\frac{r+r'}{L})t})$ وبعد الاشتقاق ،

نجد:

$$U(t) = L\frac{E}{r+r'}(-e^{-(\frac{r+r'}{L})t} \times -\frac{r+r'}{L}) + r\frac{E}{r+r'}(1 - e^{-(\frac{r+r'}{L})t})$$

$$U(t) = E\,e^{-(\frac{r+r'}{L})t} + r\frac{E}{r+r'}(1 - e^{-(\frac{r+r'}{L})t}) = e^{-(\frac{r+r'}{L})t}(E - r\frac{E}{r+r'}) + r\frac{E}{r+r'}$$

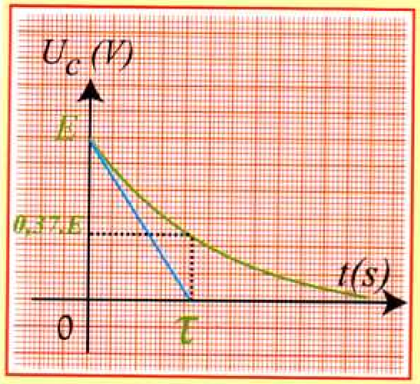


- **باستعمال التمثيل البياني $U_C(t)$ أثناء تفريغ المكثفة:**

التوتر بين طرفي المكثفة أثناء تفريغها هو: $U_c(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$

إذا كان : $t = \tau$، إذن : $U_C = E.e^{-1} = 0,37.E$

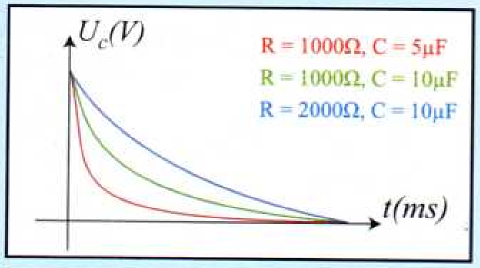
إذن لتعيين قيمة τ يكفي تعيين بيانيا فاصلة النقطة من المنحنى البياني $U_C(t)$ ذات الترتيبة $0,37.E$.

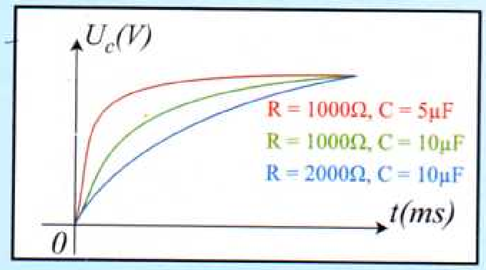


- عند رسم المماس للمنحنى البياني $U_C(t)$ عند النقطة $(0;E)$، فإنه يقطع الخط المقارب $U_C = 0$ في النقطة ذات الفاصلة τ.

تأثير مميزات ثنائي القطب RC على شحن وتفريغ المكثفة :

يمكن التأكد عن طريق الدراسة التجريبية أن ازدياد المقاومة R و/ أو سعة المكثفة له تأثير يتمثل مفعوله في تبطئة شحن وتفريغ المكثفة.





الوشيعة و ثنائي القطب RL

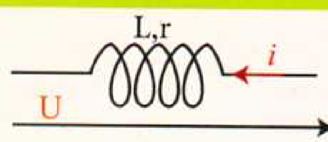
تعريف الوشيعة و رمزها : الوشيعة هي ثنائي قطب يتشكل من سلك كهربائي ملفوف أسطوانيا.

الرمز النظامي لوشيعة ذاتيتها L ومقاومتها r هو:

العلاقة بين توتر الوشيعة وشدة التيار الكهربائي الذي يجتازها :

تعطى العلاقة بالعبارة التالية: $U = L.\frac{di}{dt}$

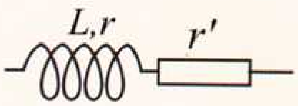
ملاحظة: تكون هذه العلاقة صالحة فقط إذا اعتمدنا مصطلح الآخذة حيث يكون السهمان الممثلان للتوتر والشدة متعاكسين.



دراسة الاستجابة بالتيار لثنائي قطب RL خاضع لدرجة توتر :

تعاريف :

يوافق ثنائي القطب RL الى وشيعة ذاتيتها L ومقاومتها الداخلية r موصولة على التسلسل مع مقاومة r'.

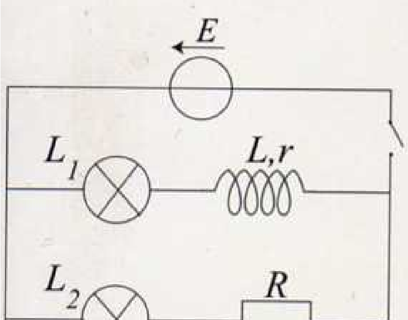


- الإستجابة بالشدة لثنائي القطب RL توافق إلى الشدة $i(t)$ للتيار الكهربائي الذي يجتازه.
- الإستجابة بالتوتر لثنائي القطب RL هو التوتر $U(t)$ للوشيعة.

الدراسة التجريبية لسلوك وشيعة عند نشأة وانقطاع التيار الكهربائي :

نحقق التركيب التجريبي المبين في الشكل، حيث المصباحان L_1 و L_2 متماثلان و $R = r$

* ماذا يحدث عندما تغلق القاطعة ؟ يتوهج المصباح L_2 لحظيا في حين أن المصباح L_1 المربوط على التسلسل مع الوشيعة يتأخر في التوهج.
* مذا يحدث عندما نفتح القاطعة ؟ يستمر المصباحان L_1 و L_2 في التوهج لمدة قصيرة من الزمن.



ملاحظة: يجتاز الوشيعة نفس التيار الكهربائي الذي يجتاز كل من المصباحين.
يظهر أن الوشيعة تؤخر نشأة وانقطاع التيار الكهربائي أثناء غلق وفتح القاطعة.

وحتى تتحقق المعادلة السابقة مهما كانت قيمة t يجب أن يكون:

$$\alpha + \frac{1}{RC} = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{RC}$$

وبذلك تصبح المعادلة *(3)* على النحو التالي:

$$\frac{B}{RC} = 0 \Rightarrow B = 0$$

◄ نحصل على المعادلة الثانية إنطلاقا من الشروط الإبتدائية:

مباشرة قبل اللحظة $t = 0$ ، لدينا : $U_C = E$

بما أن التوتر بين طرفي المكثفة لا يمكن أن يكون متقطعًا، يكون لدينا في اللحظة $t = 0$: $U_C = E$

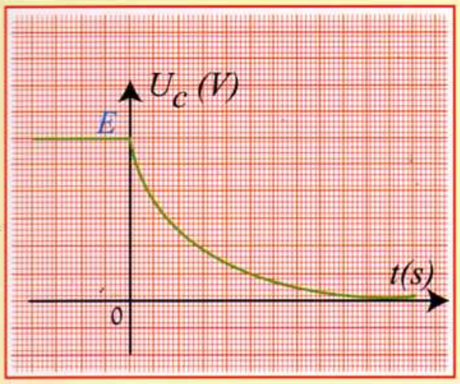
إذن : $U_C(0) = A.e^0 = A$ و $U_C(0) = E$

وعليه : $A = E$

ويكون لدينا في النهاية : $U_C(t) = A.e^{\alpha t} + B$

حيث : $A = E$ ، $\alpha = -\frac{1}{RC}$ و $B = 0$

إذن : $U_c(t) = E.e^{-\frac{t}{RC}}$ أو : $U_c(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$ ، حيث : $\tau = RC$

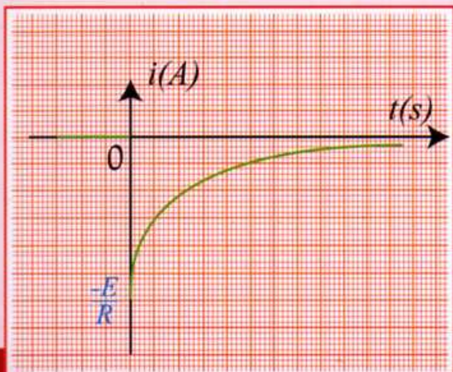


شدة التيار الكهربائي الذي يجتاز ثنائي القطب RC

لدينا: $i(t) = \frac{dq}{dt}$ و $q(t) = C.U_C(t) = CE.e^{-\frac{t}{RC}}$

$$i(t) = CE.e^{-\frac{t}{RC}} \times -\frac{1}{RC} = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

أو: $i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$



ثابت الزمن لثنائي القطب RC

- **التحليل البعدي** : من أجل تعيين وحدة $\tau = RC$ نستعمل طريقة التحليل البعدي.

من العلاقتين: $R = \frac{U}{I}$ و $C = \frac{q}{U}$

نستنتج أن : $[RC] = \frac{[U]}{[I]} \cdot \frac{[q]}{[U]} = \frac{[q]}{[I]}$

وحيث أن : $i = \frac{dq}{dt}$ ، إذن : $[I] = \frac{[q]}{[t]}$

ومنه : $\frac{[q]}{[I]} = [t]$

وبذلك نحصل على : $[RC] = [t]$

وبالتالي فإن الجداء RC متجانس مع الزمن، فيقدر إذن بالثانية *(s)*. يسمى τ ثابت الزمن لثنائي القطب RC.

طرق تعيين ثابت الزمن τ

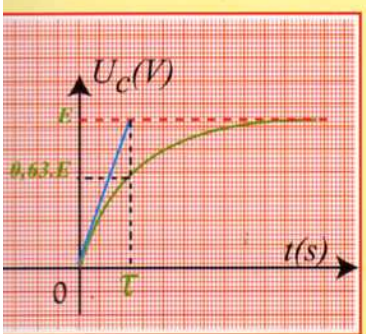
* **الحساب المباشر** : بمعرفة قيمة المقاومة $R(\Omega)$ وسعة المكثفة $C(F)$ يمكـ حساب الجداء RC الذي يمثل قيمة ثابت الزمن $\tau(s)$.

* **بإستعمال التمثيل البياني $U_C(t)$ لإستجابة ثنائي القطب RC إلى درجة تو**

ليكن $U_C(t)$ هو التوتر بين طرفي المكثفة أثناء شحنها:

$$U_c(t) = E.(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

إذا كان : $t = \tau = RC$، إذن : $U_C = E.(1 - e^{-1}) = 0,63.E$



إذن لتعيين قيمة τ يكفي تعيين بيانيا فاصلة النقطة من المنحنى البياني $U_C(t)$ ذات الترتيبة $0,63.E$.

عند رسم المماس للمنحنى البياني عند المبدأ، فإنه يقطع الخط المقارب $U_C = E$ عند النقطة ذات الفاصلة τ .

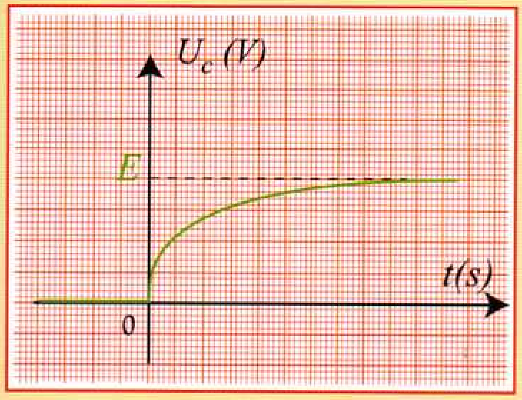
إذن: $A+B=0 \Rightarrow A=-B=-E$ ويكون لدينا في النهاية :

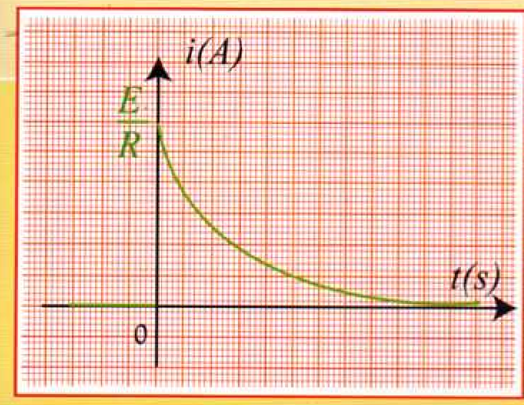
$U_C(t)=A.e^{\alpha.t}+B$ حيث: $A=-E$ ، $\alpha=-\frac{1}{RC}$ و $B=E$.

وبذلك تكون عبارة التوتر $U_C(t)$ بين طرفي المكثفة على النحو التالي:

$$U_c(t)=-E.e^{-\frac{t}{RC}}+E \Rightarrow U_c(t)=E(1-e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$U_c(t)=E(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$$ ، حيث : $\tau=RC$





دراسة تطور شدة التيار i الذي يجتاز ثنائي القطب RC:

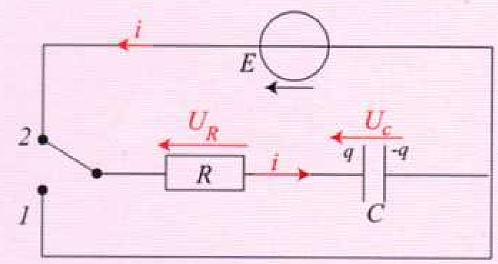
لدينا: $i(t)=\frac{dq}{dt}$ و $q(t)=C.U_c(t)=CE(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$

بالإشتقاق نجد : $i(t)=CE.(-e^{-\frac{t}{RC}}\times-\frac{1}{RC})$

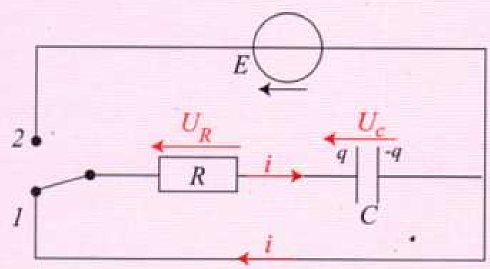
$i(t)=\frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{RC}}$ أو: $i(t)=\frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}}$ ، حيث: $\tau=RC$

تفريغ مكثفة سعتها C في مقاومة R

- **التوتر بين طرفي المكثفة :** نشحن مكثفة حتى يبلغ التوتر بين طرفيها U_C القيمة التي ينتجها المولد E. وفي اللحظة $t=0$ ننقل القاطعة من الوضع (2) إلى الوضع (1) حتى يتم تفريغ المكثفة.



الشكل (1)



الشكل (2)

ملاحظة: عندما $U_C=E$، لدينا أيضا: $U_R=0$ إذن : $i=0$
لا يجتاز المكثفة أي تيار وبالتالي فإن عملية شحنها تكون قد انتهت.

من أجل تعيين عبارة توتر المكثفة $U_C(t)$ أثناء التفريغ، نطبق قانون جمع التوترات على الدارة الموافقة للشكل(2) والذي يسمح بالحصول على العلاقة : $U_R+U_c=0$

لكن: $U_R=Ri=R\cdot\frac{dq}{dt}=RC\cdot\frac{dU_C}{dt}$

وبذلك نحصل على المعادلة : $RC\cdot\frac{dU_C}{dt}+U_C=0 \ ...\ (1)$

أو: $\frac{dU_C}{dt}+\frac{U_C}{RC}=0 \ ...\ (2)$

تقبل المعادلتان التفاضليتان (1) أو (2) حلا من الشكل:

$$U_C(t)=Ae^{\alpha t}+B$$

ومن أجل تعيين قيم الثوابت A، B و α ، فإن ذلك يستوجب إيجاد معادلتين.

◄ نحصل على المعادلة الأولى بتعويض $U_C(t)$ بـ $Ae^{\alpha t}+B$ في المعادلة التفاضلية (1) أو (2) : $\frac{dU_C}{dt}+\frac{U_C}{RC}=0$

$$\frac{dU_C}{dt}=Ae^{\alpha t}\times\alpha \Rightarrow \alpha Ae^{\alpha t}+\frac{Ae^{\alpha t}+B}{RC}=0$$

أي أن : $Ae^{\alpha t}(\alpha+\frac{1}{RC})+\frac{B}{RC}=0 \ ...\ (3)$