الوحدة 1

تطور كميات المتفاعلات والنواتج خلال تحول كيميائي في محلول مائي

خلاصة الدرس

1. التحول الكيميائي والزمن : يتم في ثلاث حالات :

- **تحويل سريع أو لحظي** : يصل فيه تطور الجملة إلى نهايته مباشرة عند تلامس المتفاعلات.
- **تحويل بطيء** : يصل فيه تطور الجملة إلى نهايته بعد عدة ثواني إلى عدة دقائق.
- **تحويل لامتناهي البطء** : يستغرق فيه تطور الجملة بعض الأيام أو بعض الشهور.

2. سرعة التفاعل : نمزج التفاعل الكيميائي التالي ، $aA + bB = cC + dD$.

- سرعة اختفاء النوع الكيميائي A : $v_A = -\dfrac{dn_A}{dt}$
- سرعة تشكل النوع D : $v_D = +\dfrac{dn_D}{dt}$

سرعة التفاعل هي سرعة التحول الكيميائي المرتبط بالتغير الزمني لتطور التقدم x في تفاعل بمعنى $\boxed{v = +\dfrac{dx}{dt}}$.

السرعة الحجمية للتفاعل في وسط مائي حجمه V ثابت $\boxed{v = \dfrac{1}{V}\dfrac{dx}{dt}}$.

العلاقة بين سرعة اختفاء وتشكل الأنواع الكيميائية

نموذج لجدول تقدم لتفاعل الكيميائي

المعادلة	التقدم	aA	$+bB$	$=cC$	$+dD$
الحالة الابتدائية	0	n_{0A}	n_{0B}	$0mol$	$0mol$
أثناء التفاعل(الحالة الانتقالية)	x	$n_{0A} - ax$	$n_{0B} - bx$	cx	dx
الحالة النهائية	x_f	$n_{0A} - ax_f$	$n_{0B} - bx_f$	cx_f	dx_f

مع ملاحظة أن التفاعل المحد هو الذي ينتهي.

كمية المادة n_A في اللحظة t

$$n_A = n_{0A} - ax \;\ldots\ldots\; (1)$$

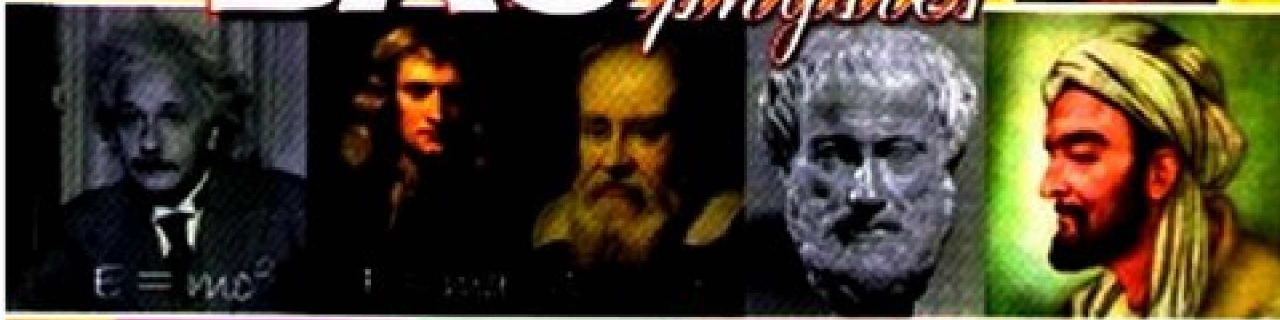
حسب تعريف السرعة الحجمية للمركب A تكتب ، $v_A = \dfrac{1}{V}\dfrac{dx}{dt}$.

من المعادلة (1) نعين عبارة x ، $x = \dfrac{n_{0A} - n_A}{a}$.

تأليف: الأستاذ صالح الحسين

Hard_equation

BAC physics



دروس

تمارين تجريبية — وضعيات ادماجية

زاد العلوم الفيزيائية

للشعب:
العلوم التجريبية - الرياضيات - التقني رياضيات

السنة 3AS ثانوي

طبعة مزيدة ومنقحة.

مطابق للبرنامج الجديد

بالاشتقاق نجد: $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{(n_{0A}-n_A)}{a}$.

لكن: ثابت $= n_{0A}$، وعليه فإن مشتقه معدوم بالنسبة للزمن، أي:

$$\frac{dn_{0A}}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{a}\frac{dn_{0A}}{dt} - \frac{1}{a}\frac{dn_A}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = 0 - \frac{1}{a}\frac{dn_A}{dt} \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{a}\frac{dn_A}{dt}$$

ومنه نكتب السرعة الحجمية: $v_A = \frac{1}{a}\frac{1}{V}\left(-\frac{dn_A}{dt}\right)$

وبما أن الحجم V ثابت، فيمكن إدخاله داخل مؤثر المشتق: $v_A = -\frac{1}{a}\frac{d}{dt}(n_A/V)$

لكن التركيز $[A] = \frac{n_A}{V}$ إذن $v_A = -\frac{1}{a}\frac{[A]}{dt}$

وبالمثل نجد:

$$\boxed{v = -\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d[C]}{dt} = \frac{1}{d}\frac{d[D]}{dt}}$$

ملاحظة: سرعة التفاعل دوما موجبة، وعليه فإن $\frac{d[A]}{dt}$ و $\frac{d[B]}{dt}$ دوما سالبان.

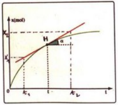
التعيين البياني للسرعة الحجمية للتفاعل في لحظة t

- نمثل بيان تطور التقدم $x(t)$
- نرسم مماس المنحني في النقطة H المحددة باللحظة t.
- نحسب ميل المماس:

ميل المماس $= \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{dx}{dt}$

- ومن ثم نحسب السرعة الحجمية للتفاعل كما يلي:

$$\boxed{v = +\frac{1}{V}\times\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}$$



ملاحظة: كلما زادت قيمة التقدم نقصت سرعة التفاعل.

- رسم منحني تطور التقدم $x(t)$ يتطلب تعيين التقدم x في كل لحظة، وهذا لن يتم إلا بقياس الناقلية النوعية σ (انظر التمرين5).
- يمكن أن نرسم منحني التقدم انطلاقا من الرسم.

3- زمن نصف التفاعل $t_{1/2}$

زمن نصف التفاعل $t_{1/2}$ هو الفترة اللازمة لبلوغ التفاعل نصف تقدمه أي $x = \frac{x_f}{2}$ إذن: $t_{1/2} \to x_f$.

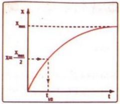
ملاحظة: إذا كان التحول تاما فإن $x_f = x_{max}$

$$t_{1/2} \to \frac{x_{max}}{2} = \frac{n_0}{2}$$

n_0 هي كمية المادة الابتدائية للمتفاعل المحد

في التحول التام في زمن نصف التفاعل $t_{1/2}$ تنقص كمية مادة المتفاعل المحد إلى النصف.

بيان $n_{محد} = f(t)$



تعيين زمن نصف التفاعل بيانيا.

4- العوامل الحركية

إن العوامل التي تؤثر على سرعة التفاعل هي:

- درجة الحرارة.
- التراكيز الابتدائية للمتفاعلات، كلما زادت التراكيز الابتدائية للمتفاعلات، زاد تطور التفاعل.
- الوسيط المناسب *catalyseur*، الوسيط هو نوع كيميائي يسرع التفاعل ولا يشترك فيه ولا يغير الحالة النهائية للجملة الكيميائية.
- الوساطة *catalyse*: هي عملية تأثير الوسيط على التفاعل، ونميز ثلاثة أنواع:

1/ الوساطة المتجانسة

يكون فيها الوسيط والمتفاعلات في نفس الطور إما كلها صلبة (s) أو سائلة (l) أو غازية (g).

2/ الوساطة غير المتجانسة: لا يكون فيها الوسيط والمتفاعلات في نفس الطور.

3/ الوساطة الإنزيمية: وفيها يكون الوسيط إنزيما ويحدث هذا خاصة في العمليات الحيوية، في الحيوانات والنباتات والصناعات الغذائية والطب.

رسم منحني تطور التقدم $x(t)$

يتطلب تعيين التقدم x في كل لحظة t، وهذا لن يتم إلا بقياس الناقلية النوعية σ (التمرين 5).

تطور كميات المتفاعلات والنواتج خلال تحول كيميائي في محلول مائي

كميّة المادّة

- رمزها : n
- وحدتها : mol
- عبارتها

* إذا كان النوع الكيميائي A مادة صلبة، أو سائلة فإن :

$$\boxed{n_A = \frac{m_A}{M_A}}$$

m_A : كتلة المادة بـ (g)

M_A : الكتلة المولية بـ $(g.mol^{-1})$

لدينا في الحالة السائلة $M_A = \rho_A.V$ حيث ρ_A الكتلة الحجمية للسائل، و V حجم السائل.

* إذا كان النوع الكيميائي مادة غازية فإن :

$$\boxed{n_A = \frac{V_A}{V_m}}$$

V_A : حجم الغاز بـ (L)

V_m : الحجم المولي في شروط التجربة

ملاحظة: يعطى $V_{0m} = 22,4L$ في الشرطين النظاميين من الضغط :
$P_0 = 1atm = 1,013.10^5\,Pa$ ودرجة الحرارة θ_0 ($\theta_0 = 0°$ او $T_0 = 273°k$).

* إذا تمّ التفاعل في شروط فيها الضغط P_A ودرجة الحرارة T والحجم V_A للنوع الكيميائي A ، فإن كمية المادة نحسبها من القانون العام للغازات :

$$n_A = \frac{P_A V_A}{RT}$$

مع : $T(k) = \theta(°C) + 273$ ، R الثابت العام للغاز المثالي،
P_A : ضغط الغاز بالباسكال (Pa)،
V_A : حجم الغاز بـ (m^3).

* إذا كان النوع الكيميائي A مذاب في محلول فإن : $n_A = C_A V$ ،
حيث : C_A هو تركيز المولي الحجمي لهذا النوع الكيميائي بـ $(mol.L^{-1})$
V هو حجم المول بـ (L).

معادلة التّفاعل الكيميائي

* ينمذج التفاعل الكيميائي التحوّل الكيميائي، بمعادلة كيميائية تحتوي على طرفين هما المتفاعلات والنواتج : $\boxed{aA + bB = cC + dD}$

c,b,a و d هي أعداد ستكيومترية.

* إذا تمّ التفاعل بنسب ستكيومترية (المزيج ستكيومتري) فإنه يتحقّق :

$$\frac{n_A}{a} = \frac{n_B}{b} = \frac{n_C}{c} = \frac{n_D}{d}$$

إذن لا يوجد متفاعل محدّ، ومتفاعل وُضع بزيادة. فالمتفاعلان (A) و (B) ينتهيان (يُستهلكان).

* وإذا كان المزيج غير متناسق (غير ستكيومتري) بمعنى $\frac{n_A}{a} \neq \frac{n_B}{b}$ ، فإنه يوجد المتفاعل المحدّ.
وعليه فإن دراسة تطوّر التفاعل تتمّ بتعيين كميّة المادّة للمتفاعلات والنواتج عبر جدول التقدّم.

حالة الجملة الكيميائية	التقدّم	aA +	bB =	cC +	cC
الحالة الابتدائية	$X = 0mol$	n_A	n_B	$0mol$	$0mol$
الحالة الانتقالية	X	$n_A - aX$	$n_B - bX$	cX	dX
الحالة النهائية	X_f	$n_A - aX_f$	$n_B - bX_f$	cX_f	dX_f

* إذا كان النوع الكيميائي A هو المتفاعل المحدّ فانه يتحقّق $n_A - aX_f = 0$ وبالتالي $\boxed{X_f = \frac{n_A}{a}}$.

* وإذا كان النوع الكيميائي B هو المتفاعل المحدّ فإنه يتحقّق $n_B - bX_f = 0$ ، إذن $\boxed{X_f = \frac{n_B}{b}}$.

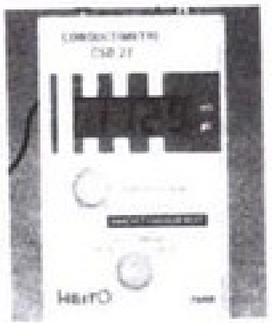
* وإذا كان كلاهما متفاعلان محدّان، فهذا يعني أن $\boxed{X_f = \frac{n_A}{a} = \frac{n_B}{b}}$ أي المزيج متناسق.

الأكسدة والإرجاع

- المؤكسد يكتسب الإلكترونات (e^-) والتفاعل الذي يقوم به تفاعل إرجاع.
- المرجع يفقد الإلكترونات (e^-) والتفاعل الذي يقوم به تفاعل أكسدة.
- تفاعل الأكسدة الإرجاعية ينتج من انتقال $(1e^-)$ أو عدة إلكترونات (ne^-) من مرجع لثنائية (Ox_1 / Red_1) إلى مؤكسد لثنائية أخرى (Ox_2 / Red_2).

دراسة تطوّر تفاعل بطيئ

- يتم دراسة تطوّر تفاعل بطئ بدراسة تطوّر التقدّم $x(t)$ للتفاعل بدلالة الزّمن بإحدى الطريقتين التاليتين :



1/ بالناقلية: وتتمثل في تعيين الناقلية النوعية $\sigma(t)$ لشوارد المحلول أثناء التفاعل - إذا وجدت - ومن ثم نلجأ إلى استعمال قانون كولروش :

$$\boxed{\sigma = \sum_i \lambda_i [X_i]}$$

مع :

λ_i الناقلية المولية النوعية للمذاب، وتقاس بـ $(s.m^2.mol)$،

$[X_i]$ تراكيز شوارد المحلول بـ $(mol.m^{-3})$.

كما أن الناقلية G للمحلول تعطى بالعبارة : $\boxed{G = k\sigma}$ حيث k ثابت الخليّة.

2/ بالضغطية: إذا كان أحد النواتج أو المتفاعلات في الحالة الغازية فإننا ندرس تطوّر $x(t)$ عن طريق تغيّر الضغط $P(t)$ للغاز في الزّمن، عند درجة حرارة T وحجم V ثابتين (أو تغيّر حجم الغاز $V(t)$ في الزّمن بثبوت T و P).

- من أجل ذلك نستعمل القانون العام للغازات : $\boxed{PV = nRT}$ ،

ثم نعيّن في اللّحظة $t = 0$: $P(0) = \dfrac{RT}{V}$

وفي اللّحظة t : $P(t) = n(t)\dfrac{RT}{V}$

مع إيجاد $n(t)$ الذي هو دالّة في التقدّم $x(t)$ أي $n(t) = f(x)$

السّرعة الحجمية للتفاعل (v)

- تعرّف السّرعة الحجمية للتفاعل بالعلاقة : $\boxed{v(t) = \dfrac{1}{V}\dfrac{dx}{dt}}$

V حجم المزيج المتفاعل باللّتر (L)،

x تقدّم التفاعل بالمول (mol)،

v السّرعة الحجمية للتفاعل،

$\dfrac{dx}{dt}$ تعيّن بيانيا من ميل المماس (AB) لبيان التقدّم $x(t)$ في اللّحظة t' المعيّنة.

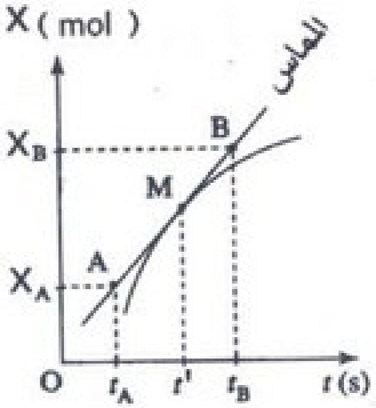
إذن : $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$.

ملاحظة

- إذا كان الزّمن t يقدّر بالثانية (s) فإنّ وحدة v هي $(mol.L^{-1}.s^{-1})$.
- إذا كان الزّمن t يقدّر بالدقيقة (min) فإنّ وحدة v هي $(mol.L^{-1}.min^{-1})$.
- إذا كان الزّمن t يقدّر بالساعة (h) فإنّ وحدة v هي $(mol.L^{-1}.h^{-1})$.
- يمكن أن نكتب : $v(t) = \dfrac{d\left(\dfrac{x(t)}{V}\right)}{dt}$،

لكن الكسر $\dfrac{x(t)}{V}$ يمثل تركيز النوع الكيميائي $[X]$ الذي كمية مادته في اللّحظة t هي $x(t)$.

إذن : $v(t) = \dfrac{d[X]}{dt}$.

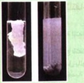


العوامل الحركية

العوامل الحركية التي تغيّر سرعة التفاعل هي :
درجة الحرارة، التركيز، العامل المساعد.

التمرين 1

توصف لك التجارب التالية :



1/ في انبوب اختبار توضع كمية محلول نترات الفضة $(Ag^+_{(aq)} + NO^-_{3(aq)})$ تسكب عليه قطرات من محلول كلور الصوديوم $(Na^+_{(aq)} + Cl^-_{(aq)})$ فنشاهد مباشرة راسبا ابيض.

2/ يوضع محلول هيدروكسيد الصوديوم (الشفاف) $(Na^+ + OH^-)$ يضاف إليه قليل من الكاشف الملون الفتالتين الشفاف فيظهر مباشرة لون وردي بنفسجي.

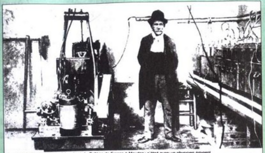
3/ نمزج قليلا من محلول يود البوتاسيوم $(K^+_{(aq)} + I^-_{(aq)})$ مع محلول بيروكسوديكبريتات البوتاسيوم $(2K^+_{(aq)} + S_2O^{2-}_{8(aq)})$ نرج المخلول. ننتظر 20 ثانية. لا يظهر شيء. وبعد 60 ثانية نلاحظ بدء ظهور لون اسمر.

4/ العالم الكيميائي "برتلو" اجرى تفاعلات الأسترة وتتمثل في وضع كمية متساوية في عدد المولات من الإيثانول $C_2H_5 - OH$ وحمض الخل $CH_3 - COOH$ ووضعها في حبابات زجاجية مغلقة.
فلاحظ ان التفاعل عند درجة حرارة الغرفة استغرق له من ماي 1861 م إلى جوان 1862 م ولاحظ ان 55% فقط من كمية المتفاعلات هي التي حدث لها تحول كيميائي.
عندما يضاف قليل من حمض الكبريت المركز يتم التفاعل في نصف ساعة عند الدرجة $180°C$.

أ/ صنف التحولات السابقة حسب سرعتها.

ب/ في التجربة 4 حدّد دور درجة الحرارة وحمض الكبريت المركز.

ج/ اكتب التفاعل المنمذج للتحولين في التجربتين 1 و 3 .



Marcellin Berthelot dans son laboratoire du Collège de France à Meudon : c'était aussi un physicien éminent

الحل

1/ تصنيف التحولات الكيميائية

1/ تحول سريع أو لحظي.

2/ تحول سريع أو لحظي.

3/ تحول بطيئ.

4/ في درجة حرارة الغرفة، التفاعل لامتناهي البطء.

5/ بإضافة قطرات حمض الكبريت المركز وزيادة درجة الحرارة أصبح التفاعل بطيئا.

2/ دور درجة الحرارة

درجة الحرارة من العوامل الحركية التي بازديادها تزداد سرعة التفاعل.
دور حمض الكبريت المركز: دور وساطة متجانسة.

3/ كتابة التفاعل المنمذج للتحولين الكيميائيين

• في التجربة 1 :

$$(Ag^+_{(aq)} + NO^-_{3(aq)}) + (Na^+_{(aq)} + Cl^-_{(aq)}) \rightarrow (Ag^+, Cl^-)_{(s)} + (Na^+_{(aq)} + NO^-_{3(aq)})$$

• في التجربة 3 ،

هو تفاعل اكسدة إرجاعية نفضل كتابته بالمعادلتين النصفيتين الإلكترونيتين ثم نقوم بجمعهما :

$$2I^-_{(aq)} = I_{2(aq)} + 2e^-$$

$$S_2O_8^{-2} + 2e^- = 2SO^{-2}_{4(aq)}$$

$$2I^-_{(aq)} + S_2O^{-2}_{8(aq)} = I_2 + S_2O^{-2}_{8(aq)} + 2SO^{-2}_{4(aq)}$$

التمرين 2

السرعة المتوسطة للشكل في تفاعل كيميائي : $aA + bB \rightleftarrows cC + dD$

نحدد في لحظات مختلفة t التركيز $[D]$ للنوع الكيميائي D ونسجلها في الجدول التالي :

$t(s)$	0	1800	3600	5400	7200
$[D]mol.L^{-1}$	0	0,110	0,170	0,218	0,247

حدّد السرعة المتوسّطة v_m لشكل المركّب D وهذا بين اللحظتين t_1=1800s و t_2=5400s

أ/ بـ $mol.L^{-1}.s^{-1}$

ب/ بـ $mol.L^{-1}.min^{-1}$

الحل

تعطى السرعة المتوسطة لشكل A كما يلي :

$$v_m = v = \frac{[A]_{t_2} - [A]_{t_1}}{t_2 - t_1} = \frac{0,218 - 0,110}{5400 - 1800}$$

أ/ بالوحدة $mol.L^{-1}.s^{-1}$ ، $\boxed{v = 3,10^{-5} mol.L^{-1}.s^{-1}}$

ب/ بالوحدة $mol.L^{-1}.min^{-1}$

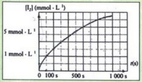
نحوّل الثانية إلى الدّقيقة ، $1s = \frac{1}{60} min$

إذن ، $v = 3,10^{-5} mol.L^{-1}(\frac{1}{60} min)^{-1}$

$v = 3 \times 60.10^{-5}$: $\boxed{v = 1,8.10^{-3} mol.L^{-1}.min^{-1}}$

التمرين 3

ندرس تطور التحول الكيميائي لأكسدة شاردة I^- بالماء الأكسجيني H_2O_2 في وسط حمضي فنحصل على المنحنى $[I_2] = f(t)$ في الشكل المرفق.



1/ اكتب معادلة التحول الكيميائي الحادث.

تعطى الثنائيتان ox / red :

$H_2O_{2(aq)} / H_2O_{(l)}$; $I^-_{(aq)} / I_{2(aq)}$

2/ احسب السرعة اللحظية لتشكل ثنائي اليود I_2 في اللحظة $t = 300s$.

الحل

1/ معادلة التحول الكيميائي الحادث

• الثنائية I^- / I_2 ، تعطي معادلة الأكسدة : $2I^-_{(aq)} = I_{2(aq)} + 2e^-$

• الثنائية H_2O_2 / H_2O ، تعطي معادلة الإرجاع : $H_2O_{2(aq)} + 2H^+_{(aq)} + 2e^- = 2H_2O_{(l)}$

$$2I^-_{(aq)} + H_2O_{2(aq)} + 2H^+_{(aq)} = I_{2(aq)} + 2H_2O_{(l)}$$

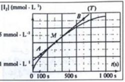
2/ حساب السرعة اللحظية لتشكل ثنائي اليود I_2

تعين السرعة اللحظية من ميل مماس المنحني البياني في اللحظة $t = 300s$.

• اللحظة $t = 300s$ هي فاصلة النقطة M من المنحني البياني $[I_2] = f(t)$.

• نرسم المماس T للبيان في النقطة M كما هو موضح في الشكل المقابل.

• نعين نقطتين A و B من المماس T، ونحدد إحداثيتيهما :



$$(A): \begin{cases} t_A = 100s \\ [I_2]_A = 2,5mmol.L^{-1} \end{cases}$$

$$(B): \begin{cases} t_B = 650s \\ [I_2]_B = 7,3mmol.L^{-1} \end{cases}$$

$$v = \frac{[I_2]_B - [I_2]_A}{t_B - t_A} = \frac{7,3 - 2,5}{650 - 100}$$

$$\boxed{v = 8,7.10^{-3} mmol.L^{-1}.s^{-1}}$$

التمرين 4 (تمرين تجريبي)

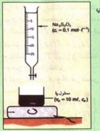
نهدف من خلال هذه التجربة إلى دراسة تطور تفاعل محلول ثنائي اليود مع محلول لشوارد الثيوكبريتات (الوثيقة 1) في حجم ثابت ودرجة حرارة ثابتة. من أجل ذلك نتمرن في البداية على كتابة تفاعل محلول شوارد $I^-_{(aq)}$ مع شوارد بيروكسوديكبريتات $S_2O_8^{2-}$.

الوثيقة 1

1/ أ/ اكتب معادلة الأكسدة الإرجاعية المنمذجة لهذا التحول.

ب/ نعاير محلول ثنائي اليود I_2 المتشكل بمحلول تيوكبريتات الصوديوم $(2Na^+ + S_2O_3^{2-})$.

اكتب معادلة تفاعل I_2 مع $(S_2O_3^{2-})$.



2/ في لحظة نعتبرها ابتدائية $t = 0s$ ندخل في دورق مخروطي $100ml$ من محلول يود البوتاسيوم $(K^+_{(aq)} + I^-_{(aq)})$ تركيزه $C_1 = 0,4 mol.L^{-1}$، نضيف إليها $100ml$ من محلول بيروكسوديكبريتات البوتاسيوم $(2K^+ + S_2O_8^{2-})$ تركيزه $C_2 = 0,036 mol.L^{-1}$، نرج المزيج الناتج فنحصل بالتدرج على لون أسمر.

أ/ اللون الأسمر يعود إلى ظهور اي نوع كيميائي ؟

ب/ في اللحظة $t=3min$ ناخذ $10,0ml$ من هذا المزيج ونسكبه في بيشر به $100ml$ ماء ثلجي لكي يوقف التفاعل بين I^- و $S_2O_8^-$ المتواجدة في البيشر بالإضافة إلى I_2 و...

ج/ بين لماذا يتوقف التفاعل بين $I^-_{(aq)}$ و $S_2O^-_{8(aq)}$.

3/ نعاير محتوى البيشر بالتدرج بمحلول لتيوكبريتات الصوديوم تركيزه $C_{tit} = 0,01 mol.L^{-1}$ فنحصل على لون أصفر فاتح لا يظهر تغير لونه ولكي نحصل على قيمة حجم التكافؤ V_E بالضبط نضيف قطرات من صمغ النشاء فيتحول اللون إلى ازرق مسود.

مباشرة عند المرور بنقطة التكافؤ نواصل عملية التسحيح قطرة قطرة وعند نقطة معينة يصبح لون محتوى البيشر شفافا. عندها نحدد قيمة محلل التيوكبريتات الصوديوم. نعيد نفس العمليات في لحظات مختلفة : $t=5,9,12,16,20,3040,60,80\ min$ وفي كل مرة نسجل V_E وندون كل النتائج في الجدول التالي :

$t(min)$	0	3	5	9	12	16	20	30	40	60	80
$V_E(mL)$	0	5,5	7,8	12,7	16,2	20,1	22,8	27,5	30,4	33,2	33,9

يعطى التفاعل 2 المنمذج لتحول المعايرة : $I_{2(aq)} + 2S_2O^{2-}_{3(aq)} = 2I^-_{(aq)} + S_4O^{2-}_{6(aq)}$.

أ/ ما الفرق بين هذا التفاعل 2 والتفاعل 1 ؟

حدد العبارة التي استعملت لتمييز التفاعل الأول من الثاني.

ب/ جد علاقة بين $n(I_2)$ المتشكل من التحول (1) و C_{tit} و V_E.

4/ عين التركيز $[I_2]$ وكذلك $[S_4O_6^{2-}]$ و $[I^-]$

5/ أ/ املأ جدول تغير $[I_2]$ بدلالة t.

ب/ ارسم المنحني البياني لتطور $[I_2] = f(t)$.

ج/ احسب سرعة تفكك I_2 في اللحظة $t=20min$.

د/ استنتج سرعة تفكك شوارد الثايوكبريتات وكذا سرعة تشكل كل من I^- و SO_4^{2-}.

الحل

1/ أ/ كتابة معادلة الأكسدة الإرجاعية المندمجة للتحول (1)

$$2I^-_{(aq)} = I_{2(aq)} + 2e^-$$

$$S_2O^{2-}_{8(aq)} + 2e^- = 2SO^{2-}_{4(aq)}$$

$$2I^-_{(aq)} + S_2O_{8(aq)} = I_{2(aq)} + 2SO^{2-}_{4(aq)}$$

ب/ كتابة معادلة الأكسدة الإرجاعية المندمجة للتحول (2)

$$I_{2(aq)} + 2e^- = 2I^-_{(aq)}$$

$$2S_2O_3^{2-} = S_4O^{2-}_{6(aq)} + 2e^-$$

$$I^-_{2(aq)} + 2S_2O_3^{2-} = 2I_{(aq)} + S_4O^{2-}_{6(aq)}$$

2/أ/ اللون الأسمر يؤكد على ظهور ثنائي اليود I_2 (في الواقع اللون الأسمر يعود إلى شوارد ثلاثي اليود I_3^- نظرا لتواجد $I_{2(aq)}$ مع $I^-_{(aq)}$).

ب/ يتوقف التفاعل بين $I^-_{(aq)}$ و $S_2O^-_{8(aq)}$ لانخفاض درجة الحرارة، فهي من العوامل الحركية.

3/أ/ الفرق بين التحولين الكيميائيين 1و2 هو ان الأول تحول كيميائي سريع بدليل انه في بداية التجربة2 قيل إنه أضيف الماء شديد البرودة حتى يتوقف التفاعل بين $I^-_{(aq)}$ و $S_2O^-_{8(aq)}$.

أما الثاني فهو تحول كيميائي بطيئ بدليل أنه استمر إلى $80min$.

ب/ العلاقة بين $n(I_2)$ و C_{tit} و V_E

للسهولة نعيد كتابة المعادلة الكيميائية : $I_{2(aq)} + 2S_2O^{2-}_{3(aq)} = 2I^-_{(aq)} + S_4O^{2-}_{6(aq)}$

لدينا : $\dfrac{n(I_2)}{1} = \dfrac{n(S_2O_3^{2-})}{2} = \dfrac{n(I^-)}{2} = \dfrac{n(S_4O_6^{2-})}{1}$

لا تهمنا إلا المساواة : $n(I_2) = \dfrac{n(S_2O_3^{2-})}{2}$

لكن، $n(S_2O_3^{2-}) = C_{tit} \times V_E$ إذن ، $\boxed{n(I_2) = \dfrac{C_{tit} \times V_E}{2}}$ $(*)$ وهي العلاقة المطلوبة.

ج/ تعيين تركيز I_2 اي $[I_2]$

نعلم أن $n_{(I_2)} = C_{(I_2)}.V_{(I_2)}$

لكن $C_{(I_2)}$ هو تركيز I_2 اي $C_{(I_2)} = [I_2]$

كما ان $V_{(I_2)} = 10ml$ اي $V_{(I_2)} = 10^{-2} L$ إذن ، $C_{tit} = 10^{-2} mol.L^{-1}$

- نعوّض العلاقة السابقة $(*)$ فنجد $[I_2] \times 10^{-2} = \dfrac{10^{-2} \times V_E}{2}$ ومنه $\boxed{[I_2] = \dfrac{V_E}{2}}$

• بنفس الطريقة نجد أيضا $\boxed{[S_4O_6^{2-}] = \frac{V_E}{2}}$

• أما تركيز I^- فنجده ، $\boxed{[I^-] = V_E}$

4/ أ/ ملء الجدول

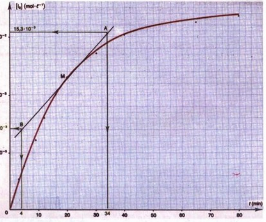
لدينا ، $[I_2] = \frac{V_E}{2}$

في اللحظة $t = 3min$ لدينا V ، نعوّض فنجد ، $[I_2] = \frac{5,5.10^{-3}}{2} = 2,75.10^{-3} mol.L^{-1}$

نعوّض بالنسبة للحظات الأخرى فنحصل على جدول بالقيم التالي ،

$[I_2]$ $(mol.L^{-1}.10^{-3})$	0	2,75	3,9	6,3	8,1	10,1	11,4	13,7	15,2	16,6	16,9
$t(min)$	0	3	5	9	12	16	20	30	40	65	80

ب/ رسم المنحني البياني $[I_2] = f(t)$



ج/ حساب سرعة تفكك (I_2)

$$V(I_2) = M \text{ ميل المماس في النقطة } = \frac{15,3.10^{-3} - 7.10^{-3}}{34-4} \approx 2,76.10^{-4}$$

$\boxed{V(I_2) = 2,8.10^{-4} mol.L^{-1}.min^{-1}}$

د/ سرعة تفكك التايوكبريتات

نعلم أن $\frac{V(S_2O_3^{2-})}{2} = \frac{V(I_2)}{1} = \frac{V(I^-)}{2} = \frac{V(S_4O_6^{2-})}{1}$

تماما مثل المساواة المكتوبة في السؤال (ب)، ومنه ، $\boxed{V(S_4O_6^{2-}) = 2,8.10^{-4} mol.L^{-1}.min^{-1}}$

$$V(S_2O_3^{2-}) = V(I^-) = 2V(I_2) = 5,6.10^{-4} mol.L^{-1}.min^{-1}$$

التمرين 5 (دراسة تطور تفاعل عن طريق قياس الناقلية)

إن تفاعل إماهة المركب A (التفاعل مع H_2O) وهو 2كلورو-2مثيل بروبان يُنمذج بالمعادلة الكيميائية ، $\boxed{(CH_3)_3CCl_{(aq)} + 2H_2O_{(l)} = (CH_3)_3COH_{(aq)} + H^+_{(aq)} + Cl^-_{(aq)}}$.

نهدف إلى دراسة تطور هذا التفاعل عن طريق قياس الناقلية النوعية σ للشاردتين $Cl^-_{(aq)}$ و $H^+_{(aq)}$ المتواجدتين فيه.

بيشر سعته $150ml$ نسكب فيه $80ml$ من مذيب يتألف من مزيج من ماء- كيتون بنسبتين حجميتين 95% و 5% على الترتيب. كما نضيف $20ml$ من المركب A الذي تركيزه الابتدائي $C_0 = 0,10mol.L^{-1}$. نستعين بجهاز قياس الناقلية ومخلاط مغناطيسي. ثدون النتائج في جدول.

$t(s)$	0	30	60	80	100	120	150	200
$\sigma(s.m^{-1})$	0	0,246	0,412	0,502	0,577	0,627	0,688	0,760

1/ أ/ ذكّر بقانون كولروش.

ب/ قارن بين عدد المولات الابتدائي لكل من الماء والمركب A . ماذا تستنتج ؟

2/ انجز جدول تقدم التفاعل.

3/أ/ استنتج عبارة الناقلية النوعية σ بدلالة التقدم $x(t)$ للتفاعل، وكذا عند انتهاء التفاعل.

ب/ أعط جدولا يعطي قيم x بدلالة الزمن.

4/ ارسم المنحني البياني لتطور $x(t)$.

5/ احسب سرعة التفاعل في اللحظة $t = 50s$.

6/ أ/ احسب قيمة التقدم الأعظمي x_{max} في اللحظة t_∞ .

ب/ عين زمن نصف التفاعل $t_{1/2}$.

يعطى ، $\lambda(H_3O^+) = 35.10^{-3} s.m^2.mol^{-1}$ ، $\lambda(Cl^-) = 7,6.10^{-3} s.m^2.mol^{-1}$

الحل

1/ أ/ قانون كولروش

تعطى الناقلية النوعية لمحلول شاردي، شوارده هي x_i بقانون كولروش : $\boxed{\sigma = \sum_i \lambda_i [x_i]}$

مع : $[x_i]$: التركيز المولية الحجمية لشوارد المحلول.

λ_i : الناقلية المولية النوعية للمذاب.

ب/ المقارنة بين ($n_{0 ماء}$) و (n_{0A})

لدينا :
$$n_{0A} = C_0 V_0 = 0,10 \times 20.10^{-3}$$
$$n_{0A} = 2.10^{-3} mol$$

بالنسبة للماء : حجم الماء $= 95\%$ من حجم المزيج (ماء- كيتون)

حجم الماء : $V_{H_2O} = \dfrac{95 \times 80}{100} = 76 mL$

كتلة هذا الحجم من الماء : $m_{H_2O} = \rho_{H_2O} \times V_{H_2O}$

لكن الكتلة الحجمية للماء $\rho_{H_2O} = 1 g.mL^{-1}$

إذن : $\boxed{m_{H_2O} = 1 \times 76 = 76 g}$

عدد مولات الماء (كمية المادة) الابتدائي

$$n_{0H_2O} = \frac{m_{H_2O}}{M_{H_2O}} = \frac{76}{18} = 4,2 mol$$

نلاحظ أن $n_{0\,eau} >> n_{0A}$ فنقول إذن : إن تواجد الماء "بزيادة".

2/ جدول تقدم التفاعل

معادلة التفاعل	$(CH_3)_3CCl_{(aq)}$	$+ 2H_2O_{(l)}$	$= (CH_3)_3COH_{(aq)}$	$+ H^+_{(aq)}$	$+ Cl^-_{(aq)}$
الحالة الابتدائية	n_0	بزيادة	$0\ mol$	$0\ mol$	$0\ mol$
الحالة الانتقالية	$n_0 - x_f$	بزيادة	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$
الحالة النهائية	$n_0 - x_f = 0$	بزيادة	x_{max} أو x_f	x_f	x_f

لاحظ أن المركب $(CH_3)_3CCl$ هو الذي سيختفي من التفاعلات لذا وضعنا : $n_0 - x_f = 0$

ومنه : $x_f = n_0$

3/ أ/ عبارة الناقلية النوعية للمحلول بدلالة التقدم x

$$\sigma = \sum \lambda_i [x_i] = \lambda_{H^+}[H^+] + \lambda_{Cl^-}[Cl^-] ......(*)$$

لكن $[H^+] = \dfrac{n_{H^+}}{V}$ وكذا $[Cl^-] = n_{Cl^-}$ حيث V حجم المحلول.

وفي لحظة زمنية t (الحالة الانتقالية) : التقدم هو $x(t)$

إذن $n_{H^+} = \dfrac{x(t)}{V}$ و $n_{Cl^-} = \dfrac{x(t)}{V}$ ، $[Cl^-] = [H^+] = \dfrac{x(t)}{V}$

نعوض في العبارة (*) فنجد : (1) ...... $\boxed{\sigma(t) = (\lambda_{H^+} + \lambda_{Cl^-})\dfrac{x(t)}{V}}$

عند انتهاء التفاعل لدينا : $x(t) = x_f = n_0$

$$\sigma_f = (\lambda_{H^+} + \lambda_{Cl^-})\frac{n_0}{V}$$

ب/ جدول تغير x بدلالة t

من العبارة (1) السابقة نجد عبارة التقدم x : $x = \dfrac{V\sigma}{\lambda_{H^+} + \lambda_{Cl^-}}$

لدينا : $V = 80mL + 20mL$ ، $V = 100mL$

نحول إلى m^3 لأن λ_{H^+} و λ_{Cl^-} فيهما m^3 ، إذن $V = 100 \times 10^{-6}$ أي $V = 10^{-4} m^3$

نعوض في عبارة x فنجد : $x = \dfrac{10^{-4}\sigma}{35.10^{-3} + 7,6.10^{-3}}$

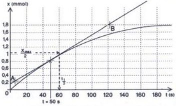
$$x \approx 2,347.10^{-3}.\sigma (mol)$$

نحول إلى الملي مول $(mmol)$: $\boxed{x \approx 2,347\sigma (mmol)}$

في كل لحظة t نعوض بـ σ فنجد قيمة x ، وهكذا نملأ الجدول :

$t(s)$	0	30	60	80	100	120	150	200
$\sigma(s.m^{-1})$	0	0,577	0,967	1,18	1,35	1,47	1,62	1,78

4/ رسم المنحني البياني $x = f(t)$



5/ حساب سرعة التفاعل في اللحظة $t = 50s$

نرسم مماس المنحني في النقطة التي فاصلتها $t = 50s$ ،

$v = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{1,8 - 0,25}{125 - 7}$ ، $\boxed{v = 1,1.10^{-4}\ mol.s^{-1}}$

6/ أ/ حساب قيمة التقدم الأعظمي x_{max} في t_∞

يعين x_{max} من المتفاعل المحد وهو المركب A اي $(CH_3)_3CCl$

ومن جدول التقدم لدينا :

$n_0 - x_f = 0$; $\boxed{x_f = x_{max} = n_{0A} = 2.10^{-3}\ mol}$

ب/ تعيين زمن نصف التفاعل $t_{1/2}$

نحصل على $t_{1/2}$ في حالة $x = \frac{x_{max}}{2}$

اي $x = \frac{2\times 10^{-3}}{2}$ ، $x = 1\times 10^{-3}\ mol$ اي $x = 1mmol$

ننقل هذه النقطة في البيان، ونستخرج الفاصلة الموافقة لها وهي $t_{1/2}$ ، $\boxed{t_{1/2} = 60s}$

التمرين 6 (تمرين تجريبي)

1/ إيثانوات الإيثيل $C_4H_8O_2$ سائل شفاف صيغته نصف المفصلة $CH_3COOC_2H_{5(aq)}$.

أ/ ما هي وظيفته الكيميائية ؟

ب/ ما هي المجموعة التي تميّزها ؟

2/ إن التفاعل بين إيثانوات الإيثيل ومحلول الصّود $(Na^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)})$ يسمّى تفاعل التصبّن وينمذج بالمعادلة :

$$CH_3COOC_2H_{5(aq)} + Na^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)} = Na^+ + CH_3COO^- + C_2H_5OH$$

في لحظة $t = 0s$ نضيف إيثانوات الإيثيل إلى محلول موجود في بيشر هو محلول الصّود فنحصل على مزيج حجمه $V_0 = 1000\,mL$ ويكون التركيز المولي لكل الأنواع الكيميائية متساويا ويساوي $C_0 = 10\,mmol.L^{-1}$.

ليكن $X(t)$ تقدّم التفاعل في اللّحظة t . انشئ جدول التقدّم.

3/ لمتابعة تطوّر التفاعل نقيس في لحظات مختلفة الناقلية $G(t)$ بواسطة جهاز قياس الناقلية.

أ/ برايك، لماذا ندرس تطوّر هذا التفاعل عن طريق قياس الناقلية، ولا ندرسه عن طريق تغيّر الضغط او اللّون ؟

ب/ عبّر عن $G(t)$ للمحلول بدلالة الثابت K لجهاز الناقلية والناقلية الشاردية المولية لمختلف شوارد المحلول λ_{Na^+} ، λ_{HO^-} ، $\lambda_{CH_3COO^-}$.

بيّن انها من الشكل $G(t) = \frac{K}{V_0}(\alpha X(t) + \beta)$ مع تحديد عبارتي الثابتين α و β .

ج/ استنتج عبارة الناقلية في البداية $t = 0s$، اي $G(0)$، والناقلية عند انتهاء التفاعل $G(\infty)$، اي في اللّحظة $t \to \infty$.

4/أ/ تعطى العبارة $y(t)$ بحيث $y(t) = \frac{G(t)}{G(0) - G(\infty)}$.

بيّن ان $X(t) = C_0V_0(y(0) - y(t))$.

ب/ بقياس $G(t)$ في لحظات مختلفة X نحصل على الجدول التالي :

$t(min)$	0	5	9	13	20	∞
$y(t)$	1,560	1,315	1,193	1,107	0,923	0,560

بيّن انه انطلاقا من الجدول يمكن الحصول على قيم $X(t)$ في اللّحظات السابقة. ارسم بيان $X(t)$.

بيّن انه يمكن تحديد الفترة الزمنية اللاّزمة لتصبّن نصف الكمية الابتدائية للأستر.

الحل

أ/ الوظيفة الكيميائية للمركب

بما أن الصيغة نصف المفصلة للمركب هي من الشكل $R-COO-R'$ فله وظيفة استر.

ب/ المجموعة التي تميزه هي : $-\overset{\overset{O}{/}}{C}=O$

2/ جدول التقدم

التفاعل		$CH_3COOC_2H_{5(aq)} + Na^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)} = Na^+_{(aq)} + CH_3COO^-_{(aq)} + C_2H_5OH_{(aq)}$					
الزمن $t(min)$	التقدم $X(mol)$						
0	0	C_0V_0	C_0V_0	C_0V_0	C_0V_0	0	0
t	$X(t)$	$C_0V_0-X(t)$	C_0V_0	$C_0V_0-X(t)$	C_0V_0	$X(t)$	$X(t)$
∞	$X(t)$	$C_0V_0-X_{max}=0$	C_0V_0	$C_0V_0-X_{max}=0$	C_0V_0	X_{max}	X_{max}

حسب المعادلة الكيميائية المعطاة فإن Na^+ موجود في الطرفين الأيسر والأيمن، مما يدل على ان الشوارد Na^+ لا تتفاعل، وبالتالي الكمية الابتدائية لها C_0V_0 لا تتغير، مع $C_0V_0-X_{max}=0$

إذن : $\boxed{X_{max}=C_0V_0}$.

3/أ/ هذا التفاعل به شوارد مختلفة، ولذا يفضل دراسة تطوّره بدراسة تغيّر الناقلية G لهذه الشوارد في المحلول، وبما أنه لا يحتوي على أنواع كيميائية في الحالة الغازية، لذا لا ندرس تطوّر التفاعل بدراسة تغيّر الضغط P . كما أن المحلول شفاف ولا يوجد فيه تغيّر لوني ندرسه.

ب/ عبارة الناقلية $G(t)$

نعلم أن $G(t)=k\,\sigma(t)$ حيث k مقدار ثابت ندعوه ثابت جهاز الناقلية.

تعطى عبارة الناقلية النوعية $\sigma(t)$ بقانون كولروش :

$$\sigma(t)=\sum_i \lambda_i[X_i]=\lambda_{Na^+}[Na^+]+\lambda_{HO^-}[HO^-]+\lambda_{CH_3COO^-}[CH_3COO^-]$$

للسهولة نصطلح على كتابة CH_3COO^- بالرمز A^-

إذن : $G(t)=k\left(\lambda_{Na^+}[Na^+]+\lambda_{HO^-}[HO^-]+\lambda_{A^-}[A^-]\right)$

لكن : $[Na^+]=\dfrac{C_0V_0}{V_0}$ وبالتالي : $[Na^+]=C_0$

كذلك : $[HO^-]=\dfrac{C_0V_0-X(t)}{V_0}$ إذن : $[HO^-]=C_0-\dfrac{X(t)}{V_0}$

كما ان $[A^-]=\dfrac{X(t)}{V_0}$ نعوّض في عبارة $G(t)$ السابقة فنجد :

$$G(t)=k\left(\lambda_{Na^+}\times C_0+\lambda_{HO^-}\times C_0-\lambda_{HO^-}\times\frac{X(t)}{V_0}+\lambda_{A^-}\times\frac{X}{V_0}\right)$$

$$\boxed{G(t)=k\left[C_0(\lambda_{Na^+}+\lambda_{HO^-})+\frac{X(t)}{V_0}(\lambda_{A^-}-\lambda_{HO^-})\right]}$$

$$G(t)=\frac{k}{V_0}\left[\underbrace{(\lambda_{A^-}-\lambda_{HO^-})}_{\alpha}X(t)+\underbrace{C_0V_0(\lambda_{Na}+\lambda_{HO^-})}_{\beta}\right]$$

فهي من الشكل $\boxed{G(t)=\dfrac{k}{V_0}(\alpha X(t)+\beta)}$

مع $\alpha=\lambda_{A^-}-\lambda_{HO^-}$ و $\beta=C_0V_0(\lambda_{Na^+}+\lambda_{HO^-})$

ج/ عبارة $G(0)$

في اللّحظة $t=0$ ، $X=0\,mol$ ، نعوّض في عبارة $G(t)$ لنجد $G(0)=\dfrac{k}{V_0}(\alpha+0+\beta)$

ومنه : $G(0)=\dfrac{k\beta}{V_0}$

عبارة $G(\infty)$

في اللّحظة $t\to\infty$ لدينا $X=X_{max}=C_0V_0$ ، نعوّض في عبارة $G(t)$ فنجد :

$$G(\infty)=\frac{k}{V_0}(\alpha C_0V_0+\beta)$$

4/أ/ إثبات العبارة $X(t)$

لدينا : $y(t)=\dfrac{G(t)}{G(0)-G(\infty)}$

نعيّن في البداية الفرق $G(0)-G(\infty)$.

$$G(0)-G(\infty)=\frac{k\beta}{V_0}-\frac{k}{V_0}(\alpha C_0V_0+\beta)=\frac{k\beta}{V_0}-\frac{k\alpha C_0V_0}{V_0}-\frac{k\beta}{V_0}$$

إذن : $\boxed{G(0)-G(\infty)=-k\alpha C_0}$

نعوّض عبارة الفرق في عبارة $y(t)$ لنجد :

$$y(t)=\frac{\frac{k}{V_0}(\alpha X(t)+\beta)}{-k\alpha C_0}=\frac{\alpha X(t)+\beta}{-\alpha C_0V_0}\;......(1)$$

في اللحظة $t=0$ لدينا : $X(t)=X(0)=0\,mol$

إذن : $y(0)=\dfrac{\alpha+0+\beta}{-\alpha C_0V_0}=-\dfrac{\beta}{\alpha C_0V_0}$ ......(2)

نقوم بطرح المعادلتين (1) و (2) فنجد : $y(t)-y(0)=\dfrac{\alpha X(t)+\beta}{-\alpha C_0V_0}-\dfrac{-\beta}{\alpha C_0V_0}$

$$=\frac{\alpha X(t)}{-\alpha C_0V_0}-\frac{\beta}{\alpha C_0V_0}+\frac{\beta}{\alpha C_0V_0}$$

$$y(t)-y(0)=\frac{X(t)}{-C_0V_0}$$

وهي العبارة المطلوبة. $\boxed{X(t)=C_0V_0\left(y(0)-y(t)\right)}$

ب/ من الجدول نلاحظ أنه لما $t=0$ يكون $y(t)=y(0)=1,560$

عندما نعوض في عبارة $X(t)$ فنجد $X(0)=0\,mol$

وفي اللحظة $t=5\,min$ لدينا $y(t)=1,315$

كما أن $C_0=10\,mmol.L^{-1}=10^{-2}\,mol.L^{-1}$ و $V_0=1L$

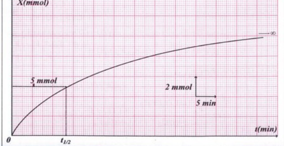
عندما نعوض في عبارة $X(t)$:

$X(t)=10^{-2}\times 1(1,560-1,315)=0,245.10^{-2}\,mol=2,45.10^{-3}\,mol=2,45\,mmol$

وهكذا بالنسبة لبقية القيم، عندما نحسبها نحصل على الجدول التالي :

$t(min)$	0	5	9	13	20	∞
$X(m.mol)$	0	2,45	3,67	4,53	6,37	10,00

رسم البيان $X(t)$



بالفعل، يمكن تحديد الفترة الزمنية لنصف الكمية الابتدائية للأستر، وهي $n_0=\dfrac{C_0V_0}{2}$

$$n_0=\frac{10^{-2}\times 1}{2}=5.10^{-3}\,mol=5\,mmol$$

ننقل الكمية $n_0=5\,mmol$ في البيان $X(t)$ فنجد قيمة $t_{1/2}\approx 14\,min$

التمرين 7 (تمرين تجريبي)

عند درجة الحرارة $\theta=20°C$ وفي دورق (بالون) حجمه $V=500\,mL$ نتابع باستعمال جهاز قياس الضغط، التحول الذي يحدث بين حجم $V'=200\,mL$ لمحلول حمض كلور الهيدروجين $(H^+_{(aq)}+Cl^-_{(aq)})$ ذي تركيز مولي $C=10\times10^{-1}\,mol.L^{-1}$ وكتلة $m_{Mg}=9,0\,cg$ من المغنيزيوم. معادلة التفاعل المنمذج للتحول الكيميائي الحادث هي :

$$Mg_{(s)}+2H^+_{(aq)}=Mg^{2+}_{(aq)}+H_{2(g)}$$

يعطى : $M_{Mg}=24,3\,g.mol^{-1}$ ، $R=8,31\,J.k^{-1}.mol^{-1}$.

ما هي النواتج المتشكلة خلال هذا التحول ؟ احسب كميات المادة الابتدائية للمتفاعلات.

ما هو المتفاعل المحد ؟ علل.

1/ الضغط الجوي في شروط التجربة $P_{atm}=1,009\times10^5\,Pa$. نقيس الضغط P للغاز الموجود في الدورق لأزمنة مختلفة وتعطى قيمته بالعلاقة $P=P_{atm}+P_{H_2}$ ، ونحصل على جدول القياسات التالي :

$t(s)$	0	18	52	71	90	115
$P(10^5\,Pa)$	1,009	1,034	1,097	1,127	1,159	1,198
$t(s)$	144	160	174	193	212	238
$P(10^5\,Pa)$	1,239	1,261	1,273	1,294	1,297	1,297
$t(s)$	266	290				
$P(10^5\,Pa)$	1,297	1,297				

أ/ أعط جدول تقدم التفاعل.

ب/ جد العبارة الحرفية للتقدم x بدلالة P_{H_2} . مثل بيان تغيرات التقدم x بدلالة الزمن.

سلم الرسم : $1cm\leftrightarrow 20s$ للفواصل.

$1cm\leftrightarrow 4\times10^{-4}\,mol$ للتراتيب.

عين زمن نصف التفاعل $t_{1/2}$. عين السرعة الحجمية للتفاعل في اللحظة $t=180s$.

عين عند اللحظة $t=180s$ حجم غاز ثنائي الهيدروجين المتشكل والتركيز المولي لشوارد $Mg^{2+}_{(aq)}$ في الوسط التفاعلي.

يعطى الحجم المولي للغاز المنطلق (في شروط التجربة) بالقيمة $V_m=24L.mol^{-1}$.

الحل

1/ النواتج المتشكلة خلال هذا التحوّل هي

غاز ثنائي الهيدروجين H_2 وشوارد المغنزيوم الثنائية Mg^{2+}.

2/ حساب كميات المادة الابتدائية للمتفاعلات

إذا اعطي التركيز C والحجم V نستعمل العلاقة $n = CV$، وإذا اعطيت الكتلة m نستعمل العبارة $n = \dfrac{m}{M}$، وهذا لحساب كمية المادة.

نحوّل الحجم إلى اللتر،
$$n_{Cl^-} = n_{H^+} = CV' = 1,0\times 10^{-1}\times 2\times 10^{-1} = 2,0\times 10^{-2}\,mol$$

نحوّل الكتلة من السنتيغرام (cg) إلى الغرام (g)،
$$n_{Mg} = \frac{m_{Mg}}{M_{Mg}} = \frac{9\times 10^{-2}}{24,3} = 3,7\times 10^{-3}\,mol$$

3/ المتفاعل المحدّ

معادلة التفاعل هي $1Mg_{(s)} + 2H^+_{(aq)} = Mg^{2+}_{(aq)} + H_{2(g)}$

فإذا تمّ التفاعل بنسب ستكيومترية فيجب أن يتحقّق $\dfrac{n_{Mg}}{1} = \dfrac{n_{H^+}}{2}$

فإذا تحقّق $\dfrac{n_{H^+}}{2} > \dfrac{n_{(Mg)}}{1}$ فان Mg وُضع بزيادة و H^+ هو الذي ينتهي، وبالتالي هو المتفاعل المحدّ.

وإذا تحقّق $\dfrac{n_{H^+}}{2} < \dfrac{n_{Mg}}{1}$ فان H^+ هو الذي وُضع بزيادة و Mg هو الذي ينتهي، فهو المتفاعل المحدّ.

وعليه، فلتحديد المتفاعل المحدّ يجب أن نقارن بين النسبتين $\dfrac{n_{Mg}}{1}$ و $\dfrac{n_{H^+}}{2}$

$$n_{Mg} = 3,7\times 10^{-3}\,mol \quad \text{و} \quad \frac{n_{H^+}}{2} = \frac{2\times 10^{-2}}{2} = 10^{-2}\,mol$$

نلاحظ حينئذ ان $\dfrac{n_{Mg}}{1} < \dfrac{n_{H^+}}{2}$ ومنه فإن $\boxed{Mg \text{ هو المتفاعل المحدّ.}}$

4/أ/ جدول التقدّم

المعادلة		$Mg_{(s)} + 2H^+_{(aq)} = Mg^{2+}_{(aq)} + H_{2(g)} + 2H_2O_{(l)}$				
	التقدّم					
الحالة الابتدائية	0	$3,7\times 10^{-3}\,mol$	$2,0\times 10^{-2}\,mol$	$0mol$	$0mol$	.
	X	$3,7\times 10^{-3} - X(t)$	$2,0\times 10^{-2} - 2X(t)$	$X(t)$	$X(t)$	.
الحالة النهائية	X_{max}	$3,7\times 10^{-3} - X_{max}$	$2,0\times 10^{-2} - 2X_{max}$	X_{max}	X_{max}	.

ب/ العبارة الحرفية للتقدم X بدلالة P

يُعطى القانون العام للغازات المثالية (معادلة الحالة للغازات المثالية) بالعبارة $PV = nRT$

إذن $n_{H_2} = \dfrac{P_{H_2}V}{RT}$

وحسب جدول التقدم فإن $n_{H_2} = X(t)$ إذن، $\boxed{X(t) = \dfrac{P_{H_2}.V}{R.T}}$

ننبّه إلى الوحدات :

- الحجم V بـ m^3.
- الضغط P_{H_2} بـ P_a (الباسكال) مع $P_{H_2} = P - P_{atm}$.
- درجة الحرارة T بـ k (الكلفن) مع $T(k) = \theta(°C) + 273$.
- التقدم X بـ mol.
- الثابت العام للغازات R بـ $(P_a.m^3.mol^{-1}.k^{-1})$ أو اختصارا بجملة الوحدات الدولية SI.

لدينا المعطيات التالية : $\theta = 20^0C$ ومنه $T = 20 + 273$ ، $T = 293k$

$P_{atm} = 1,009\times 10^5\,P_a$ ، $P_{H_2} = P - 1,009\times 10^5\,P_a$ ، $R = 8,31\,SI$

حجم الغاز V : غاز ثنائي الهيدروجين H_2 الناتج عن التفاعل يتصاعد ويحتل الحيّز الفارغ، إذن :

$V =$ حجم البالون − حجم المحلول $= 500mL - 200mL = 300mL = 3\times 10^{-1}L = 3\times 10^{-4}m^3$

نعوّض في عبارة $X(t)$ فنجد : $X(t) = \dfrac{(P - 1,009\times 10^{+5})3\times 10^{-4}}{8,31\times 293}$.

عند التبسيط نجد : $\boxed{X(t) = 1,232\times 10^{-7}(P - 1,009\times 10^5)}$ وهي العبارة المطلوبة.

5/ تمثيل بيان $X(t)$

لتمثيل البيان، يجب التعويض عن قيم P المعطاة في الجدول في عبارة $X(t)$.

- فمثلا، من أجل القيمة الأولى : $t = 0$ و $P = 1,009\times 10^5\,Pa$ فنجد :

$$X(0) = 1,232\times 10^{-7}(1,009\times 10^5 - 1,009\times 10^5) = 0mol$$

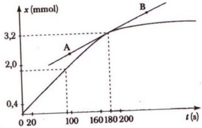
- ومن أجل القيمة الثانية : $t = 18s$ و $P = 1,034\times 10^5\,Pa$ فنجد :

$$X(18) = 1,232\times 10^{-7}(1,034\times 10^5 - 1,009\times 10^5) = 3,08\times 10^{-4}\,mol$$

أي : $\boxed{X(18) = 0,31\times 10^{-3}\,mol = 0,31mmol}$

وهكذا بالنسبة لبقية القيم، لنحصل على الجدول التالي :

$t(s)$	0	18	52	71	90	115	144	160	174	193	212	238
X (mmol)	0	0,31	1,10	1,45	1,85	2,33	2,83	3,10	3,25	3,42	3,51	3,55



6/ زمن نصف التفاعل $t_{1/2}$

من جدول القيم لدينا $X_{max} = 2,55mol$ ومنه $X_{1/2} = \frac{X_{max}}{2}$

إذن $X_{1/2} = \frac{2,55}{2} \approx 1,78mmol$ ، وبنقل هذه القيمة في البيان نجد : $\boxed{t_{1/2} \approx 87s}$

7/ تعيين السرعة الحجمية للتفاعل في اللحظة $t = 180s$

نعلم أن السرعة الحجمية للتفاعل تعطى بالعبارة :

$v = \frac{1}{V'} \times \frac{dx}{dt} = (t = 180s)$ ميل مماس المنحني في اللحظة

نختار نقطتين A و B ، ثم نعين إحداثيي كل منهما :

$A(t_A = 100s\ ;\ x_A = 2,6mmol)$ ، $B(t_B = 250s\ ;\ x_B = 4mmol)$

و $V' = $ حجم المحلول $= 200mL$

$$v = \frac{1}{V'} \times \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{1}{200 \times 10^{-3}} \frac{(4-2,6)}{250-100} \times 10^{-3} = 4,67 \times 10^{-5}$$

$$\boxed{v = 4,67 \times 10^{-5}\ mol.L^{-1}.s^{-1}}$$

8/ تعيين حجم غاز ثنائي الهيدروجين V_{H_2} عند اللحظة $180s$

نجد من البيان في اللحظة $t = 180s$ أن $X = 3,3mmol$

وحسب جدول التقدم لدينا $X = n_{H_2} = n_{Mg^{2+}}$

إذن $n_{H_2} = 3,3mmol$

وبما أن H_2 غاز، فلتعيين حجمه نستعمل العلاقة $n_{H_2} = \frac{V_{H_2}}{V_m}$

حيث V_m الحجم المولي في شروط التجربة وهو $V_m = 24\,L.mol^{-1}$

إذن : $V_{H_2} = n_{H_2} V_m$

$V_{H_2} = 3,3 \times 10^{-3} \times 24$ ، $\boxed{V_{(H_2)} \cong 7,9.10^{-2}\,L}$

حساب $[Mg^{2+}]$

$$[Mg^{2+}] = \frac{n_{[Mg^{2+}]}}{V'} = \frac{3,3 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-1}}\ ;\ \boxed{[Mg^{+}] = 1,65 \times 10^{-2}\,mol.L^{-1}}$$

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

الحمد لله وحده و بعد :

اريدها مقدمة ليست كالمقدمات ولذلك اقول : لو اتبعنا تاريخ تطور العلوم الفيزيائية، لوجد نا أن الطريقة التي اتبعها العلماء فيها كانت بسيطة وفعالة، بدءا بالواح ابن سينا ووصولا إلى تجارب غاليله، التي بدأ بها العلم أول دورته، وضغط على زر تشغيل آلة الفيزياء العظيمة.

يقول اينشتاين في ذلك : (التجربة هي لب اختراع غاليله). فغاليله لما أدرك ذلك اعتمد التجربة أسلوبا ومنهاجا، وكذلك فعل من بعده العلماء.

فالإنسان اكتشف اول ما اكتشف الظواهر الميكانيكية والفلكية والضوئية. علمها، فهمها، حاكاها، ومن ثم أوجد قوانينها، قبل أن تذ هله الظواهر الكهرومغناطيسية والنووية. فأولى الظواهر الفيزيائية كانت بادية للعيان، التقطتها حواس الناس، فكانت عين اليقين للإنسانية منذ فجر التاريخ. أما آخرها فقد اكتشفت إما بالصدفة (تجربة أرستد، التحريض الكهرومغناطيسي لفارادي، أو التحولات النووية على يد بكريل)، أو بتطور وسائل البحث فكانت علم اليقين.

وعليه فإن من وجهة نظر الإبستومولوجيا، ينبغي أن يؤخذ بهذا التدرج في بناء منهاج العلوم الفيزيائية اليوم وغدا. فالمنهاج الذي لا يراعي، ولا يتدرج كما تدرج العلماء في فهمهم للظواهر الفيزيائية والكيميائية هو منهاج ميت فاقد للذاكرة، ولا تغرنك ديباجته، وإن كانت منمقة بكلمات كبيرة في الفيزياء، فهي رطانة سمجة. والمنهاج الذي يكرس في الامتحانات الرسمية طريقة استرداد المعلومات كان التلميذ قرص مدمج، أو وعاء مستطرق، لن يفلح به النشء، ولن يتحقق معه الرجاء. ذلك أنه يجعل منه أذن صاغية وفقط، تعمل بالنظام القسري، لا قلب نابض يعمل بالنظام الحر المغذى. وهنا مكمن الد اء وبؤرة الخطر والفصل بين الأقطاب والأصفار.

في كتابنا Z زاد العلوم الفيزيائية، أردنا ان نكسب الرهان، فسعينا ان نعمل بالنظام الحر المغذى، ولا مناص من ذلك، فنحن جادون في اخذ قصب السباق. لذلك ارتأينا أن نسرد حكاية الفيزياء من بد ايتها، حكاية العلماء الذ ين كرسوا حياتهم لحل لغزها الكبير، وفي ذلك خاضوا كفاحا مضنيا، شاقا، اتسم بروعة الأداء والصبر ومجابهة المعارضين والمشككين. ونعلم ما للقصص من أثر في النفوس.

حاولنا أن نضع لبنة أولى لنرتقي بالنشء، بتوفيق من الله وحده، فيصل إلى زر تشغيل آلة الفيزياء.

لا ندعي في ذلك علما، إنما اجتهادا لا غير، فهو ديدننا في كل يوم. ولا نضع همتنا فوق همم الناس، إنما نريد أن نستنهض الهمم، من اجلك ياوطني.. يا صاح غيرنا قد وصل... فأين الهمام ؟ ... أين ؟

الأستاذ أبو إسلام الحسين مصطفى صالح.

المجال 1 ♦ التطورات الرتيبة

الوحدة 2 دراسة تحولات نووية

1- النشاط الإشعاعي

1 - 1 - تاريخ

تاثر اللوح بالأشعة النووية

بكريل

◄ في 26 فيفري من عام 1896م لاحظ الفيزيائي الفرنسي (هنري بكريل) بمحض الصدفة أن قطعة من أملاح اليورانيوم كان قد وضعها بجوار لوح فوتوغرافي حساس (*cliché*) مغلف بعدة أوراق سوداء (حتى لا يتأثر بالأشعة الضوئية)، ووضع المجموع داخل درج مغلق. فلاحظ أن اللوح قد تاثر باملاح اليورانيوم تماما كما تؤثر الأشعة الضوئية عليه. كرر هذه التجربة عدة مرات فخرج بالنتائج التالية :

قطعة من الروبيديوم المشع

- اليورانيوم يُصدر إشعاعا بصورة تلقائية (بدليل أنه أثر على اللوح الفوتوغرافي).
- الإشعاع الصادر من اليورانيوم ذو قدرة نفاذ واختراق كبيرة (بدليل أنه اخترق الأوراق السوداء، ووصل إلى اللوح الفوتوغرافي، مع العلم بأن ضوء الشمس لا يمكنه اختراق الورق الأسود).
- تسمى هذه الظاهرة (ظاهرة النشاط الإشعاعي) (*la radioactivité*).

◄ بعد هذا الاكتشاف العظيم تمكنت (ماري سكلودفسكايا-كوري) وزوجها (بيار-كوري) بين سنتي 1898م و1899م من الحصول على مادتين أكثر إشعاعية من اليورانيوم هما: البولونيوم (Po) والراديوم (Ra).

◄ في سنة 1903م تمّ منح جائزة نوبل في الفيزياء لكل من بكريل، ماري وبيار، تكريما لأعمالهم في النشاط الإشعاعي الطبيعي .

◄ أما في سنة 1934م فقد تم اكتشاف النشاط الإشعاعي الصناعي من قبل (فردريك جوليو) وزوجه (إيرين كوري جوليو)، ومُنحا على إثره جائزة نوبل في الفيزياء لسنة 1935م.

1 - 2 - ماهية النشاط الإشعاعي الطبيعي

رونتجن

◄ أثار اكتشاف النشاط الإشعاعي الطبيعي، الذي يصدر بصورة تلقائية من اليورانيوم أو الراديوم.... أسئلة كثيرة وعجب العلماء لهذا الإشعاع ،

- من أين يأتي ؟ أمن إلكترونات الذرات مثل أشعة رونتجن أم من الأشعة المهبطية، أم من أنوية الذرات ؟
- ومن أي شيء يصنع ؟ وكيف يمكن إنتاجه ؟ وهل يحدث تغييرا في المواد التي تطلق إشعاعا ؟

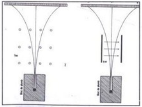
انبرى علماء كثيرون للإجابة عن هذه الأسئلة بتجارب غاية في الدقة وكانت نتائجها كالتالي :

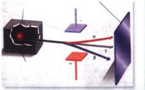
- أكد العالم (بكريل) أن **النشاط الإشعاعي لا يتعلق بالحالة الفيزيائية أو الكيميائية للمادة المشعة** . فإذا غيّرنا أحد العوامل الفيزيائية التالية: الضغط، درجة الحرارة، أو حالة المادة (سائلة، صلبة أو غازية) تبقى المادة المشعة هي هي، دون تغير نشاطها الإشعاعي، كما أن الحالة الكيميائية للمادة المشعة لا تغير من طبيعتها الإشعاعية مهما كان نوع المادة المرتبطة كيميائيا بالمادة المشعة، وعليه فإن **النشاط الإشعاعي لا يتعلق بالتركيب الإلكتروني وبالتالي الكيميائي للمادة المشعة** .
- أما العالم (رذرفورد) فقد تأكد ابتداءً من سنة 1897م أن الإشعاع النووي يتألف من أكثر من نوع.

أحدها أقل نفوذا سمي أشعته **أشعة ألفا (α)** والثاني أكثر نفوذا سمي أشعته **أشعة بيتا (β)**.

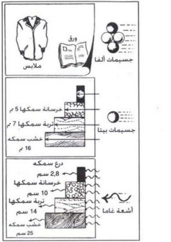
- في سنة 1899م وجد عدة علماء، من بينهم (بكريل) نفسه، أن أشعة (β) يمكن أن تنحرف في حقل مغناطيسي، وأن نسبة شحنتها إلى كتلتها $\frac{q_\beta}{m_\beta}=\frac{e^-}{m_e}$ التي اكتشفها (تومسون) سنة 1897م. لذا فهي جسيمات تشبه تماما الإلكترونات، لذا اصطلح عليها برمز (β^-). إذن **جسيمات β^- هي إلكترونات** .
- أما (ماري كوري) فقد أكدت – من خصائص الامتصاص – أن أشعة α هي جسيمات مادية.
- وفي عام 1903م نجح رذرفورد في حرف جسيمات α في حقل مغناطيسي، وأشارت جهة الانحراف إلى أنها جسيمات ذات شحنة موجبة، وبيّن أن شحنتها ($q_\alpha=+2|e^-|$) وأن كتلتها ($m_\alpha \approx 7000m_e$) أي أن ($m_\alpha \approx 4m_H$). واستنتج عندها أن : **جسيم α ما هو إلا نواة الهيليوم He^{++}** .
- في سنة 1900م بيّن العالم الفيزيائي الفرنسي ($Villard$) وجود نوع ثالث من الإشعاعات هو **إشعاع غاما (γ)، وهو إشعاع مماثل للأشعة الضوئية، لكنه ذو نفاذية عظيمة في المواد، وهو غير مشحون، بدليل أنه لا ينحرف في حقل مغناطيسي.**

بناءً على ما سبق نقول : إنه عند تحريض الإشعاع الصادر من المواد المشعة بحقل مغناطيسي $\vec{B}$ أو حقل كهربائي $\vec{E}$ فإنه يترك ثلاثة آثار في اللوح الفوتوغرافي المحمض، أي أنه ينحرف إلى ثلاث حزم.





1 – 3 – بطاقة هوية للإشعاعات



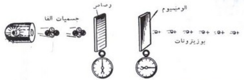
الاسم : جسيم α
الشحنة : $q_\alpha=+2|e^-|$
الكتلة السكونية : $m_\alpha=7000m_e$
العلامات الخصوصية
• ذو تماسك كبير
• ذو نفاذية ضعيفة في المواد
الرمز النووي : ${}_2^4He^{++}$

الاسم : جسيم β^-
الشحنة : $q_\beta=e^-$
الكتلة السكونية : $m_\beta=m_{e^-}$
العلامات الخصوصية
• ذو نفاذية كبيرة في المواد
الرمز النووي : ${}_{-1}^{0}e$

الاسم : إشعاع γ
الشحنة منعدمة : $q_\gamma=0$
الكتلة السكونية منعدمة : $m_\gamma=0$
العلامات الخصوصية : ذو نفاذية خارقة للمواد
الرمز النووي : ${}_0^0\gamma$

1 – 4 – النشاط الإشعاعي الصناعي

- في 11 جانفي من سنة 1934م تمّ اكتشاف النشاط الإشعاعي الصناعي من قبل العالمين الفرنسيين (فرديريك جوليو) وزوجته (إيرين كوري)، إذ قذفا صفيحة الألنيوم (Al) بجسيمات α صادرة من عنصر مشع هو البولونيوم (Po). وعندما أوقفا القذف بدا لهما وكان صفيحة (Al) أصبحت مشعة، وبدأت تصدر جسيمات من نوع جديد تسمى **البوزيترونات (Positrons)**، وهي جسيمات لها نفس كتلة الإلكترون (m_e) ونفس قيمة الشحنة الكهربائية، لكنها موجبة (ومن هنا يأتي مصطلح بوزيترون ، لأن الشحنة موجبة)، لذا أعطي لها الرمز (β^+).
- فالألنيوم في البداية لم يكن مشعا، وبعد قذفه بجسيمات α تحوّل الجزء المقذوف منه إلى عنصر مشع. وعلى إثر هذا الاكتشاف العظيم تم منحهما جائزة نوبل للفيزياء سنة 1935م.



الاسم : جسيم β^+

الشحنة : $q_{\beta^+} = +|e^-|$

الكتلة السكونية : $m_{\beta^+} \approx m_{e^-}$

العلامات الخصوصية

- يسمى ضديد الإلكترون
- ذو نفاذية كبيرة في المواد

الرمز النووي : ${}^{0}_{+1}e$

1 - 5 - نتائج

ما هو النشاط الإشعاعي ؟ وما هي طبيعته وخصائصه ؟

- النشاط الإشعاعي هو الإصدار التلقائي والمستمر للجسيمات α، β^+، β^- وإشعاع γ.
- العينات التي تحدث النشاط الإشعاعي تسمى **للنابع المشعة (أو العناصر المشعة)** مثل اليورانيوم (U) والراديوم (Ra) والبولونيوم (Po).
- النشاط الإشعاعي هو ظاهرة نووية بحتة، لا علاقة لها بالبنية الإلكترونية للعنصر المشع، أو بالارتباط الكيميائي له مع بقية العناصر.
- النشاط الإشعاعي لا يتعلق بالحالة الفيزيائية للمواد المشعة، ولا يتغير بتغير الحالة الفيزيائية، من غازية وصلبة وسائلة.

ما هي أنواع الجسيمات والإشعاع الصادر عن العناصر المشعة ؟

هي أربعة :

- التفكك الفا (α) : هو إصدار جسيمات، كل جسيم هو نواة الهيليوم ${}^{4}_{2}He^{++}$، ويسمى جسيم α.
- التفكك بيتا (β^-) : هو إصدار إلكترونات $({}^{0}_{-1}e)$ سريعة.
- التفكك بيتا (β^+) : هو إصدار بوزيترونات $({}^{0}_{+1}e)$.
- الإصدار غاما (إشعاع γ) : هو إصدار فوتونات $({}^{0}_{0}\gamma)$، وهي إشعاعات كهرومغناطيسية لكنها ذات طاقة عالية.

ملاحظة

- العناصر المشعة طبيعيا تحدث التفككين (α) و(β^-) وتصدر إشعاع (γ).
- العناصر المشعة صناعيا تحدث التفكك (β^+).

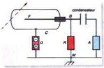
كيف يمكن الكشف عن ظواهر النشاط الإشعاعي ؟

توجد عدة طرائق للكشف عن ظاهرة النشاط الإشعاعي هي :

عدّاد جيجر - مولر

(Compteur Geiger-Muller)

مبدأ عمله بسيط (انظر الشكل المرفق)، يطبق توترا كهربائيا بين السلك المعدني والأنبوب الأسطواني المملوء بغاز (الهواء مثلا).



فإذا وجدت مادة مشعة بجوار الأنبوب، فإن إشعاعها يؤين الهواء الموجود في الأنبوب فيحدث تفريغ كهربائي بين C وF، وينتج عنه تيار يمر عبر الدارة C، F، B، M، C، وبالتالي يحدث تغير في التوتر الكهربائي U_{BM} فيمر عبر الضخم A، ومن ثم نحو مكبر الصوت، فيسمع طقطقة، أو يمر عبر عدّاد الإشارات.

غرفة التاين

تشبه في مبدأ عملها عداد جيجر إلا انها مزودة بكاشف كهربائي مشحون (بالموجب مثلا)، فإذا مر الإشعاع من أنبوب غرفة التاين، فانه يؤين الهواء، فتنتج الكترونات يجذبها الكاشف الكهربائي، وبالتالي يحدث له تفريغ كهربائي، فنشاهد اقتراب الرقاقتين من بعضهما.

غرفة ويلسون

تملؤ الغرفة بهواء مشبع ببخار الماء، فإذا مر الإشعاع النووي يتاين الهواء، وتنتج عنه حرارة تكفي لتكثف بخار الماء، في كل نقطة من فضاء الغرفة، يمر بها الإشعاع مما يجعله يترك أثرا ماديا (قطيرات الماء) في كل مساره.

2- النواة ـ الاستقرار وعدم الاستقرار

2 – 1 – النواة

2-1-1- بنية النواة

تتالف نواة الذرة من النويات أو النكليونات (*les nucléons*).

◀ ما هي النويات ؟

◁ النويات نوعان من الجسيمات وهما :

البروتون (P) : جسيم نووي اكتشفه العالم (رذرفورد) سنة 1919م له بطاقة الهوية التالية :

رمزه : P

شحنته موجبة : $q=+e=+1,6\times10^{-19}\,c$

كتلته السكونية :

$m_p=1,6726\times10^{-27}kg$ أو $m_p=1836m_e$

قطره # $1,8\times10^{-14}cm$

النترون (n) : جسيم نووي اكتشفه العالم الإنجليزي (جيمس شادويك) سنة 1932م وبطاقة هويته :

رمزه : n

شحنته متعادلة كهربائيا : $q_n=0\,c$

كتلته : $m_n=1,6749\times10^{-27}kg$

قطره # $1,5\times10^{-13}cm$

السير جيمس شادويك
(1891-1974)

2-1-2- رمز النواة

برمز لنواة اي عنصر كيميائي (X) بالرمز

$${}^{A}_{Z}X$$

عدد النويات ← A

عدد البروتونات ← Z

Z = عدد البروتونات، ويسمى أيضا العدد الشحني أو العدد الذري.

A = العدد الكتلي = عدد النويات = عدد البروتونات (Z) + عدد النترونات (N).

$$A=Z+N$$

مثال : نواة اليورانيوم المخصب (U) تحتوي على 92 بروتونا و143 نترونا.

إذن : $Z=92$ و$N=143$

ومنه: $A=Z+N=143+92$ ، إذن : $A=235$

ولذا يكون رمزنواة اليورانيوم المخصب هو: ${}^{A}_{Z}U$ أي ${}^{235}_{92}U$.

2-1-3- النظائر (Isotopes)

كل الأنوية التي لها نفس عدد البروتونات (Z) ومختلفة في عدد النترونات (N) تسمى نظائر، وهذا بناء على اقتراح من العالم استون.

◀ **أمثلة :** نظائر اليورانيوم (U) هي : ${}^{234}_{92}U$ ، ${}^{235}_{92}U$ ، ${}^{238}_{92}U$ . .

نظائر الهيدروجين (H) هي : ${}^{1}_{1}H$ ، ${}^{2}_{1}H$ ، ${}^{3}_{1}H$.

◀ **ملاحظات**

• العنصر الكيميائي (X) هو خليط من النظائر، وبنسب مئوية مختلفة، وعليه فإن نظائر العنصر الكيميائي الواحد تحتل نفس المكان (*isotopes*) في الجدول الدوري، ولهذا السبب أطلق العالم آستون (*Aston*) المصطلح اليوناني (*isotopos*)، اي نفس المكان لنظائر العنصر الواحد، فمثلا: عنصر اليورانيوم (U) يوجد في الطبيعة على شكل 3 نظائر هي :

${}^{238}_{92}U$ بنسبة مئوية بعدد الذرات تساوي (99,275%)

${}^{235}_{92}U$ بنسبة مئوية بعدد الذرات تساوي (0,720%)

${}^{234}_{92}U$ بنسبة مئوية بعدد الذرات تساوي (0,0056%)

عنصر الكربون (C) يتالف من : ${}^{12}_{6}C$ (98,89%) و${}^{13}_{6}C$ (1,11%) وبعض آثار الكربون المشع (${}^{14}_{6}C$).

عنصر الهيدروجين (H) يتالف من البروتيوم ${}^{1}_{1}H$ (99,985%) والديتيريوم ${}^{2}_{1}H$ (0,015%) وبعض آثار التريتيوم (${}^{3}_{1}H$).

الرمز النووي لبعض الجسيمات تحت الذرية (*particules subatomiques*)

جسيم α : هو نواة الهيليوم التي تحتوي على 2 بروتون و2 نترون، لذا ياتي رمزه النووي كما يلي: (${}^{4}_{2}He$).

جسيم β^- أو الإلكترون (e^-) : بناء على اقتراح من العالم صودي ($Soddy$) يعطى له الرمز النووي (${}^{0}_{-1}e$).

جسيم β^+ أو البوزيترون (e^+) وهو ضديد الإلكترون : رمزه النووي هو (${}^{0}_{+1}e$).

إشعاع γ: رمزه النووي (${}^{0}_{0}\gamma$)، اي : شحنته $Z=0$ وكتلته $A=0$.

النوترينو ν: رمزه النووي (${}^{0}_{0}\nu$)، اي : شحنته $Z=0$ وكتلته $A=0$.

ضديد النوترينو $\overline{\nu}$: رمزه النووي (${}^{0}_{0}\overline{\nu}$)

2 – 2 – استقرار وعدم استقرار النواة

2-2-1- تأثير القوة النووية القوية في استقرار النواة

◀ كيف تفسر استقرار أغلبية أنوية العناصر الموجودة في الطبيعة من الهيدروجين (H) إلى اليورانيوم (U) ؟

◀ وكيف تفسر عدم استقرار بعض الأنوية، سواء التي يحدث لها نشاط إشعاعي طبيعي أو صناعي ؟

نفسر ذلك بالمقاربة الفيزيائية التالية :

من المعلوم أن قوى التنافر الكهربائية (الكولومبية) بين البروتونات في النواة والمشحونة بشحنة كهربائية موجبة تساهم في عدم استقرار النواة. غير اننا نجد في الطبيعة ان أغلبية العناصر مستقرة ومتماسكة. وهذا

يؤدي بنا إلى القول بانه توجد قوة أخرى ذات تأثير جاذب، تمنع تنافر البروتونات داخل النواة، إذن فهي التي تضمن بقاء النواة متماسكة. هذه القوة تسمى **القوة النووية القوية**.

نلخص فنقول إن استقرار النواة من عدمه يعتمد على نوعين من القوى هما :

1/ قوة التنافر الكهربائي (القوة الكولومبية)

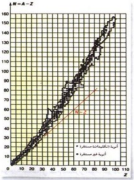
- مسؤولة عن التنافرالكهربائي بين البروتونات داخل النواة.
- نوع تأثيرها : تنافري.
- مدى تأثيرها : كبير جدا (يقال لانهائي) ، بمعنى أن كل البروتونات مهما كانت بعيدة بعضها عن بعض تتأثر بالتنافر الكهربائي فيما بينها.
- شدتها : تعطى بقانون كولوم، وهي أضعف من شدة القوة النووية القوية بكثير.

2/ القوة النووية القوية

- مسؤولة عن تماسك البروتونات.
- نوع تأثيرها : تجاذبي بمعنى أن البروتون يحدث تجاذبا مع بروتون آخر بفضل هذه القوة النووية داخل النواة، كما يحدث تجاذب بين (p) و(n) وأيضا بين (n) و(n).
- مدى تأثيرها : قصير، أي على مستوى النواة فقط، أي في حدود $(10^{-15}m)$.
- شدتها : كبيرة بحيث تعتبر أكبر القوى الأساسية الأربع في الطبيعة.

تتميز القوة النووية بخاصية التشبع (*saturation*) التي تتمثل في أن النوية (بروتون أو نترون) لا تؤثر إلا في العدد المحدود من النويات المجاورة لها مباشرة، ولا يصل تأثيرها إلى النويات البعيدة عنها.

2-2-2- تأثير عدد البروتونات (Z) وعدد النترونات (N) في استقرار أو عدم استقرار النواة



المخطط (N,Z)

تم تحديد الأنوية المستقرة من عدمها في مخطط (N,Z) بدلالة (N,Z) ندعوه المخطط (N,Z)، وهو الموضح في الشكل المقابل.

تعليق على المخطط (N,Z)

- العناصر المستقرة ممثلة بنقاط سوداء، لا تشكل خطا منحنيا بل تشكل منطقة ندعوها منطقة الاستقرار *zone de stabilité*

تفسير استقرار الأنوية الخفيفة التي لها $Z<20$

نلاحظ أن منطقة الاستقرار في حالة $Z<20$ تقع بجوار المستقيم المنصف $N \approx Z$ ، وفي هذه الحالة يتحقق :

عدد البروتونات = عدد النترونات .

نستنتج أنه إذا تحقق $N \approx Z$ فإن النواة تكون مستقرة وهذا معناه أن النواة متماسكة، وهذا ما يؤدي بنا إلى القول إن كل الأنوية التي لها $Z<20$ وتنتمي إلى منطقة الاستقرار تكون فيها القوة النووية القوية أكبر بكثير من القوة الكولونية، الأمر الذي يؤدي إلى استقرارها.

مثال1 : بيّن أن نواة الكربون $^{12}_{6}C$ مستقرة.

نلاحظ هنا أن $N=Z=6$ فالنواة إذن مستقرة.

مثال2 : بيّن أن نواة $^{35}_{17}Cl$ مستقرة.

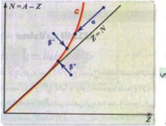
هنا : $Z=17$ و$N=35-17$ إذن : $N=18$ فنلاحظ أن $N=Z+1$ أي $N \approx Z$ بتقريب 1 فالنواة مستقرة.

تفسير استقرار الأنوية المتوسطة $20<Z<82$

كل الأنوية المستقرة والتي تنتمي إلى المجال $20<Z<82$ تتميز بأن عدد بروتوناتها قد زاد، وبالتالي تزداد معه قوة التنافر الكهربائي، بينما يُرَجّحُ - من جهة أخرى - نقصان القوة النووية القوية الجاذبة، لأنه بازدياد عدد النويات (البروتونات والنترونات) يزداد حجم النواة، فيزداد ابتعاد النويات عن بعضها، لأن القوة النووية تخضع - كما أسلفنا - لخاصية التشبع، فتصبح النويات البعيدة غير متأثرة ببعضها البعض. وهكذا يبدو أن شدة القوة النووية القوية أصبحت أضعف من شدة القوة الكولومبية، مما يسبب عدم استقرار النواة. إلا أن هذا لم يحدث، فكيف نفسر استقرار هذه الأنوية ؟

إذا نظرنا من جديد إلى الأنوية $20<Z<82$ نلاحظ أن فيها : عدد النترونات (N) أكبر من عدد البروتونات (Z) أي $(Z<N)$ ، وهذا العدد الزائد من النترونات يعمل على تخفيف الشحنة الكهربائية الموجبة مما يجعل القوة النووية القوية أكبر شدة من قوة التنافر الكولومبية، وبهذا نفسر استقرار الأنوية.

مثال : نواة الرصاص (206) أي $^{206}_{82}Pb$ هي نواة جد مستقرة لأن $\frac{N}{Z}=\frac{206-82}{82}$ ومنه $\frac{N}{Z} \approx 1,54$ أي $(N>1,54Z)$، فالنواة مستقرة.



تفسير عدم استقرار الأنوية الثقيلة $Z>82$

بزيادة عدد البروتونات Z تصبح قوة التنافر الكولومبي أكبر من القوة النووية القوية، وهذا مهما زاد عدد النترونات N على عدد البروتونات، وهكذا تصبح النواة غير مستقرة.

لذا نقول إن أغلب الأنوية التي لها $Z>82$ هي أنوية لعناصر مشعة.

مثال : نواة $^{238}_{92}U$ هي نواة غير مستقرة إذ يحدث لها تفكك (α) فهي نواة لعنصر مشع، ونفسر ذلك كما يلي : $Z=92$ إذن $Z>82$ ومنه فالنواة $^{238}_{92}U$ غير مستقرة.

توقع نوع التفكك للأنوية غير المستقرة

كيف نتوقع التفكك β^- ؟

كل الأنوية الغنية بالنترونات (مقارنة مع الأنوية المستقرة) نتوقع أن يحدث لها تفكك (β^-).

فينقص عدد نتروناتها ويزداد عدد بروتوناتها، وبالتالي يحدث لها تركيب (بروتوني-نتروني) مشابه لتركيب الأنوية المستقرة.

مثال : ($^{14}_{6}C$) هي نواة مشعة يحدث لها تفكك β^- ، فكيف نفسر ذلك ؟

لاحظ أن $^{14}_{6}C$ تحتوي على $Z=6$ و $N=8$ فهي غنية بالنترونات مقارنة مع النواة $^{12}_{6}C$ المستقرة التي لها $N=6$.

وعندما يحدث لها التفكك β^- ينقص عدد نتروناتها، فتتحول إلى نواة مستقرة، كما يلي :

$$^{14}_{6}C \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{14}_{7}N$$

فالنواة $^{14}_{7}N$ هي نواة مستقرة (لاحظ أن $Z=7$ و $N=14-7$ إذن $N=7$ ومنه $N=Z$).

إذا نظرنا إلى المخطط (Z,N) نجد أن التفكك β^- يحدث للعناصر المشعة التي تقع إلى يسار منطقة الاستقرار (انظر الشكل المرفق).

- كيف نتوقع التفكك β^+ ؟

كل الأنوية الغنية بالبروتونات (مقارنة مع الأنوية المستقرة) نتوقع أن يحدث لها تفكك (β^+).

فينقص عدد بروتوناتها ويزداد عدد نتروناتها، وبالتالي يحدث لها تركيب (بروتوني-نتروني) مشابه لتركيب الأنوية المستقرة.

إذا نظرنا إلى المخطط (N,Z) نجد أن التفكك (β^+) يحدث للعناصر المشعة الصناعية التي تقع إلى يمين منطقة الاستقرار. (انظر الشكل المرفق).

مثال : النواة $^{12}_{7}N$ تتميز بأن $Z=7$ و $N=5$ فهي إذن غنية بالبروتونات مقارنة مع النواة المستقرة، لذا نتوقع أن يحدث لها التفكك β^+، وعندها تتحول إلى نواة مستقرة كما يلي : $^{12}_{7}N \rightarrow {}^{0}_{+1}e + {}^{12}_{6}C$

- كيف نتوقع التفكك α ؟

كل الأنوية التي لها $Z>82$ (أو $A>200$) نتوقع أن يحدث لها التفكك α.

3- معادلات التفكك

3 – 1 – أنواع التفكك

قدّم رذرفورد سنة 1903م تفسيرا مدهشا للنشاط الإشعاعي، إذ أكد أن نواة العنصر المشع عندما تصدر جسيما (α) أو (β) غالبا ما يكون مصحوبا بإشعاع (γ)، تتحول من نواة إلى نواة أخرى مختلفة تماما، مثل نواة الراديوم (Ra) التي تنتمي إلى مادة صلبة تتحول إلى نواة الرادون (Rn) الغازي، بعدما يحدث لها تفكك (α) وتصدر إشعاعا (γ).

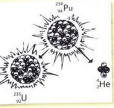
إذن فهل نحن إزاء تحويل العناصر بعضها إلى بعض، الذي طالما حلم به السيميائيون (الكيميائيون الأوائل) ؟

... نعم.

- التفكك α

التفكك α هو إصدار جسيمات، كل جسيم يشبه نواة الهيليوم ($^{4}_{2}He$) أي يحتوي على 2 بروتون و2 نترون.

معادلة التفكك هي : $^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{A-4}_{Z-2}Y$

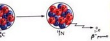


مثال : $^{239}_{94}Pu \rightarrow {}^{235}_{92}U + {}^{4}_{2}He$

- التفكك β^-

التفكك β^- هو إصدار إلكترونات سريعة ($^{0}_{-1}e$) من النواة.

معادلة التفكك هي : $^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}_{Z+1}^{A}Y + {}^{0}_{0}\overline{\nu}$



$^{0}_{0}\overline{\nu}$ هو ضديد النوترينو.

مثال : $^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\overline{\nu}$

كيف يمكن للنواة إصدار إلكترون ؟ وهل هذا يعني أن النواة تحتوي على إلكترونات ؟

كلا، فالنواة لا تحتوي على إلكترونات.

إذن، من أين أتى هذا الإلكترون ($^{0}_{-1}e$) الذي أصدرته النواة ؟

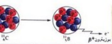
لقد تبين أن في النواة يتحول نترون إلى بروتون وإلكترون وضديد النترينو $^{0}_{0}\overline{\nu}$ كما يلي :

$$n \rightarrow {}^{1}_{1}p + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\overline{\nu}$$

- التفكك β^+

التفكك β^+ هو إصدار بوزيترونات سريعة ($^{0}_{+1}e$) من النواة.

معادلة التفكك هي : $^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{0}_{+1}e + {}_{Z-1}^{A}Y + {}^{0}_{0}\nu$



$^{0}_{0}\nu$ هو النترينو.

مثال : $^{14}_{6}C \rightarrow {}^{11}_{5}B + {}^{0}_{+1}e + {}^{0}_{0}\nu$

كيف يمكن للنواة إصدار بوزيترون ؟ وهل هذا يعني أن النواة تحتوي على بوزيترون ($^{0}_{+1}e$) ؟

كلا، فلقد تحول بروتون داخل النواة إلى نترون وبوزيترون ونوترينو $^{0}_{0}\nu$ كما يلي :

$$p \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{0}_{+1}e + {}^{0}_{0}\nu$$

الإصدار γ

إن النواة الناتجة عن احد التفككين (α) و (β) (والتي تسمى نواة بنتا) يمكن ان تكون في حالة "إثارة" (*état excité*)، كان تكون لها طاقة إضافية زائدة على المستوى الأساسي لطاقتها العادية، فإنها تفقد هذه الطاقة الزائدة على شكل إشعاع كهرومغناطيسي يسمى "إشعاع γ" طول موجته صغير جدا (في حدود $\lambda_\gamma = 10^{-12}m$)، وبالتالي فإن طاقته كبيرة جدا. وبفقد هذا الإشعاع، تعود النواة المثارة إلى المستوى الأساسي لطاقتها.

يعبر عن النواة المثارة بالرمز ${}^{A}_{Z}X^*$ (بوضع العلامة *)، وعن النواة في حالتها الأساسية بالرمز ${}^{A}_{Z}X$ (بدون علامة).

$${}^{A}_{Z}X^* \rightarrow {}^{A}_{Z}X + \gamma$$

3 – 2 – قانونا الانحفاظ (قانونا صودي للانحفاظ)

قانون انحفاظ الشحنة الكهربائية (Z)

شحنة الأنوية قبل التفكك (Z) = شحنة الأنوية بعد التفكك (Z') ،

$Z=Z'$

قانون انحفاظ عدد النويات (قانون انحفاظ العدد الكتلي A)

عدد النويات قبل التفكك (A) = عدد النويات بعد التفكك (A') ،

$A=A'$

مثال : التحقق من انحفاظ (Z)

$${}_{94}Pu \longrightarrow {}_{92}U + {}_{2}He$$

$Z=94 \qquad Z'=92+2=94$

إذن ، $Z=Z'=94$

التحقق من انحفاظ (A)

$${}^{239}Pu \longrightarrow {}^{235}U + {}^{4}He$$

$A=239 \qquad A'=235+4=239$

إذن ، $A=A'=239$

4 – التناقص في النشاط الإشعاعي

وجد رذرفورد أن المادة المشعة وهي تتفكك يقل نشاطها، فمثلا إذا كانت قطعة من مادة مشعة تطلق بداية 1000 جسيم (α أو β^- أو β^+) في الثانية الواحدة، فمن باب الاحتمال، تطلق بعد مدة قصيرة (dt) 900 جسيم فقط في الثانية، وبعد فترة أطول لا بد أن تطلق عددا أقل من الجسيمات... وهكذا. ولا بد أن يجيء الوقت الذي تصبح المادة المشعة فيه قادرة على إطلاق 500 جسيم في الثانية فقط، أي نصف العدد الذي كان يمكنها إطلاقه في أول الأمر (بداية القياس).

4 – 1 – النشاط الإشعاعي A(t)

تعريف

النشاط الإشعاعي لعينة من الأنوية المشعة في لحظة زمنية (t) هو عدد التفككات (A) التي تحدث لها في وحدة الزمن (أي في 1 ثانية).

- في مثالنا السابق يكون النشاط الابتدائي للمادة المشعة A_0 يساوي 1000 تفكك في الثانية ،

$A_0 = 1000\ désintégrations/sec$

- بعد مدة يكون النشاط نقص إلى النصف أي ، $\frac{A_0}{2} = 500$ تفكك في الثانية ،

$\frac{A_0}{2} = 500\ désintégrations/sec$

اعطى رذرفورد اسم "نصف العمر $t_{\frac{1}{2}}$" (او عمر النصف) (*demi vie*) للوقت الذي ينخفض فيه نشاط المادة المشعة إلى النصف.

هذه الفترة من الزمن أي ($t_{\frac{1}{2}}$) تختلف من مادة مشعة إلى أخرى. فبعض المواد تتفكك ببطء شديد وينخفض نشاطها ببطء شديد أيضا، لذلك فإن "نصف عمرها" يكون طويلا جدا.

مثال : $t_{\frac{1}{2}}$ لليورانيوم هو 4500 مليون سنة أي ، $t_{\frac{1}{2}} = 4,5.10^9\ a$

$t_{\frac{1}{2}}$ للراديوم هو 1560 سنة أي ، $t_{\frac{1}{2}} = 1,56.10^3\ a$

4 – 2 – قانون تناقص النشاط الإشعاعي

في دراستنا السابقة بيّنا أن كل نواة يورانيوم 238 يحدث لها التفكك (α). لكن، هل فعلا كل الأنوية لعينة من (${}^{238}_{92}U$) يحدث لها التفكك α ؟

كلا ! ...

ولإيضاح ذلك، نورد التجربة التالية.

باستعمال عداد جيجر، تم إحصاء عدد التفككات (α) لعينة من (${}^{238}_{92}U$) كتلتها 1g فوجد أنه يحدث لها 15000 تفككا فقط في 1 ثانية، رغم ان 1g يحتوي على $\frac{1}{238}\times 6,023\times 10^{23}$ نواة، اي على $2,5.10^{21}$ نواة، وبالتالي لو حدث لكل نواة منها تفكك (α) لأحصينا $2,5.10^{21}$ تفكك في الثانية، إلا أننا لم نحص غير 15000 تفكك. فنستنتج أن التفكك (α) لا يحدث لجميع أنوية العينة، فالتفكك قد يحدث لهذه النواة أو تلك، بدون تحديد، وبشكل عشوائي.

نستنتج أن التفكك النووي هو ظاهرة تلقائية عشوائية،

إحصائية تطبق عليها قوانين الإحصاء والاحتمالات.

الدراسة الإحصائية

إن احتمال تفكك نواة واحدة في 1ثا من العينة السابقة نرمز له بالرمز (λ) ونحسبه من المثال السابق كالتالي ،

$$\lambda = \frac{15000}{2,5.10^{21}} = 6.10^{-18}$$

وهذا الاحتمال متساو لكل نواة من أنوية العينة.

بشكل عام ، نفترض أن احتمال تفكك نواة واحدة في 1ثا هو ، $\lambda = \lambda \times 1$

وبالتالي فاحتمال تفكك نواة واحدة في 2ثا هو : $\lambda'=\lambda\times 2$

واحتمال تفكك نواة واحدة في زمن صغير (dt) هو : λdt

واحتمال تفكك (N) نواة واحدة في زمن (dt) هو : $N\lambda dt$

إذن : عدد الأنوية المتفككة في زمن dt يساوي $N\lambda dt$ (*)

من جهة أخرى، نفترض أن N_0 هو عدد الأنوية المشعة في بداية الزمن $(t=0s)$ (بداية القياس)،
إذن في اللحظة (t) يتناقص عددها فيصبح مساويا (N)،
وفي اللحظة $(t+dt)$ يكون عددها $(N+dN)$.
نستنتج أن عدد الأنوية المتفككة في اللحظة (dt) المحصورة بين اللحظتين $(t+dt)$ و (t) هو :

$$N-(N+dN)=-dN$$

إذن : عدد الأنوية المتفككة في زمن dt يساوي $-dN$ (**)

بالمطابقة بين (*) و(**) نجد : $N\lambda dt = -dN$

ومنه : $\boxed{\frac{dN}{dt}=-\lambda N}$ (***)

ان المقدار $\frac{dN}{dt}$ يعبر عن مشتق الدالة $N(t)$ بالنسبة إلى الزمن أي $N'(t)$، لذا نكتب للسهولة :

$$N'(t)=\frac{dN(t)}{dt}$$

ومنه نجد : $\boxed{N'(t)=-\lambda N(t)}$

لاحظ أن هذه المعادلة فيها المتغير $N(t)$ والمشتق الأول $N'(t)$ لنفس المتغير، فهي من الشكل الرياضياتي :
$\boxed{Y'=-aY}$ أو $\boxed{Y'+aY=0}$

لذا يقال عنها إنها معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى (لوجود المشتق الأول) وبدون طرف ثان.

فكيف نجد حلا لهذه المعادلة ؟

نقوم بالمقاربة الرياضياتية التالية :

ندعو الدالة $Y=be^{-ax}$ الدالة الأسية.

لاحظ أنه عندما يكون $x=0$ فإن $Y=b$

مشتق هذه الدالة هو $Y'=-abe^{-ax}$

أي $Y'=-aY$

إن حل المعادلة التفاضلية $Y'=-aY$ هو الدالة الأسية $Y=be^{-ax}$

ومنه نستنتج أن حل المعادلة التفاضلية $N'(t)=-\lambda N(t)$ هو الدالة $N=ae^{-\lambda t}$

وإذا اعتبرنا أن في اللحظة $(t=0)$ كان عدد الأنوية هو (N_0) فإن : $N_0=a$; $N_0=ae^{-\lambda(0)}$

ومنه نجد : $\boxed{N=N_0e^{-\lambda t}}$ وهو قانون تناقص النشاط الإشعاعي.

قانون تناقص النشاط الإشعاعي

$$N=N_0e^{-\lambda t}$$

N_0 : عدد أنوية العنصر المشع في اللحظة الابتدائية $(t=0)$

N : عدد الأنوية المتبقية بعد التفكك في اللحظة (t)

λ : احتمال تفكك نواة واحدة في ثانية واحدة، ويسمى أيضا ثابت الإشعاعية (أو ثابت التفكك)، ويبين سرعة التفكك.

« بيان قانون التناقص الإشعاعي $N=f(t)$ (موضح بالشكل المقابل)

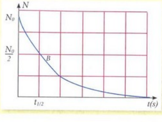
« فترة نصف العمر $t_{\frac{1}{2}}$

تعريف

فترة نصف العمر هي الزمن الذي يستغرقه العنصر المشع لكي يتفكك نصف العدد الابتدائي $\frac{N_0}{2}$ لأنويته.

أي من اجل $t=t_{\frac{1}{2}}$ تتفكك $\frac{N_0}{2}$ نواة.

و N_0 هو العدد الابتدائي (في بداية القياس) لأنوية العنصر المشع.



عبارته : نعوض بـ $t=t_{\frac{1}{2}}$ و $N=\frac{N_0}{2}$ في قانون التناقص فنجد :

$$\frac{N_0}{2}=N_0e^{-\lambda t_{1/2}} \; ; \; \frac{1}{2}=e^{-\lambda t_{1/2}}$$

$$-\lambda t_{\frac{1}{2}}=ln(\frac{1}{2})$$

$$-\lambda t_{\frac{1}{2}}=ln1-ln2$$

$$-\lambda t_{\frac{1}{2}}=0-ln2$$

في الأخير، عبارة نصف العمر هي : $\boxed{t_{\frac{1}{2}}=\frac{ln2}{\lambda}}$

« النشاط الإشعاعي (A) لعنصر مشع

تعريف

النشاط الإشعاعي لعنصر مشع هو عدد التفككات التي تحدث له في ثانية واحدة.

عبارته : بناء على التعريف السابق، نكتب : $A=\left|\frac{\Delta N}{\Delta t}\right|$

وفي زمن صغير نكتب: $A=\left|\frac{dN}{dt}\right|$

وحسب العبارة (***) السابقة، يكون: $\left|\frac{dN}{dt}\right| = -\lambda N$

إذن: $\boxed{A=\lambda N}$ وهي عبارة النشاط الإشعاعي في لحظة (t) للعنصر المشع، وفي اللحظة $(t=0s)$ يكون النشاط الإشعاعي الابتدائي: $\boxed{A_0 = \lambda N_0}$

نتيجة

النشاط الإشعاعي يتناسب طردا مع عدد الأنوية المتفككة.

وحدة النشاط الإشعاعي هي البيكريل (Bq)، $\frac{1}{1}\frac{\text{تفكك}}{\text{ثانية}}=1Bq$

بما أن $A=\lambda N$ و $N=N_0 e^{-\lambda t}$ فإن $A=\lambda N_0 e^{-\lambda t}$

إذن: $\boxed{A=A_0 e^{-\lambda t}}$ وهذه العبارة تثبت أن النشاط الإشعاعي هو في تناقص أسي مع الزمن.

العمر المتوسط لنواة (أو ثابت الزمن) (τ) *La vie moyenne*

إن التفكك يمكن أن يحدد عمر كل نواة، غير أننا نعلم أن بعض الأنوية، وإن كانت من نفس النوع، يمكن أن تستغرق مدة أطول في التفكك، فنقول إنها تعيش أكثر من غيرها، ومن ثم فلا يجب البتة التكلم عن عمر نواة بعينها، بل نتكلم عن متوسط العمر، لجميع الأنوية التي يحدث لها نفس التفكك. لذا **فإن الزمن المتوسط لحياة نواة مشعة يسمى العمر المتوسط (أو ثابت الزمن) (τ).**

- يعين τ نظريا من متوسط أعمار الأنوية، عندما يتناقص عددها من N_0 إلى (0).

إذن: $\tau = \dfrac{\text{مجموع أعمار الذرات من } (N_0) \text{ إلى } (0)}{\text{عدد الأنوية } (N_0)}$

ويمكن أن نبرهن نظريا أن: $\boxed{\tau = \frac{1}{\lambda}}$

τ: هو أيضا الزمن اللازم لتبقى $(\frac{N_0}{e})$ نواة مشعة من عدد ابتدائي (N_0) من الأنوية المشعة.

أي أنه في اللحظة $(t=0)$ لدينا $(N=N_0)$

وفي اللحظة $(t=\tau)$ يكون لدينا $(N=\frac{N_0}{e})$ نواة غير متفككة.

كيف نتأكد من ذلك ؟

نعوض عن $t=\tau=\frac{1}{\lambda}$ في قانون تناقص النشاط الإشعاعي فنجد: $N=N_0 e^{-\lambda\tau}$

إذن: $N=N_0 e^{-\lambda(\frac{1}{\lambda})}$

ومنه: $N=N_0 e^{-1}$

أي: $\boxed{N=\frac{N_0}{e}\approx 0,368N_0}$ وهو ما نريد الحصول عليه.

لاحظ أن: $\frac{1}{e}=\frac{1}{2,718}=0,368$

كيفية تعيين الثوابت (λ) و$(t_{\frac{1}{2}})$ و(τ) بيانيا

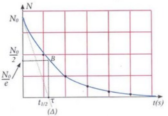
تعيين $(t_{\frac{1}{2}})$: نعين $(\frac{N_0}{2})$ ونمددها فتقطع المنحنى البياني في النقطة (B). ثم نعين فاصلة النقطة (B) فنجد $(t_{\frac{1}{2}})$.

تعيين (τ): نرسم مماسا (Δ) للمنحنى في اللحظة $(t=0)$ ونمدده فيتقاطع مع المحور (t) في نقطة فاصلتها هي (τ).

تعيين (λ): عندما نعين (τ) نستطيع تعيين (λ).

ملاحظة هامة: يمكن أن نتأكد من أن (τ) يعين من ميل المماس (Δ) كما يلي:

$\Delta_{\text{ميل}}=\frac{dN}{dt}$ (في اللحظة $t=0$)



إذن: $\Delta_{\text{ميل}}=\frac{dN}{dt}=-\lambda N_0$

$\Delta_{\text{ميل}}=\frac{0-N_0}{\tau-0}=-\frac{N_0}{\tau}$

بالفعل: $-\lambda N_0=-\frac{N_0}{\tau}$

إذن: $\lambda=\frac{1}{\tau}$

ومنه: $\boxed{\tau=\frac{1}{\lambda}}$ وهو تعريف (τ).

تطبيق النشاط الإشعاعي في مجال التاريخ

- تحديد عمر الأجسام

يستخدم الكربون 14 لتحديد عمر الأجسام القديمة التي استخدمها الإنسان القديم، لذا تسمى هذه الطريقة طريقة تحديد العمر الثقافي *(l'antropologie)*.

- تحديد عمر الأرض

يستخدم الراديوم واليورانيوم لتحديد عمر الأرض أو العمر الجيولوجي *(air géologique)*.

- تقنية التأثر أو اقتفاء الأثر *(traceurs radioactifs)*

في الميدان الطبي : بعض المواد المشعة مثل ($^{131}_{53}I$) عندما يحقن في الإنسان يتجمع في الغدة الدرقية، فإذا كان المريض مصابا بمرض (ورمي) فيها فإن اليود المشع يعمل على تخريب الخلايا المريضة بها، وبما أن له نصف عمر $t_{\frac{1}{2}}=8d$ اي (8 ايام) فإن اليود المشع يختفي تماما من الجسم بعد مدة.

2- التفاعلات النووية المفتعلة

2 – 1 – التحول الاصطناعي للنوى الذرية

قام رذرفورد سنة 1919م بقذف النتروجين ($^{14}_{7}N$) بجسيمات α داخل جهاز يسمى سبنثارسكوب ($spinthariscope$)، فظهرت له في شاشته توهجات ناصعة من أثر الجسيمات المتكونة، وافترض أن البريق تسببه جسيمات صادرة عن نوى النتروجين، وأكدت البحوث التي أجراها أن هذه الجسيمات (انظر الشكل في ص 35) المنطلقة هي بروتونات ($^{1}_{1}p$) ولم تكن معروفة قبل ذلك، كما تم أيضا الحصول على أنوية الأكسيجين ($^{17}_{8}O$). انظر جهاز سبنثارسكوب في آخر الصفحة 35.

- كيف يمكن تفسير الحصول على الأنوية ($^{17}_{8}O$) انطلاقا من ($^{14}_{7}N$) ؟

استطاع رذرفورد أن يفسر هذا التحول الصناعي للأنوية بعضها إلى بعض، كما يلي :

$$\boxed{\alpha + {}^{14}_{7}N \longrightarrow {}^{1}_{1}p + {}^{17}_{8}O}$$

سميت هذه الظاهرة بالتفاعل النووي، وفتح رذرفورد الباب واسعا إلى إمكانية اصطناع تفاعلات نووية.

- النشاط الإشعاعي الصناعي

قام كل من فردريك وإيرين جوليو-كوري سنة 1934م بقذف معدن الألومنيوم (Al) بجسيمات α صادرة عن (Po) فلاحظا وجود جسيمات هي بوزيترونات ($^{0}_{+1}e$) تنبعث مع النترونات ($^{1}_{0}n$) من صفيحة (Al). وعندما أوقفا عملية قذف (Al) بجسيمات α أو عندما وضعا حاجزا من الرصاص بين صفيحة Al ومنبع جسيمات α ، توقف إصدار النترونات، لكن إصدار البوزيترونات ($^{0}_{+1}e$) يستمر مما يدل على أن مادة جديدة ظهرت وهي التي تصدر جسيمات β^+ (أي البوزيترونات). فالألومنيوم (Al) لا يصدر هذه الجسيمات في الحالة الطبيعية.

فاستنتجا أن المادة التي ظهرت هي مادة مشعة تصدر جسيمات β^+. وبهذه التجربة تم الحصول لأول مرة على النشاط الإشعاعي الصناعي، واستحق بذلك كل من فردريك وإيرين جائزة نوبل للفيزياء سنة 1935م.

- تفسير التجربة

عند قذف ($^{27}_{13}Al$) بجسيمات α ($^{4}_{2}He$) نحصل على الفوسفور ($^{30}_{15}P$) ونترون ($^{1}_{0}n$) حسب التفاعل النووي التالي : ${}^{4}_{2}He + {}^{27}_{13}Al \longrightarrow {}^{30}_{15}P + {}^{1}_{0}n$

والفوسفور الناتج يصدر بدوره جسيمات β^+ أي ($^{0}_{+1}e$) حسب التفكك التالي (التفاعل النووي) :

$${}^{30}_{15}P \longrightarrow {}^{0}_{+1}e + {}^{30}_{14}Si$$

2 – 3 – قانونا الانحفاظ في التفاعلات النووية

إن التفاعلات النووية، سواء منها المستحدثة أو الطبيعية الناتجة عن التفككات α ، β^+ ، γ ، تخضع لقانوني الانحفاظ.

1- قانون انحفاظ الشحنة الكهربائية

مجموع الشحنات الكهربائية النووية للأنوية المتفاعلة = مجموع الشحنات الكهربائية النووية للأنوية الناتجة

$$\sum Z(\text{المتفاعلات}) = \sum Z(\text{النواتج})$$

2- قانون انحفاظ عدد النويات

عدد النويات المتفاعلة = عدد النويات الناتجة

$$\sum A(\text{المتفاعلات}) = \sum A(\text{النواتج})$$

3- الانشطار النووي والاندماج النووي

3-1- علاقة اينشتاين

تكافؤ الطاقة والمادة

إن المادة والطاقة متكافئتان، فالمادة يمكن تحويلها إلى طاقة، والطاقة يمكن تحويلها إلى مادة.

علاقة اينشتاين : في سنة 1905م أعلن اينشتاين عن علاقته الشهيرة بالقول :

كل مادة كتلتها m إذا تحولت إلى طاقة فإنها تعطي طاقة كتلية (E) ($énergie\ de\ masse$) تعطى بالعلاقة : $E=mC^2$

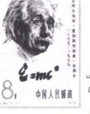
m : كتلة الجسم (kg)
C : سرعة الجسم في الخلاء ($célérité$) ، $C\approx3.10^8m/s$
E : الطاقة الكتلية (J)

- **مثال :** أعط المكافئ الطاقوي (طاقة الكتلة) لمادة كتلتها ($m=1g$).

حسب علاقة اينشتاين : $E=mC^2$

نكتب : $E=1.10^{-3}(3.10^8)^2$ ، إذن : $\boxed{E=3.10^{13}J}$

وهي طاقة كبيرة مقارنة بالطاقة التي تنتج عن طريق التفاعلات الكيميائية.



3-2- النقص الكتلي (Δm) Défaut de masse

وحدة الكتلة الذرية (u)

- إن الجسيمات مثل الإلكترون (e) أو البروتون (p) أو النترون (n) أو حتى النواة ($^{A}_{Z}X$) لها كتل صغيرة من رتبة ($10^{-24}g$)، ولتفادي التعامل مع العدد (10^{-24}) تم اختيار وحدة جديدة هي وحدة الكتل الذرية (u) التي نجد فيها كتل الأجسام السابقة من رتبة ($1u$)، وهذا المقدار يمكن التعامل معه بسهولة كبيرة.

وحدة الكتل الذرية u هي $\frac{1}{12}$ من كتلة ذرة الكربون 12.

نعلم أن كتلة 1مول من ($^{12}_{6}C$) $= 12g$

و1مول $\xrightarrow{\text{يحتوي على}}$ عدد افوغادرو $\mathcal{N}$ من الذرات (مع ، $\mathcal{N}=6,02.10^{23}$)

لنبحث عن الكتلة (m) لذرة واحدة من $({}^{12}_{6}C)$ ، $12g \longrightarrow \mathcal{N}$

$m \longrightarrow$ 1ذرة

$$m=\frac{1\times 12}{\mathcal{N}}$$

لكن ، $1u=\frac{m}{12}$ ، إذن ، $1u=\frac{\frac{1\times 12}{\mathcal{N}}}{12}$ ، $\boxed{1u=\frac{1}{\mathcal{N}}\ (grammes)}$

$$1u=\frac{1}{6,0221.10^{23}}=1,66054.10^{-24}\,g$$

$$\boxed{1u=1,66054.10^{-27}kg}$$

وعليه، يمكن حساب كتلة البروتون والنترون والإلكترون بوحدة الكتل الذرية (u).

$$m_p=1,67262.10^{-27}\,kg=\frac{1,67262.10^{-27}}{1,66054.10^{-27}}\ ;\ \boxed{m_p=1,00728\ u}$$

$$m_n=1,67493.10^{-27}\,kg=\frac{1,67493.10^{-27}}{1,66054.10^{-27}}\ ;\ \boxed{m_n=1,00866\ u}$$

$$m_e=9,10939.10^{-31}\,kg=\frac{9,10939.10^{-31}}{1,66054.10^{-27}}\ ;\ \boxed{m_e=0,00055\ u}$$

النواة أكثر

نلخص هذه النتائج في الجدول التالي :

الجسيم	$m(kg)$	$m(u)$
${}^{0}_{-1}e$	$9,10939.10^{-31}$	0,00055
${}^{1}_{1}p$	$1,67262.10^{-27}$	1,00728
${}^{1}_{0}n$	$1,67493.10^{-27}$	1,00866

النقص الكتلي (Δm)

- تم قياس كتل الذرات باستعمال مطيافية الكتل (*spectrographe de masse*) على يد العالم أستون (*Aston*) سنة 1919م، ووضعت في جدول خاص نأخذ منه كتلة نواة الهيليوم $({}^{4}_{2}He)$ فنجد القيمة $4,0015\ u$.

$$\boxed{m({}^{4}_{2}He)=4,0015\ u}$$

- ومعلوم أن نواة الهيليوم تتألف من $(2p)$ و$(2n)$.

لنحسب مجموع كتل هذه النويات وهي متفرقة بعضها عن بعض (*séparés*) (لا مجتمعة في النواة) ،

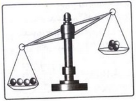
$$m_{\text{نويات}}=2m_p+2m_n$$

$$m_{\text{نويات}}=2(1,00728)+2(1,00866)\ ;\ \boxed{m_{\text{نويات}}=4,0320}$$

لو نقارن كتلة نواة الهيليوم $m({}^{4}_{2}He)$ بكتلة نوياتها متفرقة $(m_{\text{نويات}})$ سنجد أن ، $\boxed{m_{\text{نويات}}>m_{\text{نواة}}}$

نتيجة :
- كتلة أي نواة أصغر دوما من مجموع كتل مكوناتها (نوياتها) وهي متفرقة.
- وإذا تشكلت نواة ما من مكوناتها فإنه يحدث نقص في الكتلة.
- النقص الكتلي (Δm) هو فرق الكتلة بين النواة ومكوناتها (النويات)، أي ،

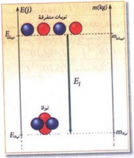
$$\boxed{\Delta m=m_{\text{نويات}}-m_{\text{نواة}}}$$



- أين اختفت الكتلة الناقصة ؟ وكيف نفسر كون كتلة النواة أقل من كتلة مكوناتها ؟
- لقد بينت التجارب أن نواة الهيليوم ذات استقرار كبير، بمعنى أن نوياتها (مكوناتها) وهي $(2p)$ و$(2n)$ مرتبطة ببعضها داخل النواة ارتباطا كبيرا. فما السبب في ذلك يا ترى ؟
- أثبتت الدراسة أن النقص الكتلي (Δm) بين النواة ومكوناتها يتحول إلى طاقة، وهذه الطاقة هي التي تجعل النواة متماسكة ومستقرة، إذ تربط بين مكوناتها داخل النواة، فسميت طاقة الربط النووي (E_l).

النواة أكثر استقرارا من نوياتها إذا أخذت بصفة منفردة، وسبب ذلك يعود إلى طاقة الربط النووي.

3-3- طاقة الربط النووي (E_l)



كل نواة تحتوي على ، $\left|\begin{matrix} Z \text{ بروتون} \\ N \text{ نترون}\end{matrix}\right.$ مع ، $N=A-Z$

- **عبارة النقص الكتلي (Δm)**

لدينا ، $\Delta m=m_{\text{نويات}}-m_{\text{نواة}}$ ، مع ،

$$\boxed{m_{\text{نواة}}=m({}^{A}_{Z}X)}$$

$m_{\text{نويات}}=$ كتلة البروتونات + كتلة النترونات

لكن ، $Zm_p=$ عدد البروتونات × كتلة البروتون الواحد

$Nm_n=$ عدد النترونات × كتلة النترون الواحد

$$m_{\text{نويات}}=Zm_p+Nm_n$$

$$\boxed{m_{\text{نويات}}=Zm_p+(A-Z)m_n}$$

ومنه تكون عبارة النقص الكتلي (Δm) كالتالي :

$$\boxed{\Delta m = Zm_p + (A-Z)m_n - m({}^{A}_{Z}X)}$$

عبارة طاقة الربط النووي (E_l)

حسب علاقة اينشتاين فإن الكتلة (Δm) التي تعبر عن النقص الكتلي تكافئ طاقة هي (E_l) بحيث :

$$E_l = \Delta m C^2$$

إذن :
$$\boxed{E_l = [\, Zm_p + (A-Z)m_n - m({}^{A}_{Z}X)\,]C^2}$$

مثال : احسب طاقة الربط النووي لنواة الهيليوم (${}^{4}_{2}He^{++}$).

نعلم ان $E_l = \Delta m C^2$ حيث (Δm) النقص الكتلي، وقد حسبناه سابقا فوجدنا القيمة :

$$\Delta m = 4{,}0320\ u - 4{,}0015\ u$$
$$\Delta m = 0{,}0305\ u = 0{,}0305 \times 1{,}66.10^{-27}\ kg = 5{,}063.10^{-29} kg$$

نستعمل علاقة اينشتاين : $E_l({}^{4}_{2}He) = \Delta m C^2$

إذن : $E_l({}^{4}_{2}He) = 5{,}063.10^{-29} \times (3.10^8)^2 = 4{,}5567.10^{-12}\ J$

نحول إلى الـ (ev) : نعلم ان : $1ev = 1{,}6.10^{-19}\ J$

إذن : $E_l({}^{4}_{2}He) = \dfrac{4{,}5567.10^{-12}}{1{,}6.10^{-19}}$

$$\boxed{E_l({}^{4}_{2}He) = 2{,}85.10^7 ev = 28{,}5\ Mev}$$

وحدات جديدة للطاقة

في الفيزياء النووية، عادة ما نستعمل للطاقة وحدة هي الإلكترون فولط (ev) والميغا إلكترون فولط (Mev) :

- الإلكترون فولط : $\boxed{1ev = 1{,}6.10^{-19}\ J}$
- الميغا إلكترون فولط : $\boxed{1Mev = 10^6 ev = 1{,}6.10^{-13}\ J}$
- أيضا في الفيزياء النووية وحدة الكتل الذرية (u) عادة ما نحولها إلى طاقة كتلية، كما يلي : بضربها في مربع سرعة الضوء (C^2) وقسمتها على (C^2) :

$$1u = \frac{1u}{C^2}C^2 = \frac{1{,}66.10^{-27}(3.10^8)^2}{C^2} = \frac{1{,}494.10^{-10}\ J}{C^2} = \frac{1{,}494.10^{-10}}{1{,}6.10^{-13}.C^2}$$

$$\boxed{1u \approx 931{,}5\ Mev/C^2}$$

3-4- طاقة الربط لكل نوية (E_l/A)

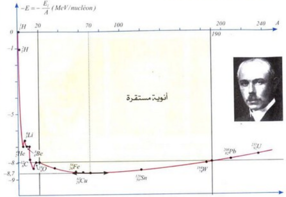
إذا كانت طاقة ربط نواة ما هي (E_l) وكان عدد نوياتها (A) فإن هذه الطاقة تتوزع على جميع النويات، بشكل متساو تقريبا، بحيث يعطى نصيب كل نوية المتوسط من الطاقة بالعبارة :

$$\boxed{\frac{E_l}{A} = \frac{\text{طاقة ربط النواة}}{\text{عدد نوياتها}}}$$

مثال : احسب طاقة الربط لكل نوية من نويات الهيليوم (${}^{4}_{2}He$).

$$\frac{E_l({}^{4}_{2}He)}{A} = \frac{28{,}5}{4} = 7{,}12\ Mev$$

3-5- منحني استون *Courbe d'Aston*



إن منحني أستون يعطي طاقة الربط لكل نوية (E_l/A) بدلالة العدد الكتلي (A) (عدد النويات)، وهذا بالنسبة لجميع الأنوية الموجودة في الطبيعة.

الأنوية الخفيفة ($A<20$)

من الهيدروجين الثقيل (${}^{2}_{1}H$) إلى النيون (${}^{20}_{10}Ne$).

نلاحظ ان (E_l/A) تزداد بازدياد (A) من القيمة ($1Mev$) إلى حوالي القيمة ($8Mev$).

الأنوية المتوسطة ($50<A<75$)

تتميز بأن لها طاقة ربط لكل نوية $E_l \approx 8{,}5\ Mev$ ، فهي ذات استقرار كبير.

الأنوية الثقيلة ($A>100$)

المنحني يتناقص ببطء، وجميع هذه الأنوية أقل استقرارا من الأنوية المتوسطة، وهنا تكمن الأهمية القصوى.

الملاحظة الأولى :

ماذا يحدث لو انشطرت نواة ثقيلة، كنواة اليورانيوم على سبيل المثال، إلى نواتين متوسطتين ($50<A<75$) ؟

لو حدث ذلك لكانت النواتان الناتجتان أكثر استقرارا من النواة الكبيرة المنشطرة، وهذا يؤدي إلى تحرر

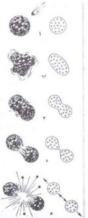
طاقة نووية. هذه العملية حدثت بالفعل، وقد اكتشفها العالمان الكيميائيان الألمانيان أوتوهان (*Otto Hann*) وستراسمان (*Strasmann*) في نوفمبر 1938م، وتأكدا منها سنة 1939م، بفضل العالمة الفيزيائية (ليز مايتنر) والتي سمت هذا التفاعل تشبيها بانشطار الخلايا : **الانشطار النووي لليورانيوم**. وقد تبين أن انشطار نواة واحدة من اليورانيوم ($^{235}_{92}U$) يحرر طاقة في حدود ($200Mev$).

بعض الأنوية الثقيلة ($A>190$) يمكن أن يحدث لها انشطار نووي، فتعطي نواتين تقعان في مجال الاستقرار لمنحني أستون.

ليز مايتنر (1878–1968) — هاهن — ستراسمان

الملاحظة الثانية :

إن الأنوية الخفيفة ($A<20$) تتغير فيها طاقة ربط كل نوية (E_l/A) بشكل كبير من ($1Mev$) لـ ($^{2}_{1}H$) إلى ($7Mev$) لـ ($^{4}_{2}He$)، كما هو موضح في منحني أستون مثلا. فنواة الهيليوم ($^{4}_{2}He$) أكثر استقرارا من نواة ($^{2}_{1}H$). وإذا استطعنا أن أن نشكل نواة هيليوم ($^{4}_{2}He$) انطلاقا من اندماج (*fusion*) نواتين من الديتيريوم ($^{2}_{1}H$)، فإن طاقة نووية كبيرة ستتحرر، لذا يسمى التفاعل النووي الحادث بين نواتي الديتيريوم **بتفاعل الاندماج النووي**.



بعض الأنوية الخفيفة ($A<20$) يمكن أن يحدث لها اندماج نووي، فتعطي نواة واحدة أكثر استقرارا من النواتين المندمجتين.

وهكذا، باستغلال منحني أستون يمكن أن نميز المناطق التي يحدث فيها انشطار نووي من تلك التي يحدث فيها اندماج نووي.

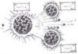
3-6- الانشطار النووي *La fission nucléaire*

الانشطار هو تفاعل نووي يحدثه نترون بطيئ عند قذفه على نواة ثقيلة انشطارية، تنتج نواتان متوسطتان وتتحرر بعض النترونات (من 2 إلى 3 نترونات) كما تتحرر طاقة كبيرة.

مثال : انشطار نواة اليورانيوم 235 حسب تفاعلي الانشطار التاليين :

$$^{1}_{0}n + ^{235}_{92}U \longrightarrow ^{85}_{35}Br + ^{148}_{57}La + 3^{1}_{0}n + \gamma + \text{طاقة}$$

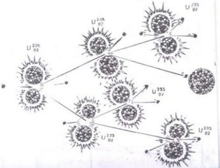
$$^{1}_{0}n + ^{235}_{92}U \longrightarrow ^{94}_{38}Sr + ^{140}_{54}Xe + 2^{1}_{0}n + \text{طاقة}$$



ملاحظات هامة

- ليس بإمكان جميع الأنوية الثقيلة إحداث انشطار نووي، وإنما بعضها فقط على أساس قيمة الطاقة (E_l/A) ووفرتها في الطبيعة.
- الأنوية التي تحدث انشطارا نوويا تسمى الأنوية الخصبة (*fertiles*).
- نواة اليورانيوم ($^{235}_{92}U$) هي نواة خصبة، وهي موجودة في الطبيعة بنسب عددية صغيرة (في حدود $0,7\%$). ونواة البلوتونيوم ($^{239}_{94}Pu$) أيضا هي نواة خصبة وتنتج في المفاعلات النووية.
- النترون السريع لا يحدث انشطارا نوويا، فهو يخترق النواة بكل سهولة. أما النترون البطيء جدا فهو يصطدم بالنواة، ويرتد عنها (ينعكس عليها). أما النترون البطيء (أو المسمى الحراري الذي له طاقة في حدود $\frac{1}{40}\,ev$) فهو الذي يحدث الانشطار النووي.
- إن النترونات المحررة من الانشطار النووي بإمكانها مهاجمة أنوية يورانيوم ($^{235}_{92}U$) خصبة، فتنشطر هذه الأخيرة، محررة بدورها نترونات أخرى، وهذه النترونات تهاجم أنوية أخرى ($^{235}_{92}U$)، لنحصل على تفاعل نووي متسلسل (*réaction en chaine*)، كما هو موضح بالشكل المقابل، وتنتج عن ذلك طاقة عظيمة.
- تسمح المفاعلات النووية (*réacteurs nucléaires*) بالتحكم في الطاقة النووية المتحررة من التفاعل التسلسل. وكان أول من نجح في تحقيق تفاعل نووي متسلسل يتحكم فيه هو العالم الإيطالي أنريكو فارمي في ديسمبر 1942م بالولايات المتحدة الأمريكية.

أنريكو فيرمي



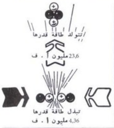
- أما في حالة القنبلة الذرية ($bombe\ A$) فيترك للتفاعل المتسلسل العنان في تحرير الطاقة، وبالتالي يحدث الانفجار العظيم الذي لا يبقي ولا يذر...

3-7- الاندماج النووي *La fusion nucléaire*

الاندماج هو تفاعل نووي تندمج فيه نواتان خفيفتان لتتشكل نواة أكبر منهما وتتحرر طاقة نووية كبيرة.

مثال : اندماج ديتيريوم (^2_1H) مع ديتيريوم (^2_1H) يعطي نواة الهيليوم (^4_2He) ؛

$$^2_1H + ^2_1H \longrightarrow ^4_2He$$



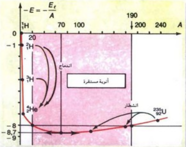
- **ملاحظة هامة :** إن تفاعل الاندماج يحتاج إلى درجة حرارة عالية في حدود (10^8k)، وهذا للتغلب على التنافر الكهربائي بين النواتين المندمجتين، لذا يسمى بالتفاعل النووي الحراري. تماما كما يحدث في مركز الشمس أو النجوم، حيث درجة الحرارة عظيمة، في حدود (3.10^7k)، والضغط كبير جدا. وهذا الوسط يسمى البلازما ($plasma$)، وهو الحالة الرابعة للمادة، فيه تكون المادة على شكل خليط من الإلكترونات والأنوية الخفيفة.

الحصيلة الطاقوية

كل تفاعل نووي يصحبه اكتساب أو تحرر طاقة، ففي تفاعلات الانشطار والاندماج النووية تعين الطاقة المتحررة بعلاقة اينشتاين : $\boxed{E = \left| \sum m(\text{المتفاعلات}) - \sum m(\text{النواتج}) \right| C^2}$ بحيث ؛

$\sum m(\text{المتفاعلات})$ = مجموع كتل الأنوية المتفاعلة

$\sum m(\text{النواتج})$ = مجموع ك تل الأنوية الناتجة.



زدني علما

أخطار الإشعاع النووي

إن تعرض الكائن الحي للإشعاع النووي يُحدث له أضرارا خطيرة ليس لها مثيلا. ان الاشعاع يسبب الموت أو الحروق اذا كان الشخص بالقرب من الخطر النووي أما اذا كان الشخص على بعد عشرات الكيلومترات فان الإشعاع يدخل الى الخلايا ويعمل على افساد عمل المورثات.

في الصناعة النووية، يتم عزل العاملين فيها من الاشعاعات النووية بواسطة جدران سميكة من الخرسانة أو من الفولاذ، أو من الرصاص

يزود كل عامل بمقياس يشبه القلم يسمى مقياس الجرعة

- إن تفاعل الإشعاع مع مادة الكائن الحي، ينتج عنه امتصاص طاقوي.و على حسب الطاقة التي تمتصها مادة الكائن الحي ، يحدد ما يعرف بالجرعة المتصة D ؛

الجرعة المتصة D = الطاقة التي يمتصها $1kg$ من مادة الكائن الحي

وحدة الجرعة D هي الغراي Gy .

$$1Gy=1j/kg$$

تختلف خطورة الجرعة D ، على حسب نوع الاشعاع

- وحدات مكافئة اخرى

rad- : $1Gy=100rad$

rem- : $1Gy=20rem$ (بالنسبة لجسيمات α)

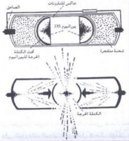
rad équivalent for man هي المكافئ الإشعاعي للأشخاص

الأخطار النووية الكبرى التي أحدثها الإنسان

في 28 مارس 1979 في أيسلندا بالولايات المتحدة الأمريكية

26 افريل1986 في تشرنوبيل بالإتحاد السوفيتي سابقا

القنبلة الذرية

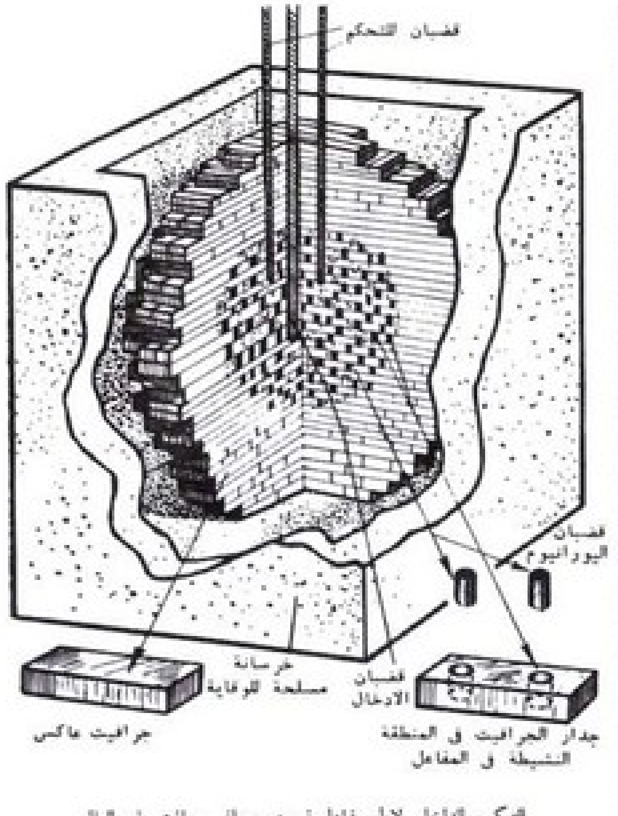


عند تحطم نواة الذرة تندفع شظاياها المتطايرة بسرعة عظيمة . و الطاقة الحركية لهذه الشظايا تتحول الى طاقة حرارية مكافئة يمكن استغلالها للخير في محطات توليد الطاقة أو للشر و الدمار في القنبلة الذرية

و لكي تتاح هذه الطاقة للاستغلال ينبغي إطلاق تفاعل متسلسل في مادة خصبةمثل اليورانيوم235 أوالبلوتونيوم239.

يحدث التفاعل المتسلسل حينما تصطدم النيترونات البطيئة بالأنوية الخصبة فتسبب انفلاقها .إلى شظايا ذات طاقة حركية عظيمة ونترونات تهاجم بدورها نوى

اخرى فتسبب انشطارها و هكذا دواليك . فيبدأ التفاعل المتسلسل، و تنطلق طاقة هاذ التفاعل النووي كله في جزء من الثانية محدثة انفجارا هائلا مدمرا.



التركيب الداخلي لاول مفاعل نووي يوراني جرافيتي في العالم .

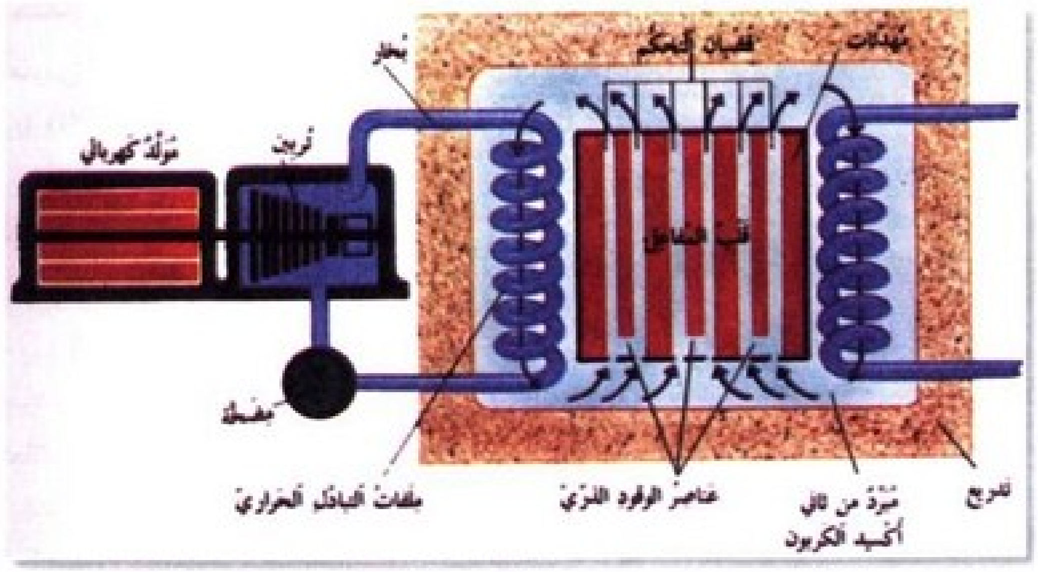
المفاعل النووي

امّا في المفاعل النووي فلا بدّ من اتخاذ ترتيبات تبطّئ من التفاعل التفجيري المدمّر الذي يحدث في القنبلة و يتمّ ذلك باستخدام مزيج من نظير اليورانيوم الانشطاري ونظيره الآخر الأكثر توافرا و الأشدّ استقرارا وهو اليورانيوم 238 .

وتحتوي اليورانيوم الطبيعي المعدّن من الأرض حوالي 7 في الألف فقط من ذرّات اليورانيوم 235 الانشطارية. وهذا يجعل اليورانيوم من اغلى المعادن قيمة ومن اشدّها مطلوبية .

ومن غير الممكن الحصول على تفاعل متسلسل من هذه الطبيعية المادّة ، لذا ينبغي زيادة النسبة المئوية لذرّات اليورانيوم 235 في اليورانيوم الطبيعي أو اضافة البلوتونيوم اليه. وتعرف هذه العملية بتخصيب اليورانيوم

- وتسمى المفاعلات التي تستخدم الوقود المزوّد بالنظائر الانشطارية بالمفاعلات السريعة .



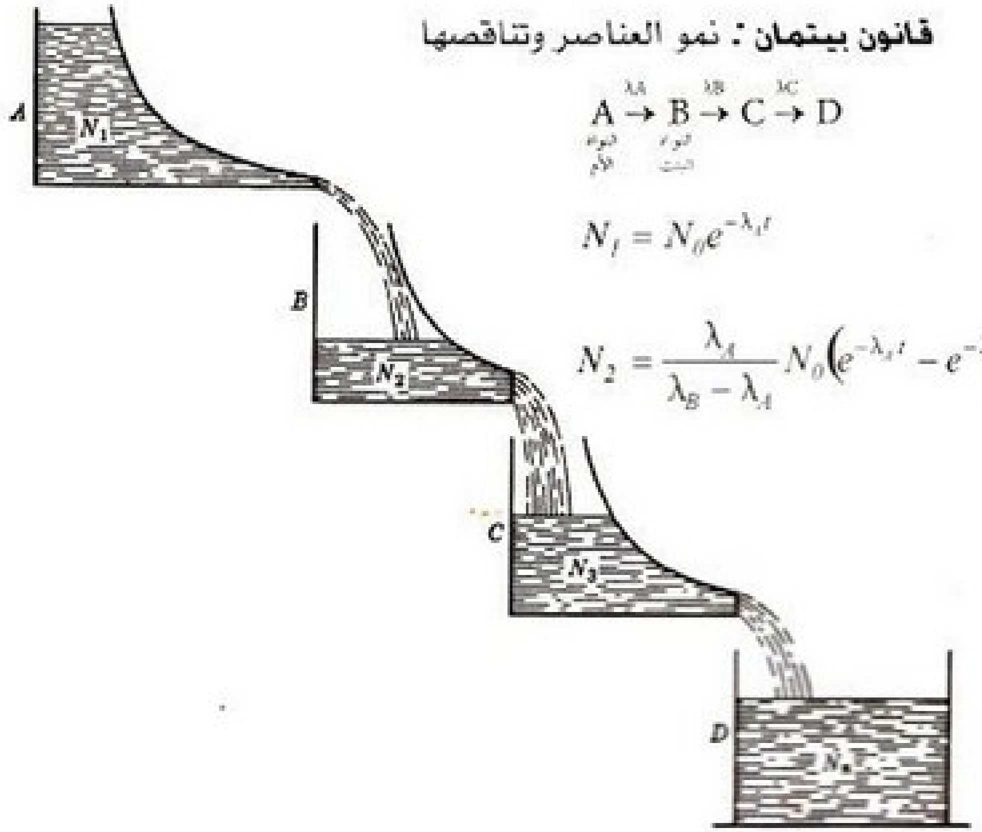
- ويستخدم في المفاعلات الحرارية مبدأ آخر يمزج الوقود الذري بمادة تسمى المهدّئ . وهي مادة متعادلة الشحنة وذات ذرّات خفيفة (كالغرافيت و الماء). تصطدم بها النترونات المنبعثة عن الانشطار . والمعروف ان النترونات سريعة كثيرا لذا تمتص عند ارتطامها بنظائر اليورانيوم 238 المستقرّة ، لكن ذلك لا ينطبق على النترونات البطيئة .ويعمل إدخال المهدّئ على تكثير النترونات البطيئة وهذا يتيح عددا أكبر منها

قانون بيتمان : نمو العناصر وتناقصها

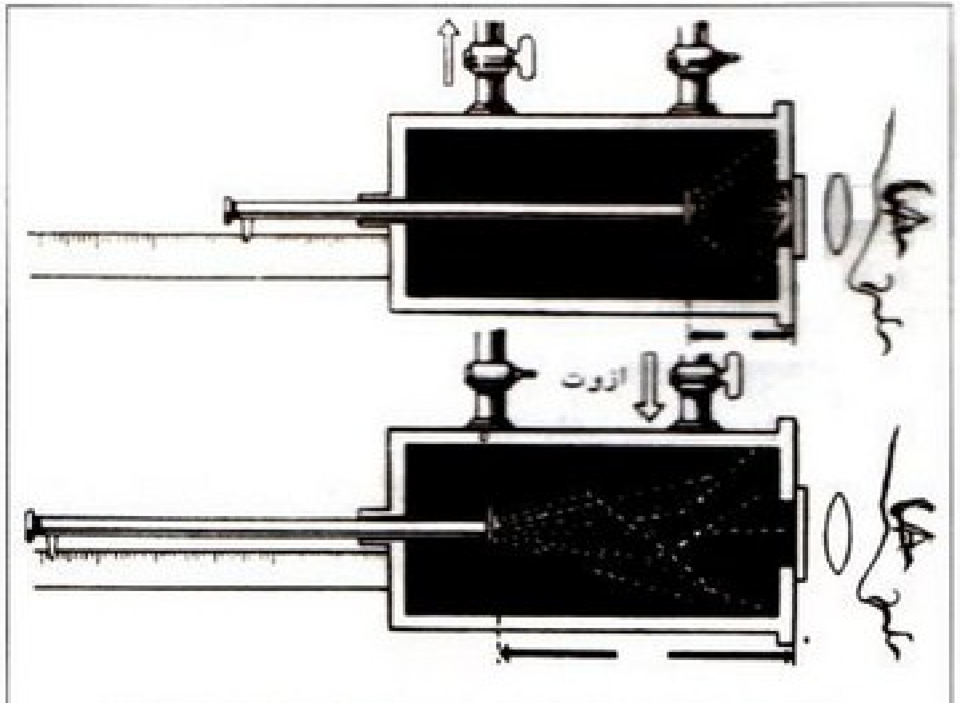
$$A \xrightarrow{\lambda_A} B \xrightarrow{\lambda_B} C \xrightarrow{\lambda_C} D$$

$$N_1 = N_0 e^{-\lambda_A t}$$

$$N_2 = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_0 \left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\right)$$

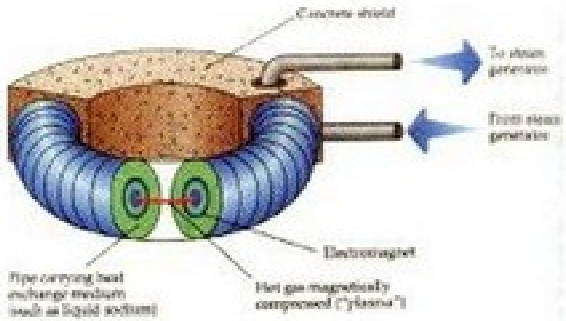


تشبيه مائي لنمو العناصر في سلسلة اشعاعية وتفككها



هكذا صمم اول « مدفع ذرى » ، استخدم في تجارب رزرفورد .

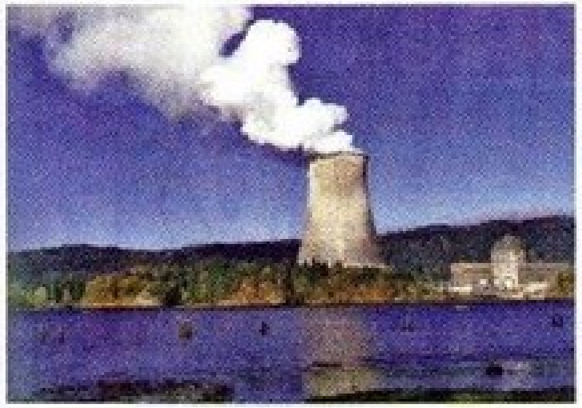
مفاعل تشرنوبيل بعد انفجاره في
26 أفريل 1986



البلازما النووية

منظر شامل
لمفاعل نووي

مدخنة مفاعل نووي



التحولات النووية

النموذج النووي

يرمز للنواة بالرّمز $\boxed{{}_{Z}^{A}X}$

Z ، عدد النويات

A ، عدد النويات = عدد البروتونات (Z) + عدد النترونات (N) ، $\boxed{A = Z + N}$

A ، يسمّى أيضا العدد الكتلي.

Z ، يسمّى أيضا العدد الذري.

النشاط الإشعاعي

- النشاط الإشعاعي هو الإصدار التلقائي المستمر للجسيمات α ، β^{+} ، β^{-} وإشعاع γ .
- النشاط الإشعاعي هو ظاهرة نووية بحتة وعشوائية، لا علاقة لها بالبنية الإلكترونية للعنصر المشع، أو بالإسقاط الكيميائي له مع بقيّة العناصر.
- النشاط الإشعاعي لا يتعلّق بالحالة الفيزيائية للمواد المشعة.

معادلات التفكك

التفكك α : هو إصدار جسيمات، كل جسيم منها يشبه نواة الهيليوم $({}_{2}^{4}He)$.

$\boxed{{}_{Z}^{A}X \rightarrow {}_{2}^{4}He + {}_{Z-2}^{A-4}X}$.

التفكك β^{-} : هو إصدار الكترونات سريعة $({}_{-1}^{0}e)$ من النواة ، $\boxed{{}_{Z}^{A}X \rightarrow {}_{-1}^{0}e + {}_{Z+1}^{A}Y + {}_{0}^{0}\overline{\upsilon}}$.

الجسيم ${}_{0}^{0}\overline{\upsilon}$: هو ضديد النترينو، كتلته السكونية معدومة، وشحنته معدومة، استغرق العلماء زمنا طويلا للكشف عنه.

التفكك β^{+} : هو إصدار بوزيترونات سريعة $({}_{+1}^{0}e)$ من النواة ، $\boxed{{}_{Z}^{A}X \rightarrow {}_{+1}^{0}e + {}_{Z-1}^{0}Y + {}_{0}^{0}\upsilon}$.

الجسيم ${}_{0}^{0}\upsilon$: هو النترينو.

إصدار γ : هو إصدار إشعاع كهرومغناطيسي ذي طاقة عالية، يسمّى إشعاع γ ، عادة ما يكون مصاحبا للتفكك α ، $\boxed{{}_{Z}^{A}X^{*} \rightarrow {}_{Z}^{A}X + \gamma}$

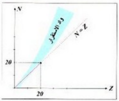
${}_{Z}^{A}X^{*}$ ، هي نواة مثارة.

استقرار وعدم استقرار النواة

ارتباط النواة: تساهم القوة النووية القوية في ربط النويات، وبالتالي في استقرار النواة. أما القوة الكهرومغناطيسية، فهي تساهم في عدم استقرارها ، لأنها قوة تنافرية.

مجالات استقرار وعدم استقرار النواة

المخطط (N, Z)



يسمح المخطط (N, Z) بتحديد مجالات الاستقرار.

كلّ الأنوية المستقرّة محدّدة في " مجال الاستقرار" أو "واد الاستقرار".

- إذا كان $Z < 20$ ، الأنوية المستقرّة تحقّق الشرط ، $\boxed{N \approx Z}$
- اذا كان $20 < Z \leq 82$ ، الأنوية المستقرة تحقّق الشرط ، $\boxed{\dfrac{N}{Z} \approx 1,5}$
- اذا كان $Z > 82$ ، كلّ الأنوية غير مستقرّة.

قانون التناقص الإشعاعي

يعطى بالعبارة ، $\boxed{N = N_0\, e^{-\lambda t}}$

حيث ، N_0 عدد أنوية العنصر المشع في لحظة القياس $t = 0$.

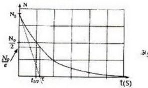
N عدد الأنوية المتبقية بعد التفكك في اللّحظة t .

λ ثابت الإشعاعية، يقاس بـ (s^{-1}) مع ، $\boxed{\lambda = \dfrac{1}{\tau}}$

τ هو العمر المتوسط (أو ثابت الزّمن)، ويقاس بالثانية.

نصف العمر $t_{1/2}$

هو الزّمن الذي يستغرقه العنصر المشع لتفكّك نصف عدد أنويته الابتدائي ، $\boxed{t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}}$



تعيين τ ، λ و $t_{1/2}$ بيانيا

- من اجل $t = t_{1/2}$ تتفكك $\dfrac{N_0}{2}$ نواة.
- من اجل $t = \tau$ تتفكك $\dfrac{N_0}{e}$ اي $0,37 N_0$ نواة.

الماس للبيان عند البدا يعيّن τ

النشاط الاشعاعي A

A ، عدد التفككات في ثانية واحدة ، $\boxed{A = -\dfrac{dN}{dt} = \lambda N}$

A يقاس بالبيكريل (Bq) . ولدينا أيضا ، $\boxed{A = A_0\, e^{-\lambda t}}$ حيث A_0 النشاط الإشعاعي الابتدائي.

التفاعلات النووية التلقائية والتفاعلات النووية المفتعلة

التفاعلات النووية التلقائية

وهي التفاعلات النووية الطبيعية التي تحدث تلقائيا للعناصر المشعة ويصدر عنها التفككان α ، β^- وإصدار γ .

التفاعلات النووية المفتعلة (المصطنعة)

1/ التحوّل الاصطناعي للنوى الذرية ■ تجربة رذرفورد (1919 م)

قذف رذرفورد بجسيمات α أنوية النتروجين ${}^{14}_{7}N$ ، فحصل على الأكسجين ${}^{17}_{8}O$ ، وعلى جسيم اخر لم يعرف من قبل وهو البروتون ${}^{1}_{1}p$ ، $\boxed{\alpha + {}^{14}_{7}N \rightarrow {}^{17}_{8}O + {}^{1}_{1}p}$.

2/ النشاط الإشعاعي الاصطناعي ■ تجربة ايرين- فريدريك (1934 م)

قذفا بجسيم α أنوية الألمنيوم ${}^{27}_{13}Al$ ، فحصلا على أنوية الفوسفور ${}^{30}_{15}P$ والنترونات ${}^{1}_{0}n$ ،

$\boxed{\alpha + {}^{27}_{13}Al \rightarrow {}^{30}_{15}P + {}^{1}_{0}n}$.

والفوسفور ${}^{30}_{15}P$ أصبح مشعا، فاصدر بوزيترونات ${}^{0}_{+1}e$ ، وهو ما يعرف بالتفكك β^+ :

$\boxed{{}^{30}_{15}P \rightarrow {}^{0}_{+1}e + {}^{30}_{14}Si}$.

3/ الانشطار النووي ■ تجربة هاهن- ستراسمان (1938 م)

قذفا أنوية اليورانيوم الخصب ${}^{235}_{92}U$ بنترونات بطيئة فتبيّن لهما أن كل نواة تنشطر الى نواتين مستقرتين متوسطتين، وتتحرر طاقة في حدود $200\,MeV$ لكل نواة تنشطر.

> الانشطار هو تفاعل نووي، يحدثه نترون بطيء، عند قذفه على نواة ثقيلة انشطارية مثل ${}^{235}_{92}U$ أو ${}^{239}_{94}Pu$ ، فتنتج نواتان متوسطتان، وتتحرر بعض النترونات (من 2 إلى 3 نترونات)، كما تتحرر طاقة كبيرة في حدود $200\,MeV$ لكل نواة.

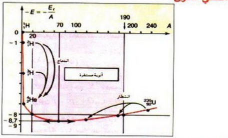
مثال: ${}^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{85}_{35}Br + {}^{148}_{57}La + 3\,{}^{1}_{0}n + \gamma +$ طاقة

4/ الاندماج النووي

> الاندماج هو تفاعل نووي، تندمج فيه نواتان خفيفتان، لتشكّلا نواة أكبر منهما، وتتحرر طاقة نووية كبيرة.

مثال: ${}^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{3}_{2}He + {}^{1}_{0}n$ و ${}^{2}_{1}H + {}^{3}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{1}_{0}n$

منحني أستون



قانون الانحفاظ في التفاعلات النووية ■ قانونا صودي

- قانون انحفاظ الشحنة الكهربائية : $\boxed{\sum Z_{(\text{النواتج})} = \sum Z_{(\text{المتفاعلات})}}$
- قانون انحفاظ عدد النويات (العدد الكتلي) : $\boxed{\sum A_{(\text{النواتج})} = \sum A_{(\text{المتفاعلات})}}$

الحصيلة الطاقوية

• علاقة اينشتاين (1905 م)

كلّ مادة كتلتها m إذا تحوّلت إلى طاقة فإنها تعطي طاقة كتلية E تعطى بالعلاقة :

$\boxed{E = mC^2}$

m : الكتلة بـ (kg) ،

C : سرعة الضوء في الخلاء ، $C \approx 3.10^8\, m.s^{-1}$

• النقص الكتلي (Δm)

- كتلة أي نواة أصغر دوما من مجموع كتل مكوّناتها، وهي متفرّقة : $\boxed{m_{\text{نواة}} < m_{\text{نويات}}}$
- النقص الكتلي هو فرق الكتلة بين النواة ونويّاتها : $\boxed{\Delta m = m_{\text{نويات}} - m_{\text{نواة}}}$

• طاقة الرّبط النّووي (E_L)

النقص الكتلي Δm يتحوّل إلى طاقة تعمل على ربط النويات ببعضها، تسمّى طاقة الرّبط النووي E_L وتعطى بالعبارة : $\boxed{E_L = m.C^2}$

• طاقة الرّبط لكلّ نوية (E_L , A)

تحدّد مدى ارتباط النويّات ببعضها داخل النواة، وتعطى بناتج القسمة $\frac{E_L}{A}$.

• الطاقة النّاتجة من التفاعلات النووية (منها الانشطار والاندماج)

تعطى الطاقة المتحرّرة من تفاعلي الانشطار والاندماج بعلاقة انشتاين :

$$\boxed{E = \left| \sum m_{\text{متفاعلات}} - \sum m_{\text{نواتج}} \right| . C^2}$$

• وحدات خاصّة

$$1\,MeV = 1,6 \times 10^{-13}\,J \quad ، \quad 1u = 931,5\,MeV / C^2$$

التمرين 1

إليك أسماء علماء الفيزياء : رونتجن (*Rœntegen*)، بكريل (*Bequerel*) كروكس (*Crookes*)، والبك الظواهر الفيزيائية التالية :
- اكتشاف أشعة X،
- اكتشاف الأشعة المهبطية،
- اكتشاف النشاط الإشعاعي الطبيعي.

1ـ أرفق بكل اكتشاف اسم العالم الذي اكتشفه.

2ـ ما الفرق بين أشعة X والأشعة المهبطية ؟

هل الأشعة المهبطية تغير نوع العنصر الذي يصدرها إلى عنصر آخر ؟

3ـ ما هو النشاط الإشعاعي الطبيعي ؟ وهل يتغير نوع العنصر المشع عندما يصدر إشعاعا ؟

4ـ بيّن بكريل (*Bequerel*) أن النشاط الإشعاعي لليورانيوم مستقل عن المواد المرتبطة به، أو المرتبطة به، ومستقل عن تركيبه الإلكتروني. برأيك، كيف يتم تفسير ذلك ؟

5ـ برأيك، من الذي سبب اسوداد اللوح الفوتوغرافي في تجربة بكريل، هل هي جسيمات α أو β^- أو أشعة γ ؟

الحل

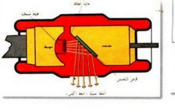
1ـ العالم الألماني رونتجن هو الذي اكتشف الأشعة السينية X سنة 1896 م.

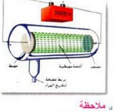
العالم الألماني كروكس هو الذي اكتشف الأشعة المهبطية التي هي حزمة من الإلكترونات.

العالم الفرنسي بكريل هو الذي اكتشف النشاط الإشعاعي الطبيعي.

2ـ الفرق بين الأشعة المهبطية وأشعة X

الأشعة المهبطية هي حزمة من الإلكترونات، أما أشعة X فهي أشعة كهرومغناطيسية نحصل عليها عندما تصطدم حزمة إلكترونات الأشعة المهبطية بمعدن ثقيل مثل التنغستين W، فتعطي طاقة لإلكترونات هذا المعدن، تجعلها تغادر مداراتها تاركة فراغا بالإلكترونات المدارات العليا التي تفقد الطاقة الزائدة على شكل إشعاع طيفي (طيف إصدار) ذي طاقة عالية طول موجته (λ) في حدود $10^{-10}m$.





ـ ملاحظة

ـ سميت أشعة X لأن العلماء في ذلك الوقت لم يعرفوا مصدرها عندما اصطدمت حزمة الإلكترونات (الأشعة المهبطية) فأعطى لها الرمز X (أي مجهول)، ولم يتم تفسيرها إلا في سنة 1912 م.

ـ عندما اكتشف رونتجن أشعة X في ألمانيا وأظهر قدرتها على اختراق الأجسام، إلا الأجسام الكثيفة كالمعادن والعظام، لم يصدق العلماء ذلك، فبعث لهم بصورة الهيكل العظمي ليد زوجته، كما هو موضح بالشكل المرفق.

أول عالم فيزيائي نال جائزة نوبل في الفيزياء هو رونتجن سنة 1901 م.

ـ إن الإلكترونات التي تخرج من ذرات المعادن أو المواد لا تغير من الطبيعة النووية للعنصر الكيميائي الذي صدرت منه، فالعنصر تبقى نواته هي هي، فقط بعض الخواص الكيميائية تطرأ عليها. فالعنصر الكيميائي لا يتغير إلى عنصر كيميائي آخر.

3ـ ظاهرة النشاط الإشعاعي الطبيعي : هي الإصدار التلقائي والمستمر للجسيمات α وβ^+ وβ^- وإشعاع γ من أنوية العناصر المشعة. فكل عنصر مشع يتغير إلى عنصر آخر قد يكون مستقرا وقد يكون بدوره عنصرا مشعا حينما يصدر إشعاع α أو β، أما إذا أصدر إشعاع γ فلا يتغير.

4ـ إن النشاط الإشعاعي لليورانيوم ـ حسب بكريل ـ مستقل عن المواد المرتبطة به، ومستقل عن تركيبه الإلكتروني، ويمكن تفسير ذلك بأن النشاط الإشعاعي هو ظاهرة نووية بحتة (تمس النواة فقط)، ولا علاقة لها بالبنية الإلكترونية للعنصر المشع، أو بالارتباط الكيميائي له.

5ـ إن الذي سبب اسوداد اللوح الفوتوغرافي المغلف بعدة طبقات من الأوراق ـ في تجربة بكريل ـ هو إشعاع γ، لأن هذا الإشعاع ذو طاقة عالية، فهو يستطيع أن ينفذ عبر الأوراق المغلفة للوح الفوتوغرافي بكل سهولة. أما إشعاع α أو إشعاع β^- فلا يستطيعان ذلك.

التمرين 2

1ـ حدد أنواع الإشعاعات التي تصدرها المواد المشعة التي لها نشاط إشعاعي طبيعي أو صناعي، وقارن بينها من حيث القدرة على اختراق المواد.

2ـ اليورانيوم عنصر مشع طبيعيا، يمكن أن يتواجد في عدة حالات، صلبة، سائلة، غازية...

أ ـ هل يتغير حالته الفيزيائية يتغير نشاطه الإشعاعي ؟

ب ـ نقوم بضغطه ضغطا عاليا، هل يتغير نشاطه الإشعاعي ؟

ج ـ نقوم برفع درجة حرارته، هل يتغير نشاطه الإشعاعي ؟

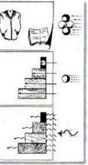
فيم النتائج.

الحل

1- أنواع الإشعاعات الطبيعية

- إشعاع α : عبارة عن جسيمات هي في الحقيقة أنوية الهيليوم (^4_2He)، وذات قدرة نفاذ كبيرة في المواد.
- إشعاع β^- : هو إصدار إلكترونات سريعة ($^0_{-1}e$)، وهي ذات قدرة نفاذ كبيرة جدا في المواد.
- إشعاع γ : هو إصدار أشعة كهرومغناطيسية ذات طاقة عالية، ولها قدرة نفاذ عظيمة حتى في المواد السميكة.

- الإشعاع الصناعي



- إشعاع β^+ : هو إشعاع نووي صناعي، وهو عبارة عن جسيمات تسمى البوزيترونات، والبوزيترون ($^0_{+1}e$) له نفس كتلة الإلكترون ($m_{\beta^-}=m_{\beta^+}$). ونفس شحنته ولكن موجبة $q_{\beta^+}=+1,6.10^{-19}C$ ، لذا يسمى البوزيترون بضديد الإلكترون ($antiélectron$).

ملاحظة : البوزيترون ليس هو البروتون، فكتلة البروتون أكبر من كتلة البوزيترون بحوالي 1836 مرة.

- المقارنة بين الإشعاعات من حيث قدرة النفاذ

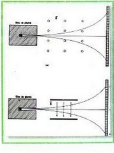
2- أ- النشاط الإشعاعي لليورانيوم (أو للعناصر المشعة بصفة عامة) لا يتأثر بالحالة الفيزيائية التي يوجد بها، سواء الصلبة أو السائلة أو الغازية.

ب/ كما أن النشاط الإشعاعي لا يتغير بتغير الضغط على المادة المشعة.

ج/ ولا يتغير بتغير درجة حرارة العنصر المشع.

النشاط الإشعاعي هو ظاهرة نووية بحتة للأجسام المشعة.

التمرين 3



إليك التجربة الموضحة بالوثيقتين التاليتين.

توضع عينة ذات نشاط إشعاعي طبيعي (S) داخل صندوق من الرصاص (Pb). مرة تحرف الإشعاعات الصادرة من المنبع (S) بحقل كهربائي، ومرة بحقل مغناطيسي.

1- حدد الوثيقة التي حُرِفت فيها الإشعاعات النووية بالحقل الكهربائي.

2- أ- على ماذا يدل انحراف الإشعاعات النووية ؟

ب- حدد إشارة جسيمات β ، جسيمات α وإشعاع γ. برر إجابتك.

3- أيُّ الجسيمات حدث له انحراف أكبر في الحقلين الكهربائي والمغناطيسي ؟ ماذا تستنتج ؟

4- إليك بعض المعطيات : $q_1=e^-$ ، $q_2=+2|e^-|$ ، $m_b=m_{e^-}$ ، $m_a\approx7350m_{e^-}$.

حيث : e^- : شحنة الإلكترون،

m_{e^-} : كتلة الإلكترون.

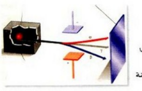
أرفق بكل جسيم شحنته وكتلته المناسبة.

5- أ- برأيك، هذه العينة مؤلفة من نوع واحد من العناصر، أم من عدة أنواع لعناصر مشعة ذات طبيعة مختلفة.

ب- لماذا لا نحصل على النشاط الإشعاعي β^+ من العينة الطبيعية ؟

الحل

1- الوثيقة (أ) هي التي حُرفت فيها الإشعاعات النووية بالحقل الكهربائي، لأن رمز الحقل الكهربائي هو $\vec{E}$ ، أما $\vec{B}$ فهي رمز الحقل المغناطيسي.



2- أ- انحراف الإشعاعات النووية، سواء في الحقل الكهربائي أو في الحقل المغناطيسي، يدل على أنها جسيمات مشحونة بشحنات كهربائية. وبما أن الانحراف تم على الأقل في اتجاهين متعاكسين، فهذا يعني أنه يوجد على الأقل نوعان من الجسيمات، أحدها ذو شحنة كهربائية موجبة، والآخر ذو شحنة كهربائية سالبة.

ب- تحديد إشارة شحنة كل من جسيمات α وجسيمات β

نعلم أن اتجاه الحقل الكهربائي $\vec{E}$ يكون من الكمون المرتفع نحو الكمون المنخفض، أي من الصفيحة الموجبة كهربائيا إلى الصفيحة السالبة كهربائيا.

فالجسيمات المشحونة سلبا تنحرف نحو الأعلى، لذلك فهي جسيمات β^-. أما الجسيمات التي انحرفت نحو الأسفل فهي جسيمات α (أو أنوية الهيليوم $^4_2He^{++}$) موجبة الشحنة. أما إشعاع γ فغير مشحون، لذلك لا يحدث له أي انحراف، فيكون مساره مستقيما.

3- الجسيم المشحون β^- هو الذي حدث له الانحراف الأكبر مقارنة بالجسيم (α). وهذا يجعلنا نستنتج ما يلي :

- الجسيم β^- له سرعة كبيرة إثر صدوره من العنصر المشع، مقارنة بسرعة صدور جسيم α.
- كتلة الجسيم β^- أصغر من كتلة الجسيم α.

4- الجسيم وشحنته وكتلته

الجسيم	شحنته	كتلته
β^-	$q_1=e^-$	m_e
α	$q_2\approx+2\|e^-\|$	$7350\ m_e$

5ـ أـ هذه العينة مؤلفة من عدة أنواع لعناصر مشعة مختلفة. فلا يمكن أن نجد عنصرا مشعا واحدا يُحدث التفكك α والتفكك β^- معا. فإما يُحدث التفكك α وإما التفكك β^-. وعلى سبيل المثال، عندما نأخذ عينة من اليورانيوم نجد أنها تحتوي، بالإضافة إلى اليورانيوم، عناصر أخرى مشعة مثل الثوريوم (Th) والبراكتينيوم (Pa)، التي نتجت عن اليورانيوم نفسه نتيجة التفككات α و β^-.

$$^{238}_{92}U \xrightarrow{\alpha} {}^{234}_{90}Th \xrightarrow{\beta^-} {}^{234}_{91}Pa \ldots$$

إذن، في نفس قطعة اليورانيوم نجد الثوريوم والبراكتينيوم وكلها عناصر مشعة، فيها يحدث تفكك α وفيها يحدث تفكك β^- وفيها يصدر إشعاع γ.

ب ـ من العينة المشعة الطبيعية لا نحصل على التفكك β^+ لأن هذا التفكك ينتج عن العينات المشعة الصناعية فقط.

التمرين 4

يوجد عنصر البور (B) في الطبيعة على شكل نظيرين هما ($^{11}_{5}B$) و($^{10}_{5}B$) بنسبة مئوية عددية (بعدد الذرات) ، $81,1\%$ و $18,9\%$ على الترتيب.

1ـ حدد البنية النووية لكل نظير.

2ـ حدد شحنة النواتين المذكورتين.

3ـ احسب الكتلة المولية الذرية المتوسطة لعنصر البور (B).

4ـ استنتج النسبة المئوية الكتلية لكل نظير.

شحنة البروتون ، $e=+1,6.10^{-19}C$.

الحل

1ـ تحديد البنية النووية لكل نظير

ـ النظير $^{11}_{5}B$ ، من الشكل $^{A}_{Z}X$. فعدد البروتونات $\boxed{Z=5}$ ، وعدد النويات (العدد الكتلي) $\boxed{A=11}$. أما عدد النترونات نحسبه كالتالي :

$$Z+N=A \Rightarrow N=A-Z \Rightarrow N=11-5\ ;\ \boxed{N=6}$$

ـ النظير $^{10}_{5}B$:

$$\boxed{Z=5}\ ,\ \boxed{A=10}\ ,\ N=A-Z=10-5\ ;\ \boxed{N=5}$$

1ـ تحديد شحنة النواتين

نواة كلا النظيرين تحتوي على عدد من البروتونات ($Z=5$)، وبما أن النترونات متعادلة الشحنة، فإن :

شحنة النواة (q) = شحنة بروتوناتها (Ze)

إذن ، $q=Ze=5.1,6.10^{-19}C$ ، أي ، $\boxed{q=+8,0.10^{-19}C}$

3ـ حساب الكتلة المولية الذرية المتوسطة لعنصر البور (B)

$$M=\frac{11\times 81,1+10\times 18,9}{100}$$

$$\boxed{M=10,81\,g/mole}$$

4ـ تحديد النسبة المئوية الكتلية لكل نظير

بالنسبة إلى $^{11}_{5}B$ ، $x\%=\dfrac{81,1\times 11}{10,81}=82,52\%$

بالنسبة إلى $^{10}_{5}B$ ، $y\%=\dfrac{18,9\times 10}{10,81}=17,48\%$

التمرين 5

1/ املأ الجدول التالي.

العنصر الكيميائي		Fe		
نواته	$^{235}_{92}U$			
عدد بروتوناته		26	92	
عدد نتروناته		30	146	0
عدد إلكتروناته				1

2/ حدد النظائر الممثلة في الجدول.

الحل

1ـ ملء الجدول

العنصر الكيميائي	U	Fe	U	H
نواته	$^{235}_{92}U$	$^{56}_{26}Fe$	$^{238}_{92}U$	$^{1}_{1}H$
عدد بروتوناته	92	26	92	1
عدد نتروناته	143	30	146	0
عدد إلكتروناته	92	26	92	1

2ـ تحديد النظائر

النظائر هي : $^{235}_{92}U$ ، $^{238}_{92}U$.

التمرين 6

1- هل التفكك النووي يحدث لكل العناصر الكيميائية الموجودة في الطبيعة ؟ ماذا تسمى العناصر التي يحدث لها تفكك ؟ وماذا تسمى العناصر التي لا يحدث لها تفكك ؟

2- أ- اذكر أنواع التفككات والإشعاعات الصادرة عن العناصر المشعة (الطبيعية والصناعية).

ب- اكتب معادلة كل تفكك، مذكرا بقانوني الانحفاظ.

3- حدد أنواع التفككات التي تحدث تغيرا في النواة المتفككة وتجعلها تتحول إلى نواة أخرى.

الحل

1- ليس كل عناصر الطبيعة تحدث لها تفككات نووية. والتي تتعرض للتفككات النووية تسمى عناصر مشعة (أو منابع مشعة). أما التي لا تتعرض للتفككات النووية فتسمى عناصر مستقرة.

2- أ- أنواع التفككات هي :

التفكك α : أو إصدار الجسيم $({}^{4}_{2}He)$،

التفكك β^- : أو إصدار الإلكترونات $({}^{0}_{-1}e)$،

التفكك β^+ : أو إصدار البوزيترونات $({}^{0}_{+1}e)$،

الإصدار γ : أو إصدار الإشعاع γ.

ب- معادلات التفكك

أولا، نذكر بقانوني الانحفاظ :

- قانون انحفاظ الشحنة الكهربائية (Z) أو انحفاظ Z

$$\boxed{(Z)_{\text{النواة المتفككة}} = (Z)_{\text{الأنوية الناتجة}}}$$

- قانون انحفاظ عدد النويات (A)

$$\boxed{(A)_{\text{النواة المتفككة}} = (A)_{\text{الأنوية الناتجة}}}$$

- التفكك α أو $({}^{4}_{2}He)$

$${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{A'}_{Z'}Y$$

- حسب قانون انحفاظ الشحنة : $Z=2+Z'$ ومنه : $\boxed{Z'=Z'-2}$

- حسب قانون عدد النويات A : $A=4+A'$ ومنه : $\boxed{A'=A-4}$

ومنه نكتب النواة ${}^{A'}_{Z'}Y$ كما يلي : ${}^{A-4}_{Z-2}Y$

وهكذا يكون التفكك α : $\boxed{{}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{A-4}_{Z-2}Y}$

- التفكك β^-

$${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{A'}_{Z'}Y$$

$$A=0+A' \; ; \; A'=A$$

$$Z=-1+Z' \; ; \; Z'=Z+1$$

إذن : $\boxed{{}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{0}_{-1}e + {}_{Z+1}^{A}Y}$

- التفكك β^+

$${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{0}_{+1}e + {}^{A'}_{Z'}Y$$

$$A=0+A' \; ; \; A'=A$$

$$Z=1+Z' \; ; \; Z'=Z-1$$

إذن : $\boxed{{}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{0}_{+1}e + {}_{Z-1}^{A}Y}$

- إصدار γ

$${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A}_{Z}X^{*} \longrightarrow {}^{0}_{0}\gamma + {}^{A'}_{Z'}Y$$

$$A=0+A' \; ; \; A'=A$$

$$Z=0+Z' \; ; \; Z'=Z$$

بما أن (Z) لم يتغير لأن $Z'=Z$ فالنواة لا تتغير، وبالتالي ${}^{A'}_{Z'}Y$ هي نفسها النواة ${}^{A}_{Z}X$ ولذا نكتب :

$$\boxed{{}^{A}_{Z}X \longrightarrow \gamma + {}^{A}_{Z}X}$$

3- التفككات التي تُحدث تغيرا في النواة المتفككة

- التفكك α : حوّل النواة ${}^{A}_{Z}X$ إلى نواة جديدة هي $({}^{A-4}_{Z-2}Y)$،

- التفكك β^- : حوّل النواة ${}^{A}_{Z}X$ إلى نواة جديدة هي $({}_{Z+1}^{A}Y)$،

- التفكك β^+ : حوّل النواة ${}^{A}_{Z}X$ إلى نواة جديدة هي $({}_{Z-1}^{A}Y)$،

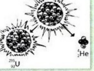
- الإصدار γ : لم يغير النواة التي أحدثته.

التمرين 7

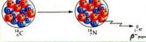
إليك النماذج التالية.

حدد لكل نموذج نوع التفكك الحادث له.

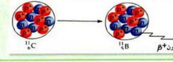
اكتب معادلة كل تفكك.



(1)



(2)



(3)

الحل

النموذج 1 : هو نموذج لتفكك α

معادلة تفككه هي : $^{239}_{94}Pu \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{235}_{92}U$

النموذج 2 : هو نموذج لتفكك β^-

معادلة تفككه هي : $^{14}_{6}C \longrightarrow {}^{14}_{7}N + {}^{0}_{-1}e$

النموذج 3 : هو نموذج لتفكك β^+

معادلة تفككه هي : $^{11}_{6}C \longrightarrow {}^{11}_{5}B + {}^{0}_{+1}e$

التمرين 8

يظهر بين قوسين نوع التفكك الحادث لكل عنصر مشع من العناصر التالية :

$^{14}_{6}C(\beta^-)$, $^{30}_{15}P(\beta^+)$, $^{214}_{84}Po(\alpha)$

اكتب التفاعل النووي الحادث لكل نواة، مستعينا بالجدول المرفق.

العدد الذري Z	13	86	82	7	56	14
الرمز	Al	Em	Pb	N	Fe	Si

الحل

- معادلة التفاعل النووي الحادث لكل نواة

$^{214}_{84}Po(\alpha)$: $^{214}_{84}Po \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{A}_{Z}Y$

حسب قانون انحفاظ الشحنة : $84=2+Z$ إذن ، $Z=82$

حسب قانون انحفاظ عدد النويات : $214=4+A$ إذن ، $A=210$

وبالاستعانة بالجدول الدوري لدينا : $(Z=82)$ يوافق Pb

إذن نكتب : $\boxed{^{214}_{84}Po \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{210}_{82}Pb}$

$^{30}_{15}P(\beta^+)$: $^{30}_{15}P \longrightarrow {}^{0}_{+1}e + {}^{A}_{Z}Y$

$$30=0+A \;;\; A=30$$
$$15=1+Z \;;\; Z=14$$

بالنظر إلى الجدول نجد انه من أجل $Z=14$ يكون Si

إذن ، $\boxed{^{30}_{15}P \longrightarrow {}^{0}_{+1}e + {}^{30}_{14}Si}$

$^{14}_{6}C(\beta^-)$: $^{14}_{6}C \longrightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{A}_{Z}Y$

$$14=0+A \;;\; A=14$$
$$6=-1+Z \;;\; Z=7$$

فالنواة هي N : $\boxed{^{14}_{6}C \longrightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{14}_{7}N}$

التمرين 9

يقال إن استقرار أي نواة ($^{A}_{Z}X$) أو عدم استقرارها يعتمد على عدد بروتوناتها (Z) وعدد نتروناتها (N). والتفاعل بين هذه النويات ($nucléons$).

1/ في مقاربة أولى، حاول أن تفسر استقرار النواة من عدم استقرارها بالتفاعل الحادث بين التنافر الكولومبي (القوة الكهرومغناطيسية) والقوة النووية القوية الجاذبة.

2/ في مقاربة ثانية، تؤكد الدراسة أن عدد الأنوية المستقرة هي في حدود 266 نواة، منها : 159 نواة تتميز بأن Z زوجي وN زوجي ، 53 نواة تتميز بأن Z زوجي وN فردي ، 50 نواة تتميز بأن Z فردي وN زوجي ، 4 أنوية تتميز بأن Z فردي وN فردي.

أ/ فما هي الخاصية المميزة لأغلب الأنوية المستقرة ؟

ب/ إذا علمت أن 80% من القشرة الأرضية تتألف من عناصر مستقرة لها الأنوية التالية :

$^{16}_{8}O$ ، $^{24}_{12}Mg$ ، $^{28}_{14}Si$ ، $^{40}_{20}Ca$ ، $^{48}_{22}Ti$ ، $^{56}_{26}Fe$.

فما هي الخاصية الأبرز المشتركة بين هذه النوى ؟

الحل

1- تفسير استقرار النواة من عدم استقرارها

استقرار النواة يعتمد على عدد بروتوناتها (Z) وعدد نتروناتها (N).

- بالنسبة إلى الأنوية الخفيفة ($Z<20$) : نلاحظ أن الأنوية التي يكون فيها $Z \approx N$ مستقرة، وهذا يعني أن القوة النووية القوية بين النويات تكون أكبر بكثير من القوة الكولومبية التنافرية. أما الأنوية التي لا تحقق $Z=N$ فهي غير مستقرة.

- بالنسبة إلى الأنوية المتوسطة ($20<Z<82$) : نلاحظ أن الأنوية المستقرة فيها تحقق $Z<N$ والعدد الزائد من النترونات يعمل على تخفيف الشحنة الكهربائية الموجبة، مما يجعل القوة النووية أكبر شدة من القوة التنافرية الكولومبية. فالرصاص ($^{206}_{82}Pb$) مثلا، يتمتع باستقرار كبير لأن :

$$\frac{N}{Z} = \frac{206-82}{82} = 1{,}51$$

إذن ، $Z<N$.

اما الأنوية التي لا تحقق $Z<N$ فإنها تكون غير مستقرة.

- أما الأنوية الثقيلة ($Z>82$) فإنها غير مستقرة، ذلك لأنه بزيادة عدد البروتونات (Z) تصبح قوة التنافر الكولومبي كبيرة، إلى درجة تتغلب فيها على قوى الجذب النووية، وهذا بطبيعة الحال يؤدي إلى عدم استقرار النواة.

/2 أ/ الخاصية المميزة لغالبية الأنوية المستقرة هي ، Z زوجي وN زوجي.

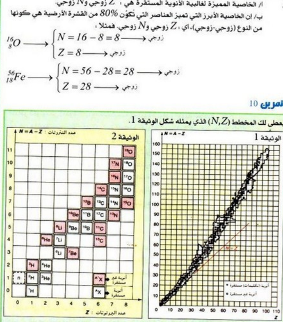
ب/ إن الخاصية الأبرز التي تميز العناصر التي تكوّن 80% من القشرة الأرضية هي كونها من النوع (زوجي-زوجي)، اي ، Z زوجي وN زوجي. فمثلا ،

$$^{16}_{8}O \longrightarrow \begin{cases} N = 16 - 8 = 8 \longrightarrow \text{زوجي} \\ Z = 8 \longrightarrow \text{زوجي} \end{cases}$$

$$^{56}_{18}Fe \longrightarrow \begin{cases} N = 56 - 28 = 28 \longrightarrow \text{زوجي} \\ Z = 28 \longrightarrow \text{زوجي} \end{cases}$$

التمرين 10

يعطى لك المخطط (N,Z) الذي يمثله شكل الوثيقة 1.



1/ حدد منطقة الاستقرار، وما هي الحالة النووية للعناصر المتواجدة بها ؟

2/ حدد الحالة النووية للعناصر المتواجدة خارج منطقة الاستقرار، وما هي أنواع التفككات التي يمكن أن تجريها ؟

3/ يؤخذ جزء من المخطط (N,Z) ونقوم بتكبيره، ونحدد عليه خانات فيها الأنوية المستقرة والأنوية غير المستقرة (الوثيقة 2). تعطى الأنوية ، ^{10}Be ، ^{14}C ، ^{15}O ، ^{10}C

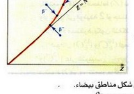
أ/ باعتبار الأنوية التي لها فائض في عدد النترونات (N) - مقارنة بالأنوية المستقرة - تتعرض للتفكك β^- ، حدد من بين الأنوية السابقة تلك التي تتوقع أن تتعرض للتفكك β^- ، واعط معادلات تفككها، وهذا بالاستعانة بالوثيقة 2.

ب/ باعتبار الأنوية التي لها فائض في عدد البروتونات (Z) تتعرض للتفكك β^+ ، حدد من بين الأنوية السابقة تلك التي تتوقع أن تتعرض للتفكك β^+ ، واعط معادلات تفككها.

الحل

1/ تحديد منطقة الاستقرار

- منطقة الاستقرار هي المنطقة التي تظهر فيها نقاط سوداء، كما هو موضح بالشكل المرفق.



- الحالة النووية للعناصر المتواجدة بمنطقة الاستقرار هي أنها ذات أنوية مستقرة.

/2 العناصر خارج منطقة الاستقرار هي عناصر غير مستقرة، بمعنى أنها عناصر مشعة، فهي تتعرض إذن للتفككات α ، β^- ، β^+ أو التفكك γ ، وتظهر في الشكل على شكل مناطق بيضاء.

فالعناصر التي تقع أعلى منطقة الاستقرار وعلى يساره تجري التفكك β^- .

والعناصر التي تقع أسفل منطقة الاستقرار وعلى يمينه تجري التفكك β^+ .

أما العناصر النقيلة التي تقع بجوار اليورانيوم ($^{235}_{92}U$) فإنها تجري التفكك α .

/3 أ/ تحديد الأنوية التي تتعرض للتفكك β^-

لنحدد أولا (Z) و(N) لكل نواة ،

النواة	$^{10}_{4}Be$	$^{14}_{6}C$	$^{15}_{8}O$	$^{10}_{6}C$
Z	4	6	8	6
N	6	8	7	4

لاحظ أن النواة $^{10}_{4}Be$ لها فائض من النترونات ($N=6$) مقارنة بنواة مستقرة مثل $^{9}_{4}Be$ التي لها ($Z=4$) و($N=5$) لذا تجري التفكك β^- اي تصدر إلكترونا ($^{0}_{-1}e$) ،

$$^{10}_{4}Be \longrightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{A}_{Z}Y$$

- حسب قانون انحفاظ الشحنة الكهربائية ، $4=-1+Z$ ومنه ، $\boxed{Z=5}$

- حسب قانون انحفاظ عدد النويات ، $10=0+A$ ومنه ، $\boxed{A=10}$

والنواة التي لها $(Z=5)$ مسجلة في الوثيقة 2 وهي نواة ${}_{5}B$.

إذن النواة ${}_{Z}^{A}Y$ هي ${}_{5}^{10}B$ وهي نواة مستقرة، فنكتب من جديد :

$$\boxed{{}_{4}^{10}Be \longrightarrow {}_{-1}^{0}e + {}_{5}^{10}B}$$

كذلك، لو عدنا إلى الجدول للاحظنا أن النواة $({}_{6}^{14}C)$ أيضا لها فائض من النترونات مقارنة بالنواة $({}_{6}^{12}C)$. إذ أن $({}_{6}^{14}C)$ تتميز بـ $Z=6$ ، $N=8$ بينما النواة $({}_{6}^{12}C)$ تتميز بـ $Z=6$ ، $N=6$ وعليه فإننا نتوقع أن $({}_{6}^{12}C)$ يحدث لها تفكك β^- كما يلي :

$${}_{6}^{14}C \longrightarrow {}_{-1}^{0}e + {}_{Z}^{A}Y$$

باستعمال قانون انحفاظ عدد النويات نجد : $A=14$

باستعمال قانون انحفاظ (Z) نجد : $Z=7$

ولو عدنا إلى الوثيقة 2 لوجدنا أن النواة التي لها $(Z=7)$ هي النواة (N)، فالنواة هي $({}_{7}^{14}N)$، وهي نواة مستقرة، يكون التفكك كالتالي : ${}_{6}^{14}C \longrightarrow {}_{-1}^{0}e + {}_{7}^{14}N$

ب/ النواتان $({}_{8}^{15}O)$ و$({}_{6}^{10}C)$ لهما فائض في عدد البروتونات مقارنة بالنواتين $({}_{8}^{16}O)$ و$({}_{6}^{12}C)$ على الترتيب :

- النواة $({}_{8}^{15}O)$: تتميز بـ $Z=8$ و $N=7$ ، لها فائض من البروتونات، لذا فيمكنها أن تحدث التفكك β^+ :

$${}_{8}^{15}O \longrightarrow {}_{+1}^{0}e + {}_{Z}^{A}X$$

$$15=0+A \;;\; A=15$$

$$8=1+Z \;;\; Z=7$$

بالاستعانة بالوثيقة 2 نجد أن النواة $({}_{7}^{15}X)$ هي النواة $({}_{7}^{15}N)$ وهي نواة مستقرة، لذا نكتب التفكك السابق كالتالي :

$$\boxed{{}_{8}^{15}O \longrightarrow {}_{+1}^{0}e + {}_{7}^{15}N}$$

- النواة $({}_{6}^{10}C)$: تتميز بـ $Z=6$ و $N=4$ ، لها فائض من البروتونات، لذا تجري التفكك :

$${}_{6}^{10}C \longrightarrow {}_{+1}^{0}e + {}_{Z}^{A}X$$

$$Z=5 ، A=10$$

والنواة $({}_{5}^{10}X)$ في الوثيقة 2 هي النواة $({}_{5}^{10}B)$ وهي نواة مستقرة، والتفكك الحادث هو :

$$\boxed{{}_{6}^{10}C \longrightarrow {}_{+1}^{0}e + {}_{5}^{10}B}$$

التمرين 11

أكمل المعادلات النووية التالية، محددا نوع النشاط الإشعاعي الحادث (نوع التفكك).

$${}_{6}^{14}C \longrightarrow {}_{7}^{14}N + \cdots\cdots$$
$${}_{15}^{30}P \longrightarrow {}_{14}^{30}Si + \cdots\cdots$$
$${}_{43}^{99}Tc^{*} \longrightarrow {}_{43}^{99}Tc + \cdots\cdots$$
$${}_{92}^{238}U \longrightarrow {}_{90}^{234}Th + \cdots\cdots$$

الحل

لإكمال المعادلات النووية وتحديد نوع التفكك يجب استعمال قانوني حفظ (Z) و(N).

بالنسبة إلى المعادلة الأولى :

$${}_{6}^{14}C \longrightarrow {}_{7}^{14}N + {}_{Z}^{A}X$$

$$14=14+A \;;\; A=0$$

$$6=7+Z \;;\; Z=-1$$

إذن $({}_{Z}^{A}X)$ هي $({}_{-1}^{0}X)$ فهي $({}_{-1}^{0}e)$ الذي يمثل الرمز النووي للإلكترون، لذا نكتب من جديد :

$$\boxed{{}_{6}^{14}C \longrightarrow {}_{6}^{14}N + {}_{-1}^{0}e}$$

وهذا هو التفكك β^-

بالنسبة إلى المعادلة الثانية :

$${}_{15}^{30}P \longrightarrow {}_{14}^{30}Si + {}_{Z}^{A}X$$

$$A=0 \;;\; Z=+1$$

إذن $({}_{Z}^{A}X)$ هي $({}_{+1}^{0}X)$ فهي $({}_{+1}^{0}e)$ الذي يمثل الرمز النووي للبوزيترون، ويكون التفكك :

$$\boxed{{}_{15}^{30}P \longrightarrow {}_{14}^{30}Si + {}_{+1}^{0}e}$$

وهو التفكك β^+

بالنسبة إلى المعادلة الثالثة :

$${}_{43}^{99}Tc^{*} \longrightarrow {}_{43}^{99}Tc + {}_{Z}^{A}Y$$

$$A=0 \;;\; Z=0$$

وهذا يوافق إصدار γ

ثم إن الرمز $(*)$ الموجود في نواة التكنسيوم $({}_{43}^{99}Tc^{*})$ يعني أن هذه النواة مهيّجة، وهي في مستوى طاقي أعلى من مستواها الطاقي الأساسي، لذا نكتب إصدارها كما يلي :

$$\boxed{{}^{99}_{43}Tc^{*} \longrightarrow {}^{99}_{43}Tc + \gamma}$$

المعادلة الرابعة :

$${}^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^{A}_{Z}X$$

$$A=238-234=4 \quad ; \quad Z=92-90=2$$

إذن $({}^{A}_{Z}X)$ هي $({}^{4}_{2}X)$ أي نواة الهيليوم $({}^{4}_{2}He)$

فالتفكك الحادث هو تفكك α أي $({}^{4}_{2}He)$

ونكتب المعادلة النووية كما يلي :

$$\boxed{{}^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^{4}_{2}He}$$

التمرين 12

1/ أعط تعريف كل من :

أ/ النشاط الإشعاعي (A)

ب/ نصف العمر $t_{\frac{1}{2}}$ (او الدور)

ج/ العمر المتوسط τ (او ثابت الزمن)

د/ ثابت الإشعاعية λ (او ثابت التفكك).

2/ ذكر بعبارات (A) ، $(t_{\frac{1}{2}})$ ، (τ) وبوحداتها.

الحل

1/ أ/ تعريف النشاط الإشعاعي (A)

النشاط الإشعاعي لعينة من الأنوية المشعة في لحظة زمنية (t) هو عدد التفككات (A) في ثانية واحدة.

ب/ تعريف نصف العمر $t_{\frac{1}{2}}$ (او عمر النصف او الدور)

فترة نصف العمر هي الزمن اللازم الذي يستغرقه العنصر المشع لكي يتفكك نصف العدد الابتدائي $(\frac{N_0}{2})$ من أنويته.

ج/ تعريف العمر المتوسط T (او ثابت الزمن)

العمر المتوسط لنواة هو الزمن المتوسط لحياة نواة مشعة.

د/ ثابت الإشعاعية λ

ثابت الإشعاعية λ هو احتمال تفكك نواة واحدة في ثانية واحدة.

2/ التذكير بالعبارات

$\boxed{A=\lambda N=\lambda N_0\, e^{-\lambda t}}$ وحدة (A) هي البكريل (Bq).

$\boxed{t_{\frac{1}{2}}=\frac{ln\,2}{\lambda}}$ وحدة $(t_{\frac{1}{2}})$ هي الثانية (S).

$\boxed{\tau=\frac{1}{\lambda}}$ وحدة (τ) هي الثانية (S).

التمرين 13

باستعمال عداد "جيجر-مولر"، تم قياس النشاط الإشعاعي لعينة من منبع إشعاعي هو اليود (131) اي $({}^{131}I)$، ومن ثم تم حساب عدد الأنوية المتبقية (N) في ازمنة مناسبة لها، فكانت النتائج كالتالي :

$N\times10^{20}$	1,41	0,71	0,35	0,18
$t(j)$(يوم)	0	7,6	15,2	22,8

1/ مثل البيان $N=f(t)$.

2/ حدد من البيان :

أ/ فترة نصف العمر $t_{\frac{1}{2}}$ ،

ب/ ثابت الإشعاعية λ،

ج/ العمر المتوسط (τ) (أو الثابت الزمني)،

د/ النشاط الإشعاعي (A_0) و(A_1) في اللحظتين $(0s)$ و$(t_{\frac{1}{2}})$.

3/ بفرض ان هذه العينة من اليود حقنت في الغدة الدرقية لمريضة :

أ/ احسب الكتلة الابتدائية (m_0) للعينة،

ب/ كم يبقى من هذه العينة بعد $60,8$ يوما ؟

4/ أ/ أيُّ معادلة يمكن إعطاؤها للمنحني السابق من بين المعادلات التالية ؟

$$y=bx^{-2} \quad ; \quad y=be^{-ax} \quad ; \quad y=be^{+ax}$$

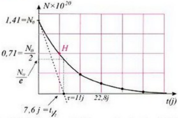
على اعتبار ان : $(b=N_0)$ و$(a=\lambda)$.

ب/ اكتب حينئذ قانون التناقص الإشعاعي.

الحل

1/ البيان $N=f(t)$

2/ أ/ تحديد فترة نصف العمر $t_{\frac{1}{2}}$



- اللحظة ($t=0j$) توافق العدد الابتدائي (N_0) للأنوية. إذن : $N_0=1,41.10^{20}$
- اللحظة ($t_{\frac{1}{2}}$) توافق العدد ($\frac{N_0}{2}$) لأنوية. وبما أن : $\frac{N_0}{2}=0,71.10^{20}$ فبإسقاط هذه القيمة على المنحني البياني نجد أنها تتقاطع معه في النقطة (H)، نعين فاصلة النقطة (H) فنجد :

$\boxed{t_{\frac{1}{2}}=7,6j}$ وهو محدد في البيان السابق.

ب/ حساب ثابت الإشعاعية λ (ثابت التفكك)

نعلم أن : $t_{\frac{1}{2}}=\frac{ln2}{\lambda}$ ومنه : $\boxed{\lambda=\frac{ln2}{t_{\frac{1}{2}}}}$

لدينا : $t_{\frac{1}{2}}=7,6j$ نحوله إلى الثواني (s) ، اليوم ($1j$) فيه (24سا)، والساعة فيها ($3600s$)، إذن :

$t_{\frac{1}{2}}=7,6\times24\times3600=656640s$

نعوض في العبارة السابقة فنجد :

$$\lambda=\frac{ln2}{656640}=\frac{0,693}{656640}\ \ ;\ \ \boxed{\lambda\approx1,06.10^{-6}\ s^{-1}}$$

ج/ حساب العمر المتوسط (أو ثابت الزمن) (τ)

- الطريقة البيانية

نرسم مماسا (Δ) للمنحني في اللحظة ($t=0s$) ونمدده فيتقاطع مع المحور (t) في نقطة فاصلتها هي (τ). بالرجوع إلى البيان نجد : $\boxed{\tau\approx11j}$

- الطريقة الحسابية

نعلم أن : $\boxed{\tau=\frac{1}{\lambda}}$

$$\tau=\frac{1}{1,06.10^{-6}}=943396,2\ s$$

نحول الثواني (s) إلى الأيام (j) : $\tau=\frac{943396,2}{3600\times24}=10,9\ j$

$\boxed{\tau\approx10,9j}$

وهي تقريبا نفس القيمة التي وجدناها بالطريقة البيانية.

د/ تحديد النشاط الإشعاعي A_0

نعلم ان $\boxed{A=\lambda N}$

وفي اللحظة ($t=0s$) لدينا ($N=N_0$) ، إذن : $A_0=\lambda N_0$

$$A_0=1,06.10^{-6}.1,41.10^{20}\approx1,5.10^{14}$$

$$\boxed{A_0=1,5.10^{14}désintégration/seconde=1,5.10^{14}\ Bq}$$

النشاط الإشعاعي (A_1) في اللحظة ($t_{\frac{1}{2}}$)

في اللحظة ($t_{\frac{1}{2}}$) لدينا : $\frac{N_0}{2}$ ، إذن : $\boxed{A_1=\lambda\frac{N_0}{2}=\frac{A_0}{2}}$

ومنه : $\boxed{A_1=0,75.10^{14}dési/s=7,5.10^{13}\ Bq}$

3/ أ/ حساب الكتلة الابتدائية m_0 للعينة

- طريقة 1 : نستعمل القاعدة الثلاثية التالية :

$$6,023.10^{23}\rightarrow131\ g$$
$$1,41.10^{20}\rightarrow m_0$$
$$\Rightarrow\ m_0=\frac{1,31.10^{20}.131}{6,023.10^{23}}$$
$$\boxed{m_0=0,0307g=30,7mg}$$

- طريقة 2 :

$$\frac{m_0}{N_0}=\frac{M}{\mathcal{N}}\ ;\ \boxed{m_0=\frac{N_0M}{\mathcal{N}}}$$

M : الكتلة المولية لعينة اليود ^{131}I
N_0 : العدد الابتدائي
$\mathcal{N}$: عدد أفوغادرو

$$m_0=\frac{1,41.10^{20}.131}{6,023.10^{23}}\ ;\ m_0=0,0307g=30,7mg$$

ب/ حساب الكتلة المتبقية من العينة بعد $60,8$ يوم

في اللحظة ($t=0s$) كتلة العينة هي $m_0=30,7mg$

في اللحظة ($t_1=t_{\frac{1}{2}}$) يبقى من العينة كتلة تساوي $\frac{m_0}{2}$

في اللحظة ($t_2 = 2\,t_{\frac{1}{2}}$) يبقى من العينة كتلة تساوي $\frac{m_0}{2^2} = \frac{\frac{m_0}{2}}{2}$

في اللحظة ($t_3 = 3\,t_{\frac{1}{2}}$) يبقى من العينة كتلة تساوي $\frac{m_0}{2^3}$

في اللحظة ($t_4 = 4\,t_{\frac{1}{2}}$) يبقى من العينة كتلة تساوي $\frac{m_0}{2^4}$

في اللحظة ($t = 60,8\ j$) أي ($t = 8\,t_{\frac{1}{2}}$) يبقى من العينة $\frac{m_0}{2^8}$

ومنه كتلة العينة بعد هي : $\frac{30,7}{2^8} = 1,20\ mg$

وبعد مدة تبقى آثار قليلة من العينة ^{131}I في الغدة الدرقية للمريضة، بدون خطر يذكر منها، لذا يستعمل اليود لعلاج الغدة الدرقية.

نتيجة هامة

إذا كان $t = n\,t_{\frac{1}{2}}$ فإنه يبقى من العينة كتلة $m = \frac{m_0}{2^n}$. يمكن استعمال هذه النتيجة في حل التمرين : $n = \frac{t}{t_{\frac{1}{2}}} = \frac{60,8}{7,6} = 8$ ، إذن : $m = \frac{m_0}{2^8}$.

4/ أ/ المعادلة التي تحقق قانون التناقص الإشعاعي هي المعادلة : $\boxed{y = be^{-ax}}$

مع : $b=N_0$ و $a=\lambda$.

ب/ قانون التناقص الإشعاعي يشبه المعادلة السابقة، لذا نكتب : $\boxed{N = N_0\, e^{-\lambda t}}$

التمرين 14

الراديوم ($^{226}_{88}Ra$) عنصر مشع يتفكك إلى غاز الرادون ($^{222}_{86}Rn$) وجسيم α. له نصف عمر يساوي $1620ans$.

1/ اكتب معادلة التفكك.

2/ احسب : أ/ ثابت التفكك الإشعاعي للراديوم ،

ب/ النشاط الإشعاعي لـ ($1g$) من الراديوم، ثم قارنه مع الكوري ($1Ci$). ماذا تستنتج ؟

ج/ الزمن اللازم لكي ينقص النشاط الإشعاعي للراديوم إلى ثمن قيمته الابتدائية ،

د/ عدد جسيمات (α) المنطلقة من ($1\mu g$) من الراديوم.

يعطى : $1Ci = 3,7\times10^{10}Bq$

الحل

1/ معادلة تفكك الراديوم : يتفكك (Ra) إلى (Rn) مضدرا جسيم α (أي نواة الهيليوم $^{4}_{2}He$) ،

$$^{226}_{88}Ra \longrightarrow ^{222}_{86}Rn + ^{4}_{2}He$$

2/ أ/ حساب ثابت التفكك الإشعاعي λ للراديوم

نعلم أن $t_{\frac{1}{2}} = \frac{ln2}{\lambda}$ ، ومنه : $\boxed{\lambda = \frac{ln2}{t_{\frac{1}{2}}}}$

لكن : $t_{\frac{1}{2}} = 1620ans = 1620\times365\times24\times3600 = 5,1.10^{10}\,s$

$$\lambda = \frac{0,693}{5,1.10^{10}} = 1,36.10^{-11}\ ;\ \boxed{\lambda = 1,36.10^{-11}\,s^{-1}}$$

ب/ النشاط الإشعاعي (A) لـ ($1g$)

يعطى بالعبارة : $\boxed{A=\lambda N}$

حيث (N) عدد الأنوية الموجودة في ($1g$) من $^{226}_{88}Ra$ ، ونعينه كالتالي :

$$\boxed{N = \frac{m}{M}\mathcal{N}}\ ;\ N = \frac{1}{226}\times6,023.10^{23}\ ;\ \boxed{N = 2,66.10^{21}\ \text{نواة}}$$

نعوض الآن في عبارة (A) فنجد : $A = 1,36.10^{-11}\times2,66.10^{21}$

$$\boxed{A = 3,6.10^{10}\,Bq \approx 1Ci}$$

إن النشاط الإشعاعي الناتج عن ($1g$) من $^{226}_{88}Ra$ اصطلح عليه سابقا على أنه يساوي (1 كوري) (أي $1Ci$).

ج/ حساب الزمن (t) اللازم ليصبح النشاط الإشعاعي A مساويا $\frac{A_0}{8}$

نعلم أن : $A=A_0\,e^{-\lambda t}$ ، لكن : $A=\frac{A_0}{8}$ ، إذن : $\frac{A_0}{8} = A_0\,e^{-\lambda t}$ ، أي : $\frac{1}{8} = e^{-\lambda t}$

$$ln\,\frac{1}{8} = ln\,e^{-\lambda t} = -\lambda t\ ;\ \boxed{t = \frac{ln\frac{1}{8}}{-\lambda}}$$

$$t = \frac{ln\frac{1}{8}}{-1,36.10^{-11}} = \frac{-2,079}{-1,36.10^{-11}}\ ;\ \boxed{t = 1,53.10^{11}s}$$

أو بالسنوات : $t = \frac{1,53.10^{11}}{365\times24\times3600} \approx 4852a$

د/ عدد جسيمات (α) المنطلقة من ($1\mu g$) من Ra

كل نواة في ($1\mu g$) من العينة يمكن أن تصدر جسيما (α)

فعدد جسيمات (α) الممكن انطلاقها يساوي عدد الأنوية الموجودة في $(1\mu g)$ من العينة.
نحسب عدد الأنوية في $(1\mu g)$ من $^{226}_{88}Ra$:

$$N = \frac{m}{M}\mathcal{N}= \frac{1.10^{-6}}{226}\times 6,023.10^{23} \;;\; \boxed{N = 2,66.10^{15} \text{ نواة}}$$

ومنه عدد جسيمات (α) الممكن انطلاقها هو : $2,66.10^{15}$

التمرين 15 (وضعية ادماجية)

الكربون 14 هو عنصر مشع طبيعيا، فهو موجود في الطبيعة ويصدر جسيمات β^- بنصف عمر يساوي $(5730ans)$، كما نعتبره عنصرا مشعا صناعيا لأنه يتشكل باستمرار في طبقات الجو العليا، نتيجة اصطدام النترونات الآتية من الإشعاع الكوني بالأزوت $(^{14}_{7}N)$ فينتج $(^{14}_{6}C)$ وجسيم من الشكل $^{A}_{Z}X$.

1/ أ/ اكتب معادلة تفكك $^{14}_{6}C$.
ب/ اكتب معادلة تشكل $^{14}_{6}C$ مع استنتاج طبيعة الجسيم $^{A}_{Z}X$.

2/ يحصل توازن إشعاعي بين التفكك والتشكل لـ $^{14}_{6}C$ ، وهذا المتشكل يتأكسد إلى ثنائي أكسيد الكربون $(^{14}CO_2)$، فتستنشقه جميع الكائنات الحية (نبات، حيوان، إنسان)، لكن تقدير العلي القدير جعل تركيز ^{14}C الذي نستنشقه، وفي الغذاء الذي نأكله ضئيلا جدا، فتركيزه في الجسم لا يساوي إلا حوالي $(10^{-12}\%)$ من تركيز الكربون 12 (اي $^{14}_{6}C$) الموجود في النسيج الحي.
وتحتوي جميع الكائنات الحية على كمية من $(^{14}_{6}C)$ في توازن مع $(^{14}_{6}C)$ الموجود في الجو. فإذا جاء أجل الموت للكائن الحي، توقف تنفسه، وتوقف أخذه للغذاء، فيتوقف نهائيا استنشاقه لـ $(^{14}_{6}C)$ الموجود في الجو، فيبدأ $(^{14}_{6}C)$ الموجود في الكائن الميت من لحظة الموت بالتناقص الإشعاعي (إصدار β^-) بنصف عمر يساوي $(5730ans)$ دون أن يُعوّض من الجو، وبهذا ينتهي التوازن الإشعاعي عند الموت.
وعلى هذا الأساس يحتوي الخشب القديم الذي قطعت أو ماتت أشجاره على كمية أقل مما في الخشب الجديد. وأيضا تحتوي العظام القديمة على كمية من $(^{14}_{6}C)$ أقل من العظام الجديدة.
فبقياس تركيز $(^{14}_{6}C)$ يمكن حساب زمن حدوث الوفاة. لهذا يعتبر (^{14}C) مؤرخا ممتازا للأنثروبولوجيين (*anthropologistes*) الباحثين في علم الإنسان، من حيث نشوئه وتطوره، وعاداته واعتقاداته. واختيارهم لـ $(^{14}_{6}C)$ بسبب فترة نصف العمر له وهي 5730 سنة، التي تلائم "عمر التاريخ الثقافي للشعوب والأمم".
عمليا، يتم تحديد عمر خشب قديم كما يلي :
- يقاس النشاط الإشعاعي A لكتلة عينة من خشب قديم.
- ثم يقاس النشاط الإشعاعي A_0 لنفس الكتلة من عينة أخرى لخشب جديد.

أ/ في ضوء هذا النص، ما معنى التوازن الإشعاعي لـ (^{14}C) في الكائن الحي ؟
ب/ لماذا يتناقص (^{14}C) في الكائن الحي بموته ؟
ج/ لماذا يلائم (^{14}C) عمر التاريخ الثقافي للحضارات ؟

3/ عيّنة من خشب قديم وجد أنها تصدر 325 تفككا في الدقيقة، وهذا من أجل كل $(1g)$ من فحم العينة. وعينة أخرى من خشب جديد لها نفس كتلة الخشب القديم تصدر 1350 تفككا في الدقيقة. ما هو عمر الخشب القديم ؟

الحل

1/ أ/ معادلة تفكك $(^{14}_{6}C)$

بما أن $(^{14}_{6}C)$ يحدث له تفكك β^- ، فمعادلة التفكك تكون كالتالي :

$$^{14}_{6}C \longrightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{A}_{Z}Y$$

- حسب قانون انحفاظ عدد النويات ، $14=0+A$ ، وبالتالي ، $A=4$
- حسب قانون انحفاظ الشحنة ، $6=-1+Z$ ، وبالتالي ، $Z=7$

وعليه تكون النواة $^{A}_{Z}Y$ هي $^{14}_{7}Y$ اي $^{14}_{7}N$ ، لذا نكتب من جديد معادلة التفكك كما يلي :

$$\boxed{^{14}_{6}C \longrightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{14}_{7}N}$$

ب/ معادلة تشكل $(^{14}_{6}C)$

يتشكل $(^{14}_{6}C)$ نتيجة اصطدام النترونات $(^{1}_{0}n)$ السريعة بـ $(^{14}_{7}N)$ ، فنكتب :

$$^{1}_{0}n + {}^{14}_{7}N \longrightarrow {}^{14}_{6}C + {}^{A}_{Z}X$$

لدينا حسب قانوني حفظ الشحنة وعدد النويات :

$$1+14=14+A \;;\; A=1$$
$$0+7=6+Z \;;\; Z=1$$

إذن فالجسيم $^{A}_{Z}X$ هو البروتون $(^{1}_{1}H)$ او $(^{1}_{1}P)$، ومعادلة التفكك هي :

$$^{1}_{0}n + {}^{14}_{7}N \longrightarrow {}^{14}_{6}C + {}^{1}_{1}H$$

2/ أ/ التوازن الإشعاعي : في ضوء هذا النص نقصد بالتوازن الإشعاعي أن نسبة $(^{14}_{6}C)$ الموجودة داخل الكائنات الحية تتناسب مع $(^{14}_{6}C)$ الموجود في الجو. فإذا مات الكائن الحي، تبدأ كمية $(^{14}_{6}C)$ الموجودة فيه بالتناقص، بينما $(^{14}_{6}C)$ الموجود في الجو يبقى هو هو دون تناقص، وبهذا يختل التوازن الإشعاعي.

ب/ يتناقص $(^{14}_{6}C)$ في الكائن الحي من لحظة موته، لأنه لم يعد قادرا على استنشاقه من الجو عن طريق $(^{14}CO_2)$، ولا قادرا على تناوله في الأغذية.

ج/ إن الكربون 14 له فترة نصف عمر $t_{\frac{1}{2}}=5730années$ ، وهذه الفترة تلائم تاريخ الحضارات القديمة.

3/ حساب عمر الخشب القديم

- النشاط الإشعاعي A_0 للخشب القديم هو $A=\lambda N$
- النشاط الإشعاعي A للخشب الجديد هو $A_0=\lambda N_0$

$$\frac{A}{A_0}=\frac{\lambda N}{\lambda N_0} \quad ; \quad \frac{A}{A_0}=\frac{N}{N_0} \;\; ......(1)$$

لكن، حسب قانون التناقص الإشعاعي، $N=N_0 e^{-\lambda t}$، إذن، $\frac{N}{N_0}=e^{-\lambda t}$

نعوض في المعادلة (1) فنجد، $\frac{A}{A_0}=e^{-\lambda t}$

$$ln\frac{A}{A_0}=ln\, e^{-\lambda t}=-\lambda t$$

$$\boxed{t=-\frac{1}{\lambda}\, ln\left(\frac{A}{A_0}\right)} \;\; ....(2)$$

لكن، $t_{1/2}=\frac{ln\,2}{\lambda}$، إذن، $\lambda=\frac{ln\,2}{t_{1/2}}$، نعوض في العبارة فنجد،

$$\boxed{t=\frac{-t_{1/2}}{ln\,2}\, ln\left(\frac{A}{A_0}\right)}$$

$A=325\ Bq\ ,\ A_0=1350\ Bq\ ,\ t_{1/2}=5730\ ans$

نعوض فنجد، $t=\frac{-5730}{0{,}693}\, ln\left(\frac{325}{1350}\right)$

$$\boxed{t\approx 11774{,}5\ ans}$$

ونظرا لأن العملية فيها تقريب، لا نحتفظ إلا بالثلاثة أرقام المعنوية الموجودة على يسار العدد، والبقية نجعلها أصفارا، $\boxed{t\approx 11700\ ans}$

التمرين 16

في عام 1919 ولأول مرة في تاريخ البشرية استطاع رذرفورد أن يحول نواة النتروجين $(^{14}_{7}N)$ إلى نظير الأكسيجين $(^{17}_{8}O)$ كما هو موضح بالوثيقة التالية، كما اكتشف البروتون.

اكتب معادلة التفاعل النووي المستحدث.

الحل

$$^{14}_{7}N+\alpha \longrightarrow {}^{17}_{8}O+{}^{A}_{Z}X$$

لكن جسيم α هو في الأصل نواة الهيليوم $(^{4}_{2}He)$

لذا نكتب من جديد، $^{14}_{7}N+{}^{4}_{2}He \longrightarrow {}^{17}_{8}O+{}^{A}_{Z}X$

حسب قانون انحفاظ الشحنة لدينا، $7+2=8+Z$، ومنه، $\boxed{Z=1}$

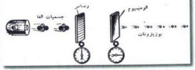
حسب قانون انحفاظ عدد النويات، $14+4=17+A$، ومنه، $\boxed{A=1}$

فنجد أن النواة $^{A}_{Z}X$ هي البروتون $^{1}_{1}P$ (أو نواة الهيدروجين $^{1}_{1}H$)، وفي الأخير نكتب،

$$\boxed{^{14}_{7}N+{}^{4}_{2}He \longrightarrow {}^{17}_{8}O+{}^{1}_{1}P}$$

التمرين 17 (وضعية ادماجية)

تم الحصول على ظاهرة النشاط الإشعاعي الصناعي (*la radioactivité artificielle*) لأول مرة في تاريخ البشرية من قبل العالمين (فردريك جوليو) وزوجته (إيرين كوري)، إذ قاما سنة 1934م بقذف صفيحة الومنيوم (^{27}Al) بجسيمات α (التي يصدرها البولونيوم Po) فحصلا على جسيم هو البوزيترون $(^{0}_{+1}e)$ وجسيم آخر هو النترون $(^{1}_{0}n)$ (الوثيقة 1)، ونواة $^{A}_{Z}X$.



1/ اكتب معادلة التفاعل النووي الحادث الذي يُنَمْذِجُ الظاهرة الممثلة بالوثيقة 1 محددا النواة $(^{A}_{Z}X)$ الناتجة. يعطى، $_{16}S$ ، $^{30}_{14}Si$ ، $^{27}_{13}Al$ ، $^{30}_{15}P$.

2/ إلى هذا الحد كان الأمر عاديا بالنسبة إلى العالمين، فقد سبقهما إلى إجراء تفاعلات نووية مستحدثة بعض العلماء أمثال رذرفورد وفيرمي وغيرهما. لكن الأمر الجديد الذي أثار دهشتهما وحيّرهما أنه عند إبعادهما لمصدر جسيمات α أو وضع حاجز من الرصاص بين صفيحة Al وجسيمات α، أي بعد توقيف قذف صفيحة Al اختفت النترونات تماما كما كان متوقعا، غير أن انبعاث البوزيترونات $(^{0}_{+1}e)$ استمر رغم ذلك (الوثيقة 2). فمن أين أتت هذه البوزيترونات رغم أن التفاعل النووي المستحدث توقف ؟ هكذا تساءل العالمان.

وتبيّن لهما أن في كل ($2,5min$) يتناقص عدد البوزيترونات المنبعثة مرتين، وبدا لهما أن هذه البوزيترونات تصدر من عنصر مشع لم يُعرف من ذي قبل ولم تُعرف فترة نصف عمره ($t_{1/2}=2,5min$ لأي عنصر مشع آخر). علاوة على ذلك، تميزت ظاهرة النشاط الإشعاعي الجديد بأن صفيحة (Al) تعاود إطلاق البوزيترونات إذا ما تم قذفها من جديد بجسيمات α ، وهذا الأمر لا يحدث في حالة النشاط الإشعاعي الطبيعي.

وبعد دراسة معمقة تأكد (فردريك) و(إيرين) أنه عند قذف (Al) بجسيمات (α) يتحول جزء من نوى ($^{27}_{13}Al$) إلى نوى الفوسفور المشع ($^{30}_{15}P$)، وهذه النوى هي التي تصدر البوزيترونات ($^{0}_{+1}e$) وتتحول إلى نوى مستقرة هي نوى السيليكون ($^{30}_{14}Si$).

أ/ في ضوء ما سبق كيف تتأكد من أن الفوسفور ($^{30}_{15}P$) هو عنصر مشع اصطناعيا ويحدث له تفكك β^+ ؟

ب/ اكتب من جديد التفاعل النووي الحادث بين ($^{27}_{13}Al$) و($^{4}_{2}He$).

ج/ تأكد من أن تفكك ($^{30}_{15}P$) هو تفكك β^+.

د/ حدد فترة نصف العمر للعنصر المشع.

3/ قيِّم نتائج تجربة (فردريك) و(إيرين) التي استحقا من أجلها جائزة نوبل للفيزياء سنة 1935م.

الحل

1/ معادلة التفاعل النووي الحادث : تمّ قذف النواة ($^{27}_{13}Al$) بجسيم α (أي بنواة الهيليوم $^{4}_{2}He$) فنتج بوزيترون ($^{0}_{+1}e$) ونترون ($^{1}_{0}n$) ونواة ($^{A}_{Z}X$) سنحددها بكتابة معادلة التفاعل النووي المستحدث ثم تطبيق قانوني الانحفاظ (انحفاظ Z وانحفاظ A).

$$^{4}_{2}He+{}^{27}_{13}Al \longrightarrow {}^{0}_{+1}e+{}^{1}_{0}n+{}^{A}_{Z}X$$

قانون انحفاظ Z يؤدي إلى : $2+13=1+0+Z$ ، ومنه نجد : $\boxed{Z=14}$

قانون انحفاظ A يؤدي إلى : $4+27=0+1+A$ ، ومنه نجد : $\boxed{A=30}$

فالنواة ($^{A}_{Z}X$) هي ($^{30}_{14}X$) وبالاستفادة من الأنوية المعطاة، فالنواة هي نواة السيليكون ($^{30}_{14}Si$).

2/ أ/ نتأكد من أن الفوسفور ($^{30}_{15}P$) هو عنصر مشع اصطناعيا لأنه لم يكن موجودا في البداية، وإنما كانت فقط نوى الألومنيوم ($^{27}_{13}Al$) هي الموجودة، وعند قذفها بجسيمات α ظهرت جسيمات هي البوزيترونات ($^{0}_{+1}e$) والنترونات ($^{1}_{0}n$). وعندما تم إبعاد جسيمات α وتوقف قذف (Al) لماذا استمرت البوزيترونات ($^{0}_{+1}e$) في الانبعاث ؟

للإجابة عن هذا التساؤل يتحتم علينا افتراض ظهور عنصر مشع لم يكن موجودا هو ($^{30}_{15}P$)، إذ تمّ إنتاجه بعملية قذف (Al) بـ α.

في الأخير نستنتج أن ($^{30}_{15}P$) هو عنصر مشع اصطناعيا ويحدث له تفكك (β^+)، لأنه يصدر البوزيترونات ($^{0}_{+1}e$).

ب/ التفاعل النووي الحادث بين (Al) و($^{4}_{2}He$)

$$^{4}_{2}He+{}^{27}_{13}Al \longrightarrow {}^{1}_{0}n+{}^{30}_{15}P$$

ج/ يُحدث الفوسفور المشع ($^{30}_{15}P$) تفككا (β^+) كما يلي :

$$^{30}_{15}P \longrightarrow {}^{0}_{+1}e+{}^{30}_{14}Si$$

ملاحظة هامة : لو جمعنا المعادلتين النوويتين السابقتين (السؤالان ب، ج) لوجدنا المعادلة النووية التي حصلنا عليها في السؤال 1.

د/ فترة نصف العمر للعنصر المشع صناعيا وهو ($^{30}_{15}P$) تعطى بالقيمة ($t_{1/2}=2,5min$).

3/ تقييم نتائج تجربة (فردريك) و(إيرين)

استطاع هذان العالمان أن يحدثا نشاطا إشعاعيا من مادة لم تكن مشعة أصلا، وسُمّي ذلك بالنشاط الإشعاعي الصناعي، ونحصل به على التفكك β^+.

التمرين 18

1/ باستعمال قانون انحفاظ الشحنة الكهربائية النووية وقانون انحفاظ عدد النويات املأ الفراغات (...) في المعادلات النووية التالية.

a) $^{10}_{5}B+{}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{4}_{2}He+{}^{\cdots}_{\cdots}Li$

b) $^{1}_{0}n+{}^{235}_{92}U \longrightarrow {}^{90}_{\cdots}Rb+{}^{\cdots}_{55}Cs+2{}^{1}_{0}n$

c) $^{1}_{0}n+{}^{235}_{92}U \longrightarrow {}^{90}_{38}Sr+{}^{143}_{54}Xe+\cdots{}^{1}_{0}n$

d) $^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{4}_{2}He+\cdots$

e) $^{56}_{27}Co \longrightarrow {}^{56}_{28}Fe+\cdots$

f) $^{121}_{51}Sb+\cdots \longrightarrow {}^{121}_{52}Te+{}^{1}_{0}n$

g) $\cdots+{}^{4}_{2}He \longrightarrow {}^{133}_{57}La+4{}^{1}_{0}n$

h) $^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{239}_{93}Np+\cdots$

يعطى جزء من عناصر الجدول الدوري : $_{55}Cs$ ، $_{90}Th$ ، $_{84}Po$ ، $_{83}Bi$ ، $_{82}Pb$.

2/ ميِّز التفاعلات النووية السابقة عن بعضها.

الحل

1/ ملء الفراغات وكتابة المعادلات النووية

المعادلة (a) : $^{10}_{5}B+{}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{4}_{2}He+{}^{A}_{Z}Li$

حسب قانون انحفاظ A لدينا : $10+1=4+A$ ، إذن : $A=7$

حسب قانون انحفاظ Z لدينا ، $5+0=2+Z$ ، إذن ، $Z=3$.

ومنه النواة ($^{A}_{Z}Li$) هي ($^{7}_{3}Li$) ، لذلك نكتب التفاعل النووي من جديد كما يلي :

$$\boxed{^{10}_{5}B+^{1}_{0}n \longrightarrow ^{4}_{2}He+^{7}_{3}Li}$$

المعادلة (b) : نضع (A) في مكان فراغ ($^{...}_{55}Cs$) و(Z) في مكان فراغ ($^{90}_{...}Rb$) فتكون المعادلة النووية كما يلي :

$$^{1}_{0}n+^{235}_{92}U \longrightarrow ^{90}_{Z}Rb+^{A}_{55}Cs+2^{1}_{0}n$$

حسب قانون انحفاظ A لدينا ، $1+235=90+A+2(1)$ ، إذن ، $A=144$

حسب قانون انحفاظ Z لدينا ، $0+92=Z+55+2(0)$ ، إذن ، $Z=37$

ومنه النواة ($^{A}_{Z}Li$) هي ($^{7}_{3}Li$) ، لذلك نكتب التفاعل النووي من جديد كما يلي :

$$\boxed{^{1}_{0}n+^{235}_{92}U \longrightarrow ^{90}_{37}Rb+^{144}_{55}Cs+2^{1}_{0}n}$$

المعادلة (c) : في فراغ ($^{1}_{0}n$ ...) نضع (a) ونكتب المعادلة النووية :

$$^{1}_{0}n+^{235}_{92}U \longrightarrow ^{90}_{38}Sr+^{143}_{54}Xe+a\,^{1}_{0}n$$

• نستعمل قانون انحفاظ Z فنجد ، $0+92=38+54+a(0)$ ، $92=92$ ، فلا يمكننا تعيين a.

• نستعمل قانون انحفاظ A فنجد ، $1+235=90+143+a(1)$ ، $\boxed{a=3}$.

وهكذا تكون المعادلة النووية :

$$\boxed{^{1}_{0}n+^{235}_{92}U \longrightarrow ^{90}_{38}Sr+^{143}_{54}Xe+3\,^{1}_{0}n}$$

المعادلة (d) :

$$^{238}_{92}U \longrightarrow ^{4}_{2}He+^{A}_{Z}X$$

$$A=238-4=234 \quad ; \quad Z=92-2=90$$

والنواة ($^{234}_{90}X$) هي نواة الثوريوم ($_{90}Th$)، إذن :

$$\boxed{^{138}_{92}U \longrightarrow ^{4}_{2}He+^{234}_{90}Th}$$

المعادلة (e) : نعطي للجسيم الناتج الرمز النووي ($^{A}_{Z}X$) ونكتب المعادلة النووية :

$$^{56}_{27}Co \longrightarrow ^{56}_{28}Fe+^{A}_{Z}X$$

حسب قانون انحفاظ A نكتب ، $56=56+A$ ، إذن ، $A=0$

حسب قانون انحفاظ Z نكتب ، $27=28+Z$ ، إذن ، $Z=-1$

وعليه يكون رمز الجسيم النووي هو ($^{0}_{-1}X$) أي ($^{0}_{-1}e$) (الإلكترون او β^{+}) ،

$$\boxed{^{56}_{27}Co \longrightarrow ^{56}_{28}Fe+^{0}_{-1}e}$$

المعادلة (f) : نرمز بـ ($^{A}_{Z}X$) إلى الفراغ الموجود في المعادلة ونكتب :

$$^{121}_{51}Sb+^{A}_{Z}X \longrightarrow ^{121}_{52}Te+^{1}_{0}n$$

لدينا ، $51+Z=52+0$ ، إذن ، $Z=1$

كذلك ، $121+A=121+1$ ، إذن ، $A=1$

فالنواة الناتجة هي نواة الهيدروجين ($^{1}_{1}X$) أي ($^{1}_{1}H$) (او جسيم هو البروتون $^{1}_{1}P$)، وهكذا نكتب المعادلة النووية :

$$\boxed{^{121}_{51}Sb+^{1}_{1}P \longrightarrow ^{121}_{52}Te+^{1}_{0}n}$$

المعادلة (g) : بنفس الطريقة السابقة نكتب :

$$^{A}_{Z}X+^{4}_{2}He \longrightarrow ^{133}_{57}La+4^{1}_{0}n$$

مع ، $A+4=133+4(1)$ ، إذن ، $A=133$

كذلك ، $Z+2=57+4(0)$ ، إذن ، $Z=55$

وبالاستفادة بالأنوية المعطاة نجد أن النواة ($^{133}_{55}X$) هي نواة السيزيوم ($_{55}Cs$)، فنكتب المعادلة النووية كالتالي :

$$\boxed{^{133}_{55}Cs+^{4}_{2}He \longrightarrow ^{133}_{57}La+4^{1}_{0}n}$$

المعادلة (h) : $^{138}_{92}U \longrightarrow ^{239}_{93}Np+^{A}_{Z}X$

بسرعة نجد ، $A=0$ و $Z=-1$

ومنه ($^{A}_{Z}X$) هو الإلكترون ($^{0}_{-1}e$) (او β^{-})، إذن نكتب المعادلة النووية كما يلي :

$$\boxed{^{138}_{92}U \longrightarrow ^{239}_{93}Np+^{0}_{-1}e}$$

/2 تمييز المعادلات النووية عن بعضها

- المعادلات a ، f ، g هي تفاعلات نووية مستحدثة (*réactions nucléaires provoquées*) .
- المعادلتان b ، c هما تفاعلا انشطار (*réactions de fission*) .
- المعادلة النووية d هي تفكك α .
- المعادلة e هي تفكك β^{-} .
- المعادلة النووية h هي تفكك β^{-} .

التمرين 19

1/ أ/ ذكّر بقيمة وحدة الكتل الذرية (u) وما الفائدة من استعمالها في مجال الفيزياء النووية.

ب/ حوّل كتل الجسيمات التالية وهي الإلكترون (e) والبروتون (p) والنترون (n) من الـ (kg) إلى وحدة الكتل الذرية (u) :

$m_e=9,1093897.10^{-31}kg$

$m_p=1,6726231.10^{-27}kg$

$m_n=1,6749286.10^{-27}kg$

2/ أ/ إذا علمت أن الإلكترون-فولط ($1ev$) هو الطاقة التي يكتسبها إلكترون عندما يُطبق عليه توتر كهربائي يساوي ($1v$)، فاحسب قيمة هذه الطاقة بالجول (j) واستنتج قيمة طاقة 1 ميغا إلكترون-فولط ($1Mev$).

ب/ أعط المكافئ الطاقوي لوحدة الكتل الذرية، أي لـ ($1u$). تعطى سرعة الضوء في الخلاء :

$C=3.10^8 m/s$

ج/ احسب الطاقة السكونية (طاقة الكتلة) لكل من الإلكترون (e) والبروتون (p) والنترون (n) بالجول (j) وبالميغا إلكترون-فولط ($1Mev$).

الحل

1/ أ/ وحدة الكتل الذرية (u)

وحدة الكتل الذرية (u) هي $\frac{1}{12}$ من كتلة ذرة واحدة من الكربون ($^{12}_{6}C$).

قيمة وحدة الكتل الذرية

$$1u=\frac{1}{12}M(^{12}_{6}C)$$

بحيث $M(^{12}_{6}C)$ هي كتلة 1 ذرة من ($^{12}_{6}C$) التي نحسبها كما يلي :

$$12\,g \longrightarrow \mathcal{N}_A \qquad ; \quad M(^{12}_{6}C)=\frac{12}{\mathcal{N}_A}\ (grammes)$$
$$M \longrightarrow 1 \text{ ذرة}$$

مع () هو عدد أفوغادرو : $\mathcal{N}_A=6,023.10^{23}$

ومنه نجد : $1u=\frac{1}{12}\cdot\frac{12}{\mathcal{N}_A}$ ، إذن : $\boxed{1u=\frac{1}{\mathcal{N}_A}(g)}$

$$1u=\frac{1}{6,02\ .\ 10^{23}}=1,660543.10^{-24}g=1,660543.10^{-27}kg$$

$$\boxed{1u=\frac{1}{\mathcal{N}_A}=1,66.10^{-27}kg}$$

أما الفائدة من استعمال الوحدة (u) في مجال الفيزياء النووية فتكمن في أن كل الأجسام الذرية والأجسام تحت الذرية (النويات والجسيمات الأساسية) كتلها مضاعفات للعدد (10^{-27})، وباستعمال الوحدة (u) يُحذف هذا العدد، كما سنرى أثناء الإجابة عن السؤال الموالي.

ب/ تحويل كتل الجسيمات من (kg) إلى (u)

نعلم أن : $1u=1,660543.10^{-27}kg$ ، إذن : $10^{-27}kg=\frac{1u}{1,660543}$

$$m_e=9,1093897.10^{-4}.10^{-27}kg=9,1093897.10^{-4}.\frac{1u}{1,660543}=0,000548\,u$$

$$m_p=1,6726231.10^{-27}kg=1,6726231.\frac{1u}{1,660543}=1,00728\,u$$

$$m_n=1,6749286.10^{-27}kg=1,6749286.\frac{1u}{1,660543}=1,00866\,u$$

نلخص النتائج السابقة في الجدول التالي :

الجسيم	الرمز النووي	الكتلة بـ (kg)	الكتلة بـ (u)
الإلكترون	$^{0}_{-1}e$	$9,1093897.10^{-31}$	0,00055
البروتون	$^{1}_{1}p$	$1,6726231.10^{-27}$	1,00728
النترون	$^{1}_{0}n$	$1,6749286.10^{-27}$	1,00866

2/ أ/ تقدير الإلكترون-فولط ($1ev$)

$$1ev=|e^-|v=1,6.10^{-19}.1 \quad ; \quad \boxed{1ev=1,6.10^{-19}j}$$

طاقة الميغا إلكترون-فولط ($1Mev$)

الميغا يعني 10^6 .

إذن : $1Mev=10^6 ev$ ، ومنه : $1Mev=10^6.1,6.10^{-19}j$

وبالتالي : $\boxed{1Mev=1,6.10^{-13}j}$

حساب طاقة الكتلة (الطاقة السكونية)

تعطى عبارة طاقة الكتلة (m) بعلاقة اينشتاين : $\boxed{E=mC^2}$ مع : $C=3.10^8 m/s$ وهي سرعة الضوء في الخلاء.

طاقة كتلة الإلكترون

$$E=m_e.C^2\approx 9,1.10^{-31}(3.10^8)^2=9,1.10^{-31}.9.10^{16}=81,9.10^{-15}\approx 8,2.10^{-14}j$$

نحولها إلى الـ (ev) والـ (Mev)

$$E=\frac{8,2.10^{-14}}{1,6.10^{-19}}=5,12.10^5\ ev$$

$$E=\frac{5,12.10^5}{10^6}\quad ;\quad \boxed{E=0,512\ Mev}$$

طاقة كتلة البروتون

بنفس الطريقة السابقة نجد : $E=m_p.C^2\approx 1,6726231.10^{-27}(3.10^8)^2$

أي : $\boxed{E=938,3\ Mev}$

طاقة كتلة النترون

$$E=m_n.C^2\approx 1,6749286.10^{-27}(3.10^8)^2$$

أي : $\boxed{E=939,6\ Mev}$

ملاحظة هامة : في الفيزياء النووية، عادة ما نتكلم عن كتلة الإلكترون أو البروتون أو النترون بوحدة هي (Mev/C^2) أي بمكافئ طاقوي.

المكافئ الطاقوي لوحدة الكتل الذرية (u)

لتحويل الكتلة إلى طاقة، تضرب الكتلة في مربع سرعة الضوء (C^2) حسب علاقة اينشتاين :

$$1u=\frac{1u.C^2}{C^2}=\frac{1,660543.10^{-27}(3.10^8)^2}{C^2}=1,4944887.10^{-10}\ j/C^2$$

نحول الجول (j) إلى (Mev) :

$$1u=\frac{1,4944887.10^{-10}}{1,6.10^{-13}}Mev/C^2\approx 934,06\ Mev/C^2$$

ولو دققنا في الحساب نجد : $\boxed{1u=931,5\ Mev/C^2}$

المكافئ الطاقوي للبروتون والنترون

$\boxed{m_p=938,3\ Mev/C^2}$ ، $\boxed{m_n=939,6\ Mev/C^2}$

التمرين 20

اختر الإجابة الصحيحة.

أ/ كتلة النواة دوما (أكبر من / أصغر من / تساوي) مجموع كتل نوياتها.

ب/ النقص الكتلي (Δm) يساوي :

1/ الفرق بين كتلة النويات (أي فرق الكتلة بين البروتونات والنترونات) : $\Delta m=m_n-m_p$

2/ الفرق بين كتلة النواة وكتلة نوياتها : $\Delta m=m_{nucléons}-m_{noyau}$

3/ الفرق بين كتلة النواة وكتلة ذرتها : $\Delta m=m_{atome}-m_{noyau}$

ج/ النقص الكتلي (Δm) (يتحول / لا يتحول) إلى طاقة كتلة $E_L=\Delta m.C^2$ تساهم في ارتباط النويات داخل النواة.

د/ طاقة الربط E_L تساوي :

1/ طاقة الإلكترونات المرتبطة بالنواة والتي تدور حولها.

2/ الطاقة المتحررة عندما تتشكل النواة ${}^A_ZX$ انطلاقا من نوياتها المتفرقة.

3/ الطاقة المقدمة للنواة ${}^A_ZX$ وهي ساكنة (بالنسبة إلى معلم) حتى تتفرق نوياتها وتصبح ساكنة (بالنسبة إلى نفس المعلم).

هـ/ عبارة E_L هي :

1/ $E_L=m({}^A_ZX)C^2$

2/ $E_L=[Zm_p+(A-Z)m_n]C^2$

3/ $E_L=[Zm_p+(A-Z)m_n]C^2-m({}^A_ZX)C^2$

4/ $E_L=[m_{nucléons}-m_{noyau}]C^2$

الحل

اختيار الإجابات الصحيحة

أ/ كتلة النواة دوما أصغر من مجموع كتل نوياتها.

ب/ $\Delta m=m_{nucléons}-m_{noyau}$

ج/ النقص الكتلي (Δm) يتحول إلى طاقة كتلة $E_L=\Delta m.C^2$ تساهم في ارتباط النويات داخل النواة.

د/ 2 و3.

هـ/ عبارة E_L هي العبارة الثالثة : $E_L=[Zm_p+(A-Z)m_n]C^2-m({}^A_ZX)C^2$

والعبارة الرابعة : $E_L=[m_{nucléons}-m_{noyau}]C^2$

التمرين 21

إن رمز نواة الليثيوم هو ^7_3Li.

1/ اعط عدد البروتونات (Z) وعدد النترونات (N) لليثيوم.

2/ إذا علمت ان كتلة نواة الليثيوم هي $m(^7_3Li)=7,01601u$

(ويعطى، $m_p=1,00728u$ ، $m_n=1,00866u$ و $1u=931,4Mev/C^2$)،

احسب النقص الكتلي (Δm).

3/ أ/ أحسب طاقة الربط النووي لنواة الليثيوم $E_L(^7_3Li)$

ب/ أحسب طاقة الربط لكل نوية $E_{L/A}$.

4/ تعطى طاقة الربط لكل نوية لبعض الأنوية كالتالي،

النواة	^7_3Li	^4_2He	^2_1H	^3_1H
$E_{L/A}(Mev)$	5,4	7,05	1,09	2,77

رتب هذه الأنوية مع نواة (^7_3Li) حسب تزايد طاقة الربط لكل نوية، وحدد أكثرها استقرارا.

الحل

1/ عدد البروتونات (Z) وعدد النترونات (N)

نواة الليثيوم هي، $^{A}_{Z}X = ^7_3Li$

إذن، $Z=3$ و $A=7$ ، لكن، $N=A-Z$ ، وعليه، $N=A-Z$ ، وبالتالي، $N=4$

2/ حساب النقص الكتلي (Δm)

تعطى عبارة النقص الكتلي كما يلي، $\Delta m = m_{nucléons} - m_{noyau}$

عندما نعوض يجب أن نبقى على جميع الأرقام المعنوية لكل من (m_p) و(m_n)، إذن،

$$m_{nucléons} = Zm_p + (A-Z)m_n = 3(1,00728) + 4(1,00866) = 7,05648\ u$$

ومنه، $m_{nucléons} = 7,05648\ u$

كما أن، $m_{noyau} = m(^7_3Li) = 7,01601$

نلاحظ أن، $m_{nucléons} > m_{noyau}$

ويكون النقص الكتلي (Δm) بين النويات والنواة كما يلي،

$$\Delta m = m_{nucléons} - m_{noyau} = 7,05648 - 7,01601 = 0,04047\ u$$

$$\Delta m = 0,04047\ u$$

3/ أ/ حساب طاقة الربط النووي لنواة الليثيوم $E_L(^7_3Li)$

حسب علاقة اينشتاين لدينا $E=mC^2$ ، وبالتالي، $\boxed{E_L(^7_3Li) = \Delta mC^2}$

لا نستطيع أن نعوض كما يلي، $E_L(^7_3Li) = 0,040470(3.10^8)^2$

لأن (Δm) مقدرة بوحدة الكتل الذرية (u) وليس بـ (kg)

لذا نستعمل الطريقة البسيطة التالية،

نعلم أن، $1u = 931,4Mev/C^2$

وبما أن، $\Delta m = 0,04047u$

فنعوض عن (u) في (Δm) بقيمته، اي، $\Delta m = 0,04047 \times 931,5Mev/C^2$

$\Delta m = 37,7Mev/C^2$

ومنه نكتب، $E_L(^7_3Li) = 37,7(Mev/C^2).C^2$

اي، $\boxed{E_L(^7_3Li) = 37,7Mev}$

ب/ طاقة الربط لكل نوية $E_{L/A}$

$$E_{L/A} = \frac{37,7}{7} \quad ; \quad \boxed{E_{L/A} \approx 5,4\ Mev}$$

4/ ترتيب الأنوية حسب تزايد طاقة الربط النووي لكل نوية منها

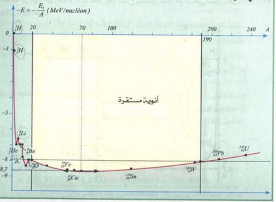
بالاستعانة بقيم الجدول المعطى، وبالقيمة التي حسبناها لنواة (^7_3Li) نكتب،

$$E_{L/A}(^2_1H)<E_{L/A}(^3_1H)<E_{L/A}(^7_3Li)<E_{L/A}(^4_2He)$$

كلما كانت طاقة الربط النووي أكبر زاد استقرار النواة.

التمرين 22

يعطى المنحني الممثل لتغيرات طاقة الربط لكل نوية $(E_{L/A})$ بدلالة العدد الكتلي (A) والذي يعرف بمنحني أستون.



1/ حدد الأنوية المستقرة من غيرها.
2/ حدد الأنوية التي تتوقع ان تحدث تفاعلات انشطار نووي، وكذا الأنوية التي تحدث اندماجا نوويا.
3/ إن انشطار نواة اليورانيوم ($^{235}_{92}U$) يعطي نواتين هما ($^{90}_{40}Zr$) و($^{130}_{52}Te$).
هل هذا ممكن حسب منحني أستون ؟

الحل

1/ تحديد الأنوية المستقرة

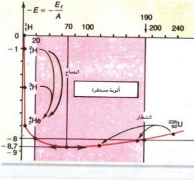
الأنوية المستقرة هي الأنوية التي لها طاقة ربط نووي كبيرة أو التي لها طاقة ربط لكل نوية ($E_{L/A}$) كبيرة، وهي هنا ممثلة في المنحني بجوار ذروة المنحني ، من ($A=70$) إلى ($A=190$)، وهي الأنوية المتوسطة.

2/ الأنوية التي نتوقع أن يحدث لها انشطار نووي

هي الأنوية الكبيرة (الثقيلة) مثل (^{235}U) والتي لها طاقة ($E_{L/A}$) أصغر من طاقة الأنوية المتوسطة ذات الاستقرار الكبير.

الأنوية التي نتوقع أن يحدث لها اندماج نووي : هي الأنوية الخفيفة مثل ^1_1H و^2_1H و^3_1H (الشكل المرفق).

3/ إذا قذفت النواة الكبيرة الخصبة ($fertile$) مثل (^{235}U) أو (^{239}Pu) بنترون بطيئ، انشطرت إلى نواتين متوسطتين مستقرتين، ويصاحب هذا الانشطار تحرر طاقة هائلة في حدود ($200Mev$) بالنسبة إلى نواة اليورانيوم 235 مثلا. هذا الشرح يتطابق تماما مع منحني استون، لأن (Zr) و(Te) نواتان متوسطتان.



التمرين 23

يعطى التفاعل النووي التالي.

$$^{235}_{92}U + ^1_0n \longrightarrow ^{140}_{54}Xe + ^A_ZSr + 2^1_0n + \text{طاقة}$$

1/ أ/ استنتج قيمة كل من (A) و(Z).
ب/ ما نوع هذا التفاعل النووي ؟ برر إجابتا.

2/ تعطى كتل الأنوية التالية :

$m(^{235}_{92}U)=235,0439u$; $m(^A_ZSr)=94,8731u$;
$m(^{140}_{54}Xe)=138,9185u$; $m(^1_0n)=1,0087u$;
$1u=931,5Mev/C^2$.

أ/ احسب الطاقة المتحررة في هذا التفاعل. كيف تتأكد من أنها طاقة متحررة ؟
ب/ استنتج الطاقة المتحررة نتيجة تفاعل ($1kg$) من اليورانيوم (235).
يعطى عدد أفوغادرو : $\mathcal{N}_A=6,023.10^{23}$.
ج/ إذا علمت أن 1 طن من البترول يعطي طاقة تسمى "مكافئ الطن البترولي $1tep$" بحيث $1tep=4,2.10^{10}j$ فاعط قيمة الطاقة المتحررة من ($1kg$) اليورانيوم (235) بمكافئ الطن البترولي.

الحل

1/ أ/ استنتاج قيمتي (A) و(Z)

حسب قانون انحفاظ عدد النويات لدينا : $235+1=140+A+2(1)$ ، إذن : $\boxed{A=94}$

حسب قانون انحفاظ الشحنة الكهربائية : $92+0=54+Z+2(0)$ ، إذن : $\boxed{Z=38}$

ب/ نوع التفاعل النووي : هو تفاعل انشطار ، لأنه نتج عنه نواتان متوسطتان هما ($^{140}_{54}Xe$) و($^{94}_{38}Sr$)، وتحررت طاقة.

2/ أ/ حساب الطاقة المتحررة

هذا التفاعل يمثل انشطار نواة واحدة ($^{235}_{92}U$)، وعليه فإن الطاقة المتحررة ناتجة عن نواة واحدة، ونحسبها كالتالي :

نستعمل علاقة اينشتاين : $E=mC^2$ حيث Δm هي النقص الكتلي :

$$\boxed{\Delta m = m_{(\text{متفاعلات})} - m_{(\text{نواتج})}}$$

$$m_{(\text{متفاعلات})} = m(^{235}_{92}U) + m(^1_0n) = 235,0439 + 1,0087 = 236,0526\ u$$

$$m_{(\text{نواتج})} = m(^{140}_{54}Xe) + m(^{94}_{38}Sr) + 2m(^1_0n)$$
$$= 138,9185 + 94,8731 + 2(1,0087) = 235,809\ u$$

بما أن $m_{(\text{متفاعلات})} > m_{(\text{نواتج})}$ فالطاقة تتحرر، ومنه نكتب :

$$\Delta m = m_{(\text{متفاعلات})} - m_{(\text{نواتج})} = 236,0526u - 235,809u \;;\; \Delta m = 0,2436u$$

وعلى اعتبار أن $1u=931,5Mev/C^2$ نكتب ، $E=0,2166\times 931,5Mev$ ،

$\boxed{E\approx 227Mev}$

وكما قلنا، الطاقة المتحررة من جراء انشطار نواة واحدة هي في حدود $(200Mev)$.

ب/ الطاقة المتحررة نتيجة انشطار $(1kg)$ يورانيوم (235)

نعلم أن كتلة نواة واحدة من اليورانيوم (235) هي $m({}^{235}_{92}U)=\frac{235}{\mathcal{N}_A}(g)$
حيث $\mathcal{N}_A$ عدد أفوغادرو.

نستعمل القاعدة الثلاثية ،

$$\frac{235}{\mathcal{N}_A}(g) \rightarrow 227Mev$$
$$1kg=1000g \rightarrow E$$

ومنه ،

$$E=\frac{227\times 1000}{\frac{235}{\mathcal{N}_A}}=\frac{227.10^{23}\,\mathcal{N}_A}{235}=\frac{227.10^{3}\times 6,023.10^{23}}{235}$$

$$E=5,82.10^{26}Mev$$

نحول الطاقة المتحررة من (Mev) إلى الجول (j) ،

نعلم أن $1Mev=1,6.10^{-13}j$ ، ومنه ، $E=5,82.10^{26}\times 1,6.10^{-13}j$

$\boxed{E=9,3.10^{13}j}$

ج/ حساب الطاقة المتحررة بمكافئ الطن البترولي (tep)

بما أن $1tep=4,2.10^{9}j$ إذن ،

$$E=\frac{9,3.10^{13}}{4,2.10^{9}}\approx 2,217.10^{4}\approx 2217\ tep$$

أي أن الطاقة المتحررة من انشطار $(1kg)$ يورانيوم (235) تكافئ احتراق 2217 طن من البترول. وهنا تكمن أهمية تفاعلات الانشطار النووي.

التمرين24 (دراسة تفاعل الانشطار النووي لليورانيوم المخصب ${}^{235}_{92}U$)

دراسة الطاقة الكهربائية الناتجة عن محطة نووية كهربائية

نقتطع جزءا من الجدول الدوري للعناصر،

الرمز	Xe	Cs	Ba	Th	Pa	U	Np	Pu	Tm
Z	54	55	56	90	91	92	93	94	69

تهاجم أنوية اليورانيوم ${}^{235}_{92}U$ في قلب المفاعل النووي بنترونات بطيئة، فتحدث لها تفاعلات انشطار أحدها يمكن تمثيله بالمعادلة النووية، ${}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{92}_{36}Kr + {}^{a}_{b}X + 2\,{}^{1}_{0}n +$ طاقة

1/ عين (a) و (b) واستنتج رمز النواة الثانية ${}^{b}_{a}X$ المتشكلة.

2/ إن الطاقة المتحررة من انشطار نواة اليورانيوم أثناء التفاعل النووي السابق في حدود $(200Mev)$.

ا/ قدر الطاقة النووية المتحررة من انشطار $(1g)$ من اليورانيوم ${}^{235}_{92}U$.

ب/ إذا علمت أن عند احتراق $(1mol)$ من الفحم C (تفاعل كيميائي) تنتج كمية من الطاقة تساوي تقريبا $(0,393Mj)$ فاحسب كتلة الفحم التي تعطي نفس الطاقة التي يعطيها انشطار $(1g)$ من اليورانيوم ${}^{235}_{92}U$.

ج/ قيّم النتائج.

3/ يمكن التحكم في الطاقة النووية السابقة في المفاعلات النووية وتحويلها من شكلها الحراري إلى شكلها الكهربائي، بمردود 30% . ضمن هذه الشروط، احسب كتلة اليورانيوم (235) الذي تستهلكه المحطة الكهربائية النووية في يوم واحد علما أنها تعطي استطاعة متوسطة كهربائية تساوي $(900MW)$.

معطيات ، $M(C)=12g.mol^{-1}$ ، عدد افوغادرو $\mathcal{N}=6,023.10^{23}$ ، $1M=10^{6}$

الحل

1/ تعيين (a) و (b)

حسب قانون حفظ العدد الكتلي A نكتب ، $235+1=92+a+2(1)$ إذن $a=142$

حسب قانون حفظ العدد الذري Z نكتب ، $92+0=36+b+2\,(0)$ إذن $b=56$

فتكون النواة الثانية الناتجة من الانشطار هي $(\,{}^{a}_{b}X\,)$ أي ${}^{142}_{56}X$ وبالتالي لها $(\,Z=56\,)$

وبالنظر إلى الجدول نتأكد من أن النواة X ما هي إلا نواة الباريوم Ba فنكتب ، النواة هي $\boxed{{}^{142}_{56}Ba}$

2/ا/ تقدير الطاقة النووية المتحررة

لتقدير الطاقة النووية المتحررة من انشطار $(1g)$ من اليورانيوم نتبع ما يلي ،

1 نواة $\xleftarrow{\text{تحرر}}$ $200.10^{6}\,e.v$

$\mathcal{N}$ نواة $\xleftarrow{\text{تحرر}}$ $n\times 200.10^{6}\,e.v$ ، $\mathcal{N}$ عدد أفوغادرو

لكن ($\mathcal{N}$ نواة) لها كتلة $= m = 235g$

إذن : 235غ من أنوية اليورانيوم $(235) \xleftarrow[\text{تحرر}]{} n \times 200.10^6\ e.v$

1 من أنوية اليورانيوم $(235) \xleftarrow[\text{تحرر}]{} E$

$$E = \frac{1 \times \mathcal{N} \times 200.10^6}{235} = \frac{1 \times 6,023.10^{23} \times 200.10^6}{235} \quad ; \quad \boxed{E = 8,2.10^{10}\ j}$$

ب/ حساب كتلة الفحم لـ c التي تحرر بالتفاعل الكيميائي

نفس الطاقة التي يحررها $(1g)$ من $^{235}_{92}U$ بتفاعل نووي

كتلة 1 مول من الفحم $= 12g$

إذن : $12g$ من الفحم $\xleftarrow[\text{تحرر}]{} 0,393.10^6\ j$

$m_C \xleftarrow[\text{تحرر}]{} 8,21.10^{10}\ j$

$$m_C = \frac{8,21.10^{10} \times 12}{0,393.10^6} \quad ; \quad \boxed{m_C = 2,51.10^6\ g = 2,51\ \ tonnes}$$

ج/ تقييم النتائج

إن $(1g)$ من $^{235}_{92}U$ يحرر طاقة تعادل $(8,21.10^{10}j)$ ، وهذا بتفاعل نووي.

وإن $2,51t$ من (C) يحرّر طاقة تعادل $(8,21.10^{10}j)$ ، وهذا بتفاعل كيميائي.

إذن $(1g)$ بتفاعل نووي تحرر طاقة تكافئ الطاقة التي يحررها $(2,51t)$ بتفاعل كيميائي (تفاعل احتراق) وهنا تكمن أهمية الطاقة النووية.

3/ حساب كتلة اليورانيوم (235)

الطاقة الكهربائية $= \frac{30}{100}$ الطاقة الحرارية ...... $(\star)$

لكن : $E_{élé} = P.t$ اي $E_{élé} = 900.10^6 \times 24 \times 3600$ ومنه $\boxed{E_{élé} = 7,78.10^{13}\ j}$

لكن من العبارة $(\star)$ لدينا $Q = E_{élé} \times \frac{100}{30}$ نعوّض فنجد : $Q = \frac{7,78.10^{13} \times 100}{30}$

$\boxed{Q = 2,6.10^{14}\ j}$

ومن السؤال $(2/\text{أ})$ وجدنا : $1g$ من اليورانيوم $(235) \xleftarrow[\text{تحرر طاقة}]{} 8,21.10^{10}\ j$

$m_{(\text{يورانيوم})} \xleftarrow[\text{تحرر}]{} 2,6.10^{14}$

ومنه $m(U) = \frac{2,6.10^{14} \times 1}{8,21}$ اي $\boxed{m(U) = 3,17.10^3\ g = 3,17\,Kg}$

التمرين 25

إن انشطار نواة اليورانيوم (235) يُنَمْذَجُ بالمعادلة النووية التالية :

$$^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \longrightarrow {}^{93}_{Z}Zr + {}^{140}_{52}Te + \overset{2}{x}\,{}^{1}_{0}n$$

40

1/ جد قيمة (Z) و(x).

2/ احسب طاقة الربط النووي لنواة اليورانيوم (235).

3/ احسب الطاقة المتحررة من تفاعل انشطار نواة واحدة من اليورانيوم (235).

تعطى طاقتا الربط النووي لـ (Zr) و(Te) لكل نكليون كالتالي : $E_{L/A}(^{93}Zr)=8,6Mev$

$E_{L/A}(^{140}Te)=8,6Mev$

معطيات :

$m_p=1,67265.10^{-27}kg \quad ; \quad m_n=1,67496.10^{-27}kg$

كتلة نواة اليورانيوم : $m(^{235}_{92}U)=235,0439u$

عدد افوغادرو : $\mathcal{N}_A=6,023.10^{23}mol^{-1}$

$1u=1,66054.10^{-27}kg$.

الحل

1/ إيجاد قيمة (Z) وقيمة (x)

حسب قانون انحفاظ الشحنة الكهربائية (Z) : $0+92=Z+52+x(0)$ ، إذن : $Z=40$

حسب قانون انحفاظ عدد النويات (A) : $235+1=93+140+x(1)$ ، إذن : $x=3$

حساب طاقة الربط النووي لنواة اليورانيوم (235)

حسب علاقة اينشتاين : $E_L(^{235}_{92}U)=\Delta mC^2$

حيث Δm النقص الكتلي، ونحسبه كالتالي : $\Delta m=Zm_p+(A-Z)m_n-m(^{235}_{92}U)$

إذن : $E_L=[Zm_p+(A-Z)m_n-m(^{235}_{92}U)]C^2$

يمكن تحويل جميع الكتل من (kg) إلى (u)، ومن ثم الاستعانة بالقيمة $1u=931,5Mev/C^2$ كما فعلنا في التمرين 24. كما يمكن تحويل (u) إلى (kg) وتطبيق علاقة اينشتاين مباشرة :

$$m(^{235}_{92}U)=235,0439u=235,0439\times 1,660540.10^{-27}kg=3,90300.10^{-25}kg \;;$$

$$E_L=[92\times 1,67265.10^{-27}+(235-92)\times 1,67496.10^{-27}-3,90300.10^{-25}]\times(3.10^{8})^2$$

$\boxed{E_L=2,793.10^{-10}j}$

ثم نحولها إلى Mev ، $E_L=\frac{2,793.10^{-10}}{1,6.10^{-13}}$ لنجد : $\boxed{E_L=1745,6Mev}$

3/ الطاقة المتحررة من انشطار نواة يورانيوم (235) واحدة

تعطى بالعبارة التالية ، $\boxed{E = E_{L(\text{طاقة محررة})} - E_{L(\text{طاقة مقدمة})}}$

$$E=[E_L({}^{93}Zr)+E_L({}^{140}Te)]-E_L({}^{235}_{92}U)$$

لكن ، $E_{L/A}({}^{93}Zr)=8,6Mev$ إذن ، $E_L=A\times 8,6Mev$

مع ، $A=93$ ومنه ، $E_L=93\times 8,6$ إذن ، $E_L({}^{93}Zr)=799,8Mev$

وكذلك ، $E_{L/A}({}^{140}Te)=8,3Mev$ مع ، $A=140$ إذن ، $E_L({}^{140}Te)=8,3\times 140$

$E_L({}^{140}Te)=1162Mev$

نعوض فنجد ، $E=(799,8+1162)-1745,6=216,2$

$$\boxed{E = 216,2\ Mev}$$

التمرين 26

إن النكليد ${}^{135}_{54}Xe$ هو نواة مشعة يمكنها أن تصدر جسيم β^- . النواة البنت هي أيضا مشعة ذات دور كبير.

1/ اكتب معادلة التفكك.

2/ ندرس تطور عينة من الكزينون 135.

ليكن N_0 وN عدد أنويته في اللحظتين $(t_0 = 0s)$ و (t)

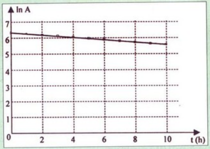
أ/ عبر عن N بدلالة t وثابت الإشعاعية λ

ب/ بواسطة عداد جيجر- مولر، نعين النشاط الإشعاعي A للعينة بدلالة الزمن.

بين أن $A=\lambda N$ واستنتج أن $A = A_0 e^{-\lambda t}$

ج/ أعط عبارة اللوغريتم النبيرى lnA

3/ نمثل المنحني البياني $lnA=f(t)$ في الوثيقة التالية.



أ/ اثبت أن البيان يحقق العبارة النظرية للسؤال 2/ج.

ب/ استنتج قيمتي λ و $t_{1/2}$ فترة عمر النصف (نصف العمر).

الحل

1/ معادلة التفكك β^-

$${}^{135}_{54}Xe \to {}^{0}_{-1}e + {}^{Z}_{A}X$$

- قانون انحفاظ عدد النويات A يعطي $135 = 0 + A$ ومنه $\boxed{A = 135}$
- قانون انحفاظ الشحنة Z يعطي $54 = 1+ Z$ ومنه $\boxed{Z = 55}$

ومنه النواة ${}^{A}_{Z}X$ هي ${}^{135}_{55}X$

لذا نكتب المعادلة من جديد : $\boxed{{}^{135}_{54}Xe \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{135}_{55}X}$

2/أ/ عبارة N بدلالة λ و t

تعطى بقانون التناقص الإشعاعي $N = N_0 e^{-\lambda t}$

ب/ عبارة النشاط الإشعاعي A

النشاط A معرّف بالعلاقة $A = -\dfrac{dN}{dt}$

لكن $N = N_0 e^{-\lambda t}$ إذن $\dfrac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$

ومنه $\boxed{A = \lambda N}$ أو $\boxed{A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}}$

في اللحظة $(t = 0s)$ (لحظة بدء القياس) لدينا : $A = A_0 \lambda N_0 e^{-0}$

$\boxed{A_0 = \lambda N_0}$ أو $\boxed{A = A_0 e^{-\lambda t}}$

ج/ عبارة lnA

$ln A = ln(A_0 e^{-\lambda t}) = ln A_0 + ln e^{-\lambda t}$

تنبيه: $\boxed{ln(ab) = ln a + ln b \;\; ; \;\; ln e^{-c} = -c}$

نكمل فنجد : $\boxed{ln A = ln A_0 - \lambda t}$ ...... (1)

وهذه معادلة من الشكل $y = b - at$ فهي معادلة مستقيم لا يمرّ من المبدأ وميله سالب.

3/أ/ إن البيان $ln A = f(t)$ هو خط مستقيم ميله سالب لا يمرّ من المبدأ معادلته من الشكل :
$y = ax + b$

أي : $\boxed{ln A = at + b}$ ...... (2) حيث a ميل المستقيم وb ترتيبة نقطة تقاطعه مع lnA

إنّ المعادلتين (1) و (2) متطابقتان مع شرطين : $\boxed{a = \text{الميل} = -\lambda}$ و $\boxed{b = lnA_0}$.

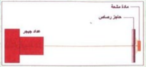
ولذا نقول إن العبارة (1) تحقق العبارة البيانية (2).

ب/ استنتاج λ و $t_{1/2}$

من البيان لدينا : $\lambda = -\text{الميل} = -\dfrac{6,32-5,57}{0-10\times 3600}$ وبالتالي : $\boxed{\lambda \approx 2,1.10^{-5} s^{-1}}$

ولدينا : $t_{1/2} = \dfrac{ln 2}{\lambda}$ نعوض فنجد : $t_{1/2} = \dfrac{ln 2}{2,1.10^{-5}}$ ومنه : $t_{1/2} = 33007s \approx 9,17h$

التمرين 27 (تمرين تجريبي)



في حصة الأعمال التطبيقية أحضر الأستاذ، عدّاد جيجر - ميلر، وصندوقا من الرّصاص به مادّة مشعة هي الفاناديوم ${}^{52}_{23}V$ ، تصدر في نفس الوقت جسيم β^- وإشعاع γ .

1/ اكتب معادلة التفكّك.

يعطى : ${}_{26}Fe$ ، ${}_{24}Cr$ ، ${}_{22}Ti$.

2/ بمشاركة التلاميذ، قاس الأستاذ، بواسطة العدّاد، العدد المتوسط N من الأنوية المتفككة خلال كل فترة زمنية $\Delta t = 5s$.

تجرى القياسات في كل دقيقتين وتدوّن النتائج في الجدول التالي :

T (min)	0	2	4	6	8	10	12
N	1586	1075	471	471	355	235	155
$A(Bq)$							
LnA							

أ/ املأ الجدول السابق. مساعدة : $A = \dfrac{N}{\Delta t} = \dfrac{N}{5}$.

ب/ شكّل الأستاذ فوجين من التلاميذ وطلب منهما رسم البيانين $A = f(t)$ و $ln A = g(t)$.
ارسم البيانين المذكورين سابقا واستخرج بيانيا $t_{1/2}$ و τ ، ثم استنتج λ .

ج/ برأيك، أيّ المنحنيين يكون الأدق لتعيين الثوابت $t_{1/2}$ ، τ ، λ ؟ برّر.

الحل

1/ كتابة معادلة التفكّك

2/ الفاناديوم (V) يصدر جسيم β^- وإشعاع γ ، وتبقى نواة جديدة :

${}^{52}_{23}V \rightarrow \beta^- + \gamma +$ نواة جديدة

النواة الجديدة نرمز لها بـ ${}^{A}_{Z}X$

- جسيم β^- هو بوزيترون ورمزه النووي هو ${}^{0}_{-1}e$
- إشعاع γ رمزه النووي هو ${}^{0}_{0}\gamma$

نعوّض في المعادلة النووية السابقة : ${}^{52}_{23}V \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\gamma + {}^{A}_{Z}X$

لإيجاد A و Z نستعمل قانون E لانحفاظ Z و A (المسمّيين أيضا بقانوني سودي) :

قانون انحفاظ A

$52 = 0 + 0 + A$ إذن : $\boxed{A = 52}$

قانون انحفاظ Z

$23 = -1 + 0 + Z$ إذن : $\boxed{Z = 24}$

لاحظ أن نواة الكروم ${}_{24}Cr$ تتميز بأن $Z = 24$ ، فالنواة الناتجة هي ${}^{52}_{24}Cr$ ، لذا نكتب معادلة التفكّك من جديد : $\boxed{{}^{52}_{23}V = {}^{52}_{24}Cr + {}^{0}_{-1}e + \gamma}$

3/ أ/ ملء الجدول

حسب نصّ التمرين $A = \dfrac{\Delta N}{\Delta t} = \dfrac{N}{5}$

• بالنسبة للخانة الأولى من الجدول $N = 1586$ ، إذن $A = \dfrac{1586}{5} = 317,2$

نقرّبها إلى عدد بدون فواصل فنكتب $A \approx 317$ ومن ثمّ نحسب $ln\, A$ فنجد $ln\, A = 5,76$

نقرّبها الى رقم بعد الفاصلة فنجد $ln\, A \approx 5,8$

وهكذا بالنسبة لبقية القيم، التي ندوّنها في الجدول التالي :

$t(min)$	0	2	4	6	8	10	12
N	158	1075	741	471	355	235	155
A	317	215	148	94	71	47	31
$ln\, A$	5،8	5،4	5،0	4،5	4،3	3،8	3،4

ب/ رسم البيان $A = f(t)$

يجب اختيار سلّم مناسب لرسم أي بيان. ننظر دومًا الى أكبر قيمة ونعطيها مقياس الرّسم المناسب أكبر قيمة لـ A هي $A = 317\,Bq$ ، نمثلها على سبيل الاختيار بـ $10cm$ لأن $10cm$ قيمة مناسبة في الرّسم البياني، ولو اخترنا $5cm$ على سبيل المثال لما كانت قيمة مناسبة، إذن نأخذ السلّم :

$317\,Bq \rightarrow 10cm$

وعليه، لإيجاد مقياس رسم القيمة $A = 215\,Bq$ ، نستعمل القاعدة الثلاثية :

$317\,Bq \rightarrow 10cm$ $\quad X = \dfrac{215}{317} \times 10$

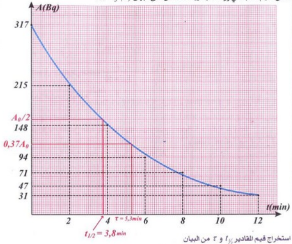
$215\,Bq \rightarrow X$ $\quad X = 6,78cm \approx 6,8cm$

وهكذا بالنسبة لبقية القيم باستعمال القاعدة الثلاثية نجد

$A(Bq)$	317	215	148	94	71	47	31
مقياس رسمها	$10cm$	$6,8cm$	$4,7cm$	$3cm$	$2,2cm$	$1,5cm$	$1cm$

أما السلّم الذي نختاره للزمن t فهو سهل بحيث نمثل أكبر قيمة لـ t وهي $12\,min$ بـ $12cm$ ، حتى لا نستعمل القاعة الثلاثية بالنسبة لبقية قيم t . فنمثل $2\,min$ بـ $2cm$ و $4\,min$ بـ $4cm$ ، وهكذا لبقية قيم t .

ننقل القيم السابقة في ورقة مليمترية، فنحصل على البيان $A = f(t)$:



استخراج قيم المقادير $t_{1/2}$ و τ من البيان

• زمن نصف العمر (عمر النصف) $t_{1/2}$ يقابل $\dfrac{N_0}{2}$ أو $\dfrac{A_0}{2}$.

لدينا $A_0 = 317\,Bq$ ، إذن $\dfrac{A_0}{2} = \dfrac{3,7}{2} = 158,5\,Bq$

وباستعمال مقياس الرّسم : $\left.\begin{array}{l} 317\,Bq \rightarrow 10cm \\ 158,5\,Bq \rightarrow 5cm \end{array}\right\}$

ننقل هذه القيمة في البيان ونعيّن $t_{1/2}$ فنجد : $\boxed{t_{1/2} \approx 3,8\,min}$

• ثابت الزمن τ

نعيّنه إما بمماس المنحني عند المبدأ، وهذه طريقة صعبة، فأيّ انحراف بسيط للمماس يعطي نتيجة مغايرة تمامًا للقيمة الحقيقية، أو نعيّنه بتعيين $0,37\,A_0$ أي $0,37 \times 317 \approx 117,3\,Bq$ ، ثم ننقل هذه القيمة في البيان فنجد τ .

لكن باستعمال مقياس الرّسم نجد أن $117,3Bq$ تمثل بالقياس التالي : $\begin{cases}317Bq \to 10cm\\ 117,3Bq \to X\end{cases}$

$$X=\frac{117,3\times 10}{317}\approx 3,7cm$$

ننقل $3,7cm$ إلى البيان فنجد : $\boxed{\tau \approx 5,3\,min}$

• تعيين λ

نعلم أن $\lambda=\frac{1}{\tau}$ ، $\lambda=\frac{1}{5,3}$ ، $\lambda=0,189\,min^{-1}$

ويمكن التحويل إلى الثواني لنجد : $\lambda=\frac{1}{5,3\times 60}$ ، $\boxed{\lambda=3,1.10^{-3}s^{-1}}$

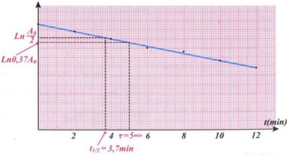
• يمكن أيضا استعمال العلاقة $\lambda=\frac{ln2}{t_{1/2}}$.

• بيان $ln A=g(t)$

هنا، مقياس الرّسم نحصل عليه بطريقة سهلة بحيث نضع : $ln A=5,8\to 5,8cm$

وكذا : $ln A=5,4\to 5,4cm$

نفس الشيء بالنسبة لبقية القيم، ولذا يأتي البيان كما يلي :



ملاحظة هامّة

لا يجب وصل جميع النقاط المسجّلة، بل يجب فقط وصل أكبر عدد من النقاط على استقامة واحدة. وهنا تكمن أهمية المستقيمات عن المنحنيات. ففي المستقيمات يتم عزل النقاط الخاطئة، التي لا تقع على استقامة واحدة مع بقية النقاط، أما في المنحنيات، فلا يمكن تحديد نقاطها الخاطئة.

• تعيين $t_{1/2}$

نعيّنه من $ln\frac{A_0}{2}$

لكن $ln\frac{A_0}{2}=ln\frac{317}{2}=5,06\approx 5,1$ ، إذن : $\boxed{ln\frac{A_0}{2}\approx 5,1}$

باستعمال مقياس الرّسم نجد ما يقابل $ln\frac{A_0}{2}$

$$ln\frac{A_0}{2}=5,1\to 5,1cm$$

ننقل $5,1cm$ إلى البيان فنجد : $\boxed{t_{1/2}\approx 3,7\,min}$

• تعيين τ

يتم تعيين τ بتعيين $ln(0,37A_0)$ فنكتب : $ln0,37A_0=ln0,3\times 317\approx 4,8$

ثم ننقل $4,8cm$ في البيان فنجد $\tau=5\,min$

• تعيين λ

نستعمل العبارة $\lambda=\frac{1}{\tau}$ ، إذن $\lambda=\frac{1}{5}$ ، $\boxed{\lambda\approx 0,2\,min^{-1}}$

ج/ إنّ البيانات الخطيّة لها أفضلية على البيانات المنحنية، لأنه لا يمكن لكلّ الأشخاص أن ترسم انحناءات البيانات بطريقة متطابقة وبالتالي لا تجد نفس النتائج أما في حالة المستقيمات فنعم، وبالتالي تحصل في حالة المستقيمات على نفس النتائج تقريبًا.

التمرين 28 (وضعية ادماجية)

رسم أستاذ الفيزياء للتلاميذ المنحنى التالي، وأعطى العناصر التالية : $^{4}_{2}He$ ، $^{235}_{92}U$ ، $^{2}_{1}H$ ، $^{56}_{26}Fe$.

1/ ما اسم هذا المنحنى؟ ما الفائدة منه؟

2/أ/ اعط تعريف كلّ من الانشطار والاندماج.

ب/ حدّد من بين العناصر السابقة التي تحدث الانشطار والتي تحدث الاندماج.

ج/ بناء على هذا المنحنى، ما السبب في كون عدد العناصر الموجودة في الطبيعة لا يتجاوز عنصر اليورانيوم؟

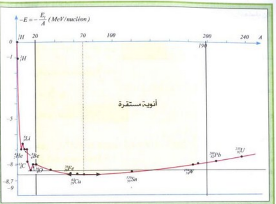
3/ يعثر على الرّصاص المستقر 206 في فلزّ اليورانيوم (معدن)، ويدلّ هذا على ان منشا الرّصاص إشعاعي، حسب التحولات النووية التالية :

$^{238}_{92}U\to {}^{234}_{90}Th\to {}^{231}_{91}Pa\to {}^{234}_{92}U\to {}^{230}_{96}Th\to\ldots\to {}^{206}_{82}Pb$ بتحولات α و β^- .

أ/ برأيك، لماذا لا نتوقع حدوث التفكك β^+ في هذه السلسلة الإشعاعية؟

ب/ نلخص التحولات السابقة في المعادلة النووية : $^{238}_{92}U\longrightarrow {}^{206}_{82}Pb+a\alpha+b\beta^-$.

استنتج قيمتي العددين (a) و (b) .



4/ أراد الأستاذ أن يقدر عمر الكرة الأرضية، فاحضر عيّنة من اليورانيوم *238*، تحتوي على كمية من الرّصاص *206* بتركيب هو 1g من اليورانيوم في مقابل 0,8g من الرصاص.

يعطى $\lambda u = 4,5\times10^{9}a$

أ/ برأيك، لماذا عندما نريد تعيين عمر الأرض ندرس صخور اليورانيوم، وعندما نريد تقدير عمر الكائنات الحيّة نستعمل الكربون 14؟ يعطي $\lambda(^{14}C) = 5730a$.

ب/ إذا علمت أن $Nu(t) = Nu(0)e^{-\lambda t}$ وأن $Nu(t) + N_{Pb}(t) = Nu(0)$

فاثبت أن $t = \frac{1}{\lambda u}\ln(1+\frac{N_{Pb}}{Nu})$

ج/ قدّر حسب هذه الطريقة عمر الكرة الأرضية ؛

$Nu(0)$ ؛ عدد أنوية اليورانيوم في اللحظة $t = 0s$.

$Nu(t)$ ؛ عدد أنوية اليورانيوم في اللحظة t .

الحل

1/ اسم المنحنى البياني $\frac{-E_L}{A} = f(A)$ هو منحنى استون.

الفائدة منه:

- يحدّد طاقة ربط النويات لمختلف العناصر في الطّبيعة.

- يحدّد العناصر المستقرّة في الطّبيعة، والعناصر التي يحدث لها تفكّك أو انشطار، أو اندماج نووي.
- يفرّق بين الأنوية التي تحدث انشطارًا نوويا، والأنوية التي تحدث إندماجًا نوويًا.

2/أ/ تعريف الانشطار النووي والاندماج النووي

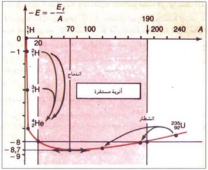
الانشطار هو تفاعل نووي، يحدثه نترون بطيء عند قذفه، على نواة ثقيلة مثل $^{235}_{92}U$ و $^{239}_{94}Pm$ فتنتج نواتان متوسطتان مستقرتان، وتتحرّر بعض النترونات (من 2 إلى 3 نترونات)، كما تتحرّر طاقة كبيرة.

الاندماج هو تفاعل نووي تندمج فيه نواتان خفيفتان مثل $^{1}_{1}H$ أو $^{2}_{1}H$ عند درجة حرارة عظيمة، لتتشكّل نواة مستقرة أكبر منهما، وتتحرّر طاقة نووية عظيمة.

ب/ النواة التي تحدث انشطارًا هي $^{235}_{92}U$ (اليورانيوم 235).

النواة التي تحدث اندماجًا هي $^{2}_{1}H$ (الديتيريوم أو الهيدروجين الثقيل).

بالطبع توجد أنوية أخرى تحدث اندماجًا، لكنها غير ظاهرة في هذا المنحني ؛



ج/ لاحظ منحني استون فستجد أنه يتناقص بعد $^{235}_{92}U$ وبالتالي تتناقص طاقة الرّبط لكلّ نلكيون $(E_{L/A})$ ، وهكذا تصبح كلّ العناصر بعد اليورانيوم غير مستقرّة، إما انشطارية، أو يحدث لها تفكّك من النوع α أو β^- كما نتأكد من أن لها فترة نصف عمر $t_{1/2}$ صغيرة مقارنة بأنصاف أعمار العناصر الأخرى الموجودة في الطّبيعة، فلو كانت لها أنصاف أعمار كبيرة مقارنة بعمر الكرة الأرضية (4,5 مليار سنة) لوجدناها في الطّبيعة، ولو بكميّات قليلة.

3/أ/ هنا تفكك طبيعي، لذا نتوقع له التفككين α أو β^- فقط، أما التفكك β^+ فهو اصطناعي ولا يحدث إلا في التحولات النووية المستحدثة (الاصطناعية).

ب/ حساب قيمتي العددين a و b

المعادلة النووية المعطاة هي $^{238}_{92}U \rightarrow {}^{206}_{82}Pb + a\alpha + b\beta^-$

الجسيم β^- هو إلكترون $^{0}_{-1}e$

الجسيم α هو نواة الهليوم $^{4}_{2}He$

لذا نكتب المعادلة من جديد : $^{238}_{92}U \rightarrow {}^{206}_{82}Pb + a\,^{4}_{2}He + b\,^{0}_{-1}e$

لتعيين a و b، نستعمل قانوني انحفاظ Z و A :

- فقانون انحفاظ A يعطي : $238 = 206 + a(4) + b(0)$ ومنه $a = \dfrac{238-206}{4}$ أي $\boxed{a=8}$
- وقانون انحفاظ Z يعطي : $92 = 82 + a(2) + b(-1)$ أي $92 = 82 + 8(2) - b$ إذن $\boxed{b=6}$

ملاحظة: لو بدأنا بقانون انحفاظ Z، لحصلنا على معادلة فيها مجهولين هما a و b وبالتالي نبدأ بقانون انحفاظ A ، حتى يتستى لنا تعيين أحد المجهولين.

4/أ/ إن عمر الأرض في حدود 4 مليار سنة، ولذا نقدرها بالعناصر المشعة التي لها نصف العمر $t_{1/2}$ في حدود عمر الكرة الأرضية مثل اليورانيوم $t_{1/2}(U)$. كما أن اليورانيوم وأغلبية الصخور نشأت مع نشوء الكرة الأرضية. أما تقدير عمر الكائنات الحية، أو عمر الحضارات أو الآثار التي تركها الإنسان القديم، فيتطلب الاستعانة بالعناصر المشعة التي لها نصف عمر $t_{1/2}$ في حدود آلاف السنين مثل ^{14}C . ناهيك عن أن غاز ($^{14}CO_2$ و $^{12}CO_2$) نتج عندما بدأت العمليات الحيوية (عملية التنفس)، أثناء ظهور الغطاء النباتي وظهور الحيوانات والإنسان على سطح الأرض.

ب/ إثبات العلاقة

- تفكك اليورانيوم يعطى بمعادلة التناقص الإشعاعي $N_U(t) = N_U(0)e^{-\lambda_U t}......(1)$
- اليورانيوم 238 في آخر نشاطه الإشعاعي يتحول إلى رصاص ^{206}Pb مستقر، ومجموع أنوية اليورانيوم + أنواة الرصاص يبقى ثابتا ويكون مساويًا للعدد الابتدائي لأنوية عيّنة اليورانيوم.

بمعنى $N_U(t) + N_{Pb}(t) = N_U(0)......(2)$

نعوّض عن $N_U(0)$ من المعادلة (2) في المعادلة (1) فنجد :

$$N_U(t) = \left(N_U(t) + N_{Pb}(t)\right)e^{-\lambda_U t}$$

$$\frac{N_U(t)}{N_U(t)+N_{Pb}(t)} = e^{-\lambda_U t}$$

للتخلص من العدد e، ندخل ln في الطرفين ، $\ln\dfrac{N_U(t)}{N_U(t)+N_{Pb}(t)} = \ln e^{-\lambda U t}......(3)$

لكن $\ln e^{-\lambda_U t} = -\lambda_U t$

كما أن $\ln\dfrac{N_U t}{N_U t + N_{Pb}(t)} = -\ln\dfrac{N_U(t)+N_{Pb}(t)}{N_U(t)}$

نعوّض في (3) فنجد : $-\ln\dfrac{N_U(t)+N_{Pb}(t)}{N_U(t)} = -\lambda_U t$

$$t = \frac{1}{\lambda_U}\ln\left(\frac{N_U(t)}{N_U(t)} + \frac{N_{Pb}(t)}{N_U(t)}\right)$$

$\boxed{t = \dfrac{1}{\lambda_U}\ln\left(1+\dfrac{N_{Pb}(t)}{N_U(t)}\right)}$ وهي العبارة المطلوبة.

ج/ تقدير عمر الكرة الأرضية

نعلم أن $\dfrac{N}{\mathcal{N}} = \dfrac{m}{M}$ ، إذن : $N = \mathcal{N}\dfrac{m}{M}$

$\mathcal{N}$ عدد أفوقادرو

N : عدد أنوية العيّنة

m : كتلة العيّنة

M : الكتلة المولية.

بالنسبة لليورانيوم 235 $N_U = \dfrac{\mathcal{N} m_U}{235}$ مع $m_U = 1g$

بالنسبة للرّصاص 206 $N_{Pb} = \dfrac{\mathcal{N} m_{Pb}}{206}$ مع $m_{Pb} = 0,8g$

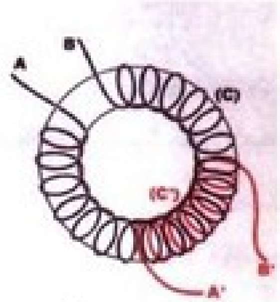
بقسمة العبارتين نجد $\dfrac{N_{Pb}}{N_U} = \dfrac{235.m_{Pb}}{206.m_U} = \dfrac{235\times 0,8}{206\times 1} \approx 0,913$

لكن $\lambda_U = \dfrac{\ln_2}{t_{1/2}(U)}$ ، إذن : $\lambda_U = \dfrac{0,693}{4,5.10^9}$, $\lambda_U = 1,54.10^{-10}a^{-1}$

لا حاجة هنا لتحويل السنة (a) إلى الثانية (s)

نعوّض في العبارة فنجد : $t = \dfrac{1}{1,54.10^{-10}}\ln(1+0,913)$

$\boxed{t = 4,2\times 10^9\, a}$ أي عمر الكرة الأرضية يساوي بالتقريب $4,2$ مليار سنة.



الدارة المحرضة : C ،
الدارة المتحرضة 'C .

الوشيعة التي اكتشف بها فاراداي التحريض الكهرطيسي.

العالم الأنكليزي فاراداي، مكتشف ظاهرة التحريض الكهرطيسي، يعرض وشيعته.
حقل مغناطيسي ⟵ حقل كهربائي.

الإمبراطور نابوليون يستمع بإمعان لمكتشف الحاشدة (العمود)، العالم الإيطالي أليسندرو فولطا، 1800.

تجربة أورستد 1820 :
حقل كهربائي ⟵ حقل مغناطيسي.

الوحدة3 ♦ دراسة ظواهر كهربائية / الدارة (R,C)

خلاصة الدرس

تطور التوتر الكهربائي بين طرفي مكثفة خلال شحنها وتفريغها في ناقل أومي

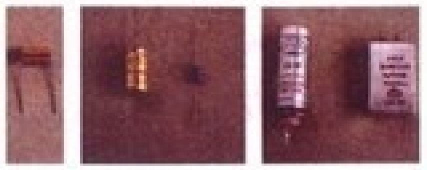
1/ المكثفة

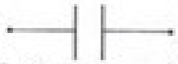
1 – 1 – مبدأ تركيب المكثفة

تتألف المكثفة من لبوسين ناقلين متقابلين يفصل بينهما عازل كهربائي ($diélectrique$) مثل الهواء، الورق، الشمع، الخزف ...

- رمز المكثفة : يرمز للمكثفة بالرمز المقابل.

نماذج لبعض المكثفات

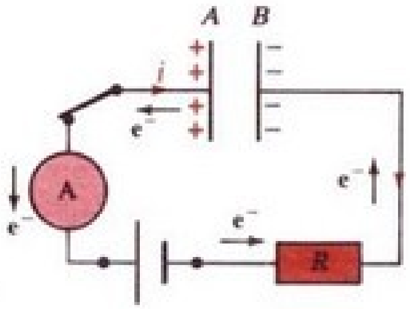




1 – 2 – شحنة المكثفة (q)

عند ربط مكثفة بين قطبي مولد كهربائي لتيار مستمر، تشحن المكثفة (الشكل 1) بشحنة كهربائية.

- فاللبوس (A) المربوط بالقطب الموجب للمولد يشحن بشحنة كهربائية موجبة (q_A).
- واللبوس (B) المربوط بالقطب السالب للمولد يشحن بشحنة كهربائية سالبة (q_B).



في كل لحظة يتحقق : $\boxed{q = q_A = |q_B|}$

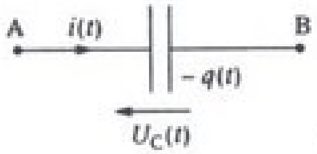
- نسمي الشحنة q شحنة المكثفة، وتقاس بالكولوم (C).
- شحنة المكثفة هي كمية الكهرباء التي تخزنها المكثفة.

ملاحظة هامة : لوجود العازل، لا تستطيع الإلكترونات المرور بين الصفيحتين.

1 – 3 – العلاقة بين شحنة المكثفة (q) وشدة التيار (i)

تعطى العلاقة بين شحنة المكثفة (q) المتغيرة أثناء شحنها وشدة التيار (i) الناتج عن تغير الشحنة بالعبارة التالية :

$$\boxed{i = \frac{dq}{dt}}$$



(q) و(i) مقداران جبريان موجبان أو سالبان.

- إذا زادت شدة التيار (حالة شحن المكثفة) فإن (i) يكون في الاتجاه الموجب ($i>0$).
- إذا نقصت شدة التيار (حالة تفريغ المكثفة) فإن (i) يكون في الاتجاه السالب ($i<0$)، وبالتالي تنقص شحنة المكثفة.
- إذا شحنت المكثفة بتيار كهربائي مستمر ثابت الشدة (I) فإن شحنة المكثفة المخزنة تكون متناسبة طردا مع الزمن (t)، وتعطى بالعبارة : $\boxed{q = It}$

1 - 4 - العلاقة بين شحنة المكثفة (q) والتوتر الكهربائي (u_c) المطبق عليها

تعطى بالعبارة : $\boxed{q(t)=C.u_c(t)}$

$q(t)$: تعني شحنة المكثفة في اللحظة الزمنية t .

$u_c(t)$: التوتر الكهربائي المطبق بين طرفي المكثفة

C : سعة المكثفة وهي مقدار ثابت، وتقاس بوحدة هي الفاراد (F).

$$1\,Farad=\frac{1\,Coulomb}{1\,Volt}$$

: الفاراد هي وحدة كبيرة، لذا عادة ما تستعمل أجزاؤها، وهي :

الميكروفاراد (μF) : $1\mu F=10^{-6}F$

النانوفاراد (ηF) : $1\eta F=10^{-9}F$

البيكوفاراد (pF) : $1pF=10^{-12}F$

1 - 5 - العلاقة بين (i) و(u_c)

نعلم أن $i=\frac{dq}{dt}$ لكن $q=u_c.C$. نعوض فنجد : $i(t)=\frac{d(u_c.C)}{dt}$ إذن :

$$\boxed{i(t)=C\frac{du_c}{dt}}$$

ملاحظة هامة

يفضل دوما في المكثفة الاصطلاح على جعل اتجاه التيار الكهربائي (i) عكس اتجاه التوتر (u_c) المطبق بين طرفيها، تماما مثل الآخذة (*le récepteur*).

2- الدارة الكهربائية (R,C)

2 - 1 - تعريف

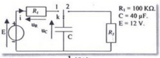
ثنائي القطب (R,C) هو ربط مكثفة سعتها (C) على التسلسل مع ناقل أومي مقاومته (R).

2 - 2 - المعادلة التفاضلية لتطور التوتر (u_c) بين طرفي مكثفة

1- الدراسة التجريبية

التركيب الكهربائي للشكل1 يسمح لنا بدراسة تغير (u_c) بدلالة الزمن (t) أي $u_c(t)$.

نستعمل مولدا للتوتر المستمر قيمته (E) وناقلين أوميين (R_1) و (R_2) ومكثفة سعتها (C) وقاطعة (K) وفولطمتر وكرونومتر.



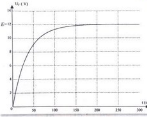
الشكل1

أ/ حالة شحن المكثفة

بوصل جهاز فولطمتر بين طرفي المكثفة لقياس التوتر الكهربائي (u_c) بين طرفيها.

توضع القاطعة (K) في الوضع (1) وتسجل قيم (u_c) في لحظات زمنية (t) مختلفة باستعمال الكرونومتر، ثم يُرسم المنحني البياني $u_c(t)$ (انظر التمرين 4).

منحني شحن المكثفة $u_c(t)$



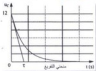
مناقشة : يمكن تقسيم المنحني إلى جزئين :

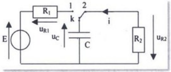
- الجزء الأول : تزداد فيه قيمة (u_c) من ($0v$) إلى (E) للمولد، وعليه تكون شحنة المكثفة قد تغيرت من ($0c$) إلى (q). يسمى النظام الانتقالي.
- الجزء الثاني : تثبت فيه قيمة (u_c) عند القيمة (E) أي : $\boxed{u_c=E=\text{ثابت}}$ وفيه تكون المكثفة قد شحنت تماما بالشحنة (q). يسمى النظام الدائم (*régime permanent*).

ب/ حالة تفريغ مكثفة

القاطعة K في الوضع 2 (الشكل2) ونسجل قيم التوتر u_c بدلالة الزمن t فنحصل على البيان التالي.

منحني تفريغ مكثفة $u_c(t)$





الشكل2

2- الدراسة التحليلية والمعادلة التفاضلية لتطور $u_c(t)$

أ/ حالة شحن مكثفة

نفترض أنه عند غلق القاطعة في الدارة (R,C) فإن تيارا كهربائيا (i) يجتاز الناقل الأومي (R).

نطبق بين النقطتين (A) و(B) خاصية جمع التوترات التي تسمى أيضا قانون التوترات :

$$u_{MB}=u_{MA}+u_{AB} \;......\; (1)$$

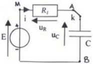
u_{MA} : هو التوتر الكهربائي بين طرفي الناقل الأومي (R) وللسهولة نكتب : $u_{MA}=u_R$

u_{AB} : هو التوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة (C) وللسهولة نكتب : $u_{AB}=u_C$

u_{MB} : هو التوتر الكهربائي بين طرفي المولد وله قيمة ثابتة E لذا نكتب : $u_{MB}=E$

نعوض في العبارة (1) فنجد :

$$E = u_R + u_C \text{ ...... } (2)$$



حسب قانون اوم ، $u_R = Ri$

وكما وضحنا سابقا ، $i = C\dfrac{du_c}{dt}$

ومنه نكتب ، $u_R = RC\dfrac{du_c}{dt}$

نعوض عن (u_R) في المعادلة (2) فنجد ، $E = RC\dfrac{du_c}{dt} + u_C$

بقسمة طرفي المعادلة على RC نجد ،

$$\boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{RC} = \frac{E}{RC}}$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى مع وجود طرف ثان.

- سميت معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى لأنها تحتوي على المتغير (u_c) ومشتقه الأول (تفاضله الأول بالنسبة للزمن $\dfrac{du_c}{dt}$)
- وذات طرف ثان هو $(\dfrac{E}{RC})$ غير معدوم.

ما هو حل هذه المعادلة التفاضلية ؟

هذه المعادلة تقبل حلا هو ، $\boxed{u_c = E(1- e^{-t/RC})}$

يمكن أن تتأكد من ذلك بالتعويض عن هذا الحل (u_c) في المعادلة التفاضلية، وستجد أنه يحققها.

بيان $u_c(t)$

- من اجل $t=0s$ ، $u_c = E(1- e^{-0/RC}) \Rightarrow u_c = 0v$
- من اجل $t=RC=\tau$ ،

$$u_c = E(1- e^{-RC/RC}) = E(1- e^{-1}) = E(1- \frac{1}{e}) = E(1- \frac{1}{2,718}) = 0,63E$$

- من اجل $t=5RC=5\tau$ نجد ، $u_c = 0,99E$

أي أنه في اللحظة $t=5\tau$ تصل قيمة التوتر u_c بين طرفي المكثفة إلى 99% من قيمتها النهائية E .

نتيجة

عمليا، نعتبر أن شحن مكثفة ينتهي في اللحظة الزمنية $t=5\tau$.

- في حالة زمن كبير جدا أي $t \to \infty$

$$u_c = E(1- e^{-\infty/RC}) = E(1- 0) = E \;;\; \boxed{u_c = E}$$

نتيجة

نظريا، نعتبر أن شحن مكثفة بشكل تام يحتاج إلى زمن غير منته $t \to \infty$. عملية شحن مكثفة هي عملية غير انية، فهي تدخل إذن في النظام الانتقالي.

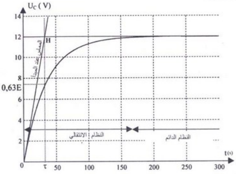
اصطلاح

نصطلح على تسمية المقدار RC بثابت الزمن لثنائي القطب (R,C) ونرمز له بالرمز τ أي ، $\tau=RC$ ويعطى بالثانية.

نلخص النتائج السابقة بالجدول التالي ،

$t(s)$	0	τ	5τ	∞
$u_c(v)$	0	$0,63E$	$0,99E$	E

ونرسم البيان $u_c(t)$ ،



خاصية هامة

إن ميل المماس للمنحني u_c في اللحظة $t=0s$ (عند المبدأ) يقطع الخط المقارب $u_c = E$ في نقطة H إحداثياها $(t=\tau=RC)$ و $(u_c = E)$ وقيمة الميل تساوي E/RC .

برهان هذه الخاصية في التمرين 3 .

ب/ حالة تفريغ مكثفة

عند جعل القاطعة (K) في الوضع (2) تتفرغ شحنة المكثفة (q) عبر الناقل الأومي (R) ونقصان الشحنة بمرور الزمن (dq/dt) يؤدي إلى ظهور تيار كهربائي (i) ندعوه تيار التفريغ اتجاهه عكس اتجاه تيار الشحن (انظر الشكل2).

ملاحظة هامة ،

عند الإبقاء على اتجاه تيار التفريغ كما هو يظهر أن المكثفة تلعب دور مولد، ولكننا نفضل جعل المكثفة

تلعب دور آخذة - كما أسلفنا الحديث - لذلك نصطلح على نفس اتجاه تيار التفريغ باتجاه تيار الشحن

وبهذا الاصطلاح يمكن استعمال العلاقة $i = \frac{dq}{dt}$ وليس $i = -\frac{dq}{dt}$ وبالتالي نكتب، $i = RC\frac{du_c}{dt}$.

كيف نحصل على المعادلة التفاضلية التي تحدد تطور u_c أثناء تفريغ المكثفة ؟

يمكننا الحصول على ذلك بسهولة، بجعل $E \to 0$ لأننا نزعنا المولد من الدارة التي ندرسها.

نعوض في المعادلة التفاضلية (3) فنجد :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{RC} = \frac{0}{RC} \Rightarrow \boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{RC} = 0}$$

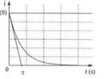
وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى بدون طرف ثان، وتقبل حلا هو : $\boxed{u_c = Ee^{-t/\tau}}$

على اعتبار أنه في اللحظة $t=0s$ ، $u_c = E$.

بيان $u_c(t)$

نستعين بالجدول التالي :

$t(s)$	0	$\tau=RC$	5τ	∞
$u_c(V)$	E	$\frac{E}{e}=0,37E$	$0,0067E$	0



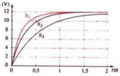
خاصية هامة

> إن ميل مماس المنحني في اللحظة $(t=0s)$ يساوي (E/τ) ويقطع محور الزمن في اللحظة $t=\tau$.

انظر البرهان في التمرين 3.

دراسة تأثير (R) و(C) على ثابت الزمن τ

تأثير (R) على τ مع بقاء (C) ثابتة



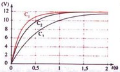
إذا أعدنا دراسة تطور (u_c) في حالة شحن نفس المكثفة من أجل قيم مختلفة لـ(R) نحصل على البيان التالي :

لاحظ أنه من أجل $R_2>R_1$ يكون $\tau_2>\tau_1$.

نتيجة

> كلما كانت المقاومة (R) أكبر كان ثابت الزمن τ أكبر، وبالتالي تنقص سرعة شحن المكثفة.

تأثير (C) على τ مع بقاء (R) ثابتة



ندرس تطور (u_c) لعدة مكثفات C_1 ، C_2 ، ... أثناء عملية الشحن مع الإبقاء على نفس الناقل الأومي (R)، فنحصل على البيان التالي :

لاحظ أنه من أجل $C_2>C_1$ يكون $\tau_2>\tau_1$.

نتيجة

> كلما كانت سعة المكثفة أكبر كانت عملية شحن المكثفة أبطأ لأن ثابت الزمن τ يكبر.

مشاهدة منحني الشحن والتفريغ بواسطة راسم الاهتزازات

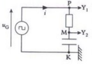
إن شحن وتفريغ مكثفة هما عمليتان تتمان في زمن صغير نسبيا لا يسمح بدراستهما، حتى ولو كانت (R) كبيرة و(C) كبيرة.

مثال : دارة (R,C) تتميز بأن $R=10^3\Omega$ و $C=2200\mu F$

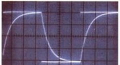
ثابتها الزمني : $\tau=RC=10^3\times 220010^{-6}$ ، أي $\boxed{\tau=2,2s}$

ففي هذا الزمن الصغير تكون شحنة المكثفة قد وصلت إلى 63% من قيمتها الكلية، وبالتالي نلاحظ صعوبة عملية تسجيل قيم شحن أو تفريغ المكثفة.

> عملية شحن المكثفة أو تفريغها تتم في زمن صغير لا يسمح بدراستها بواسطة الفولطمتر والكرونومتر.



- غير أنه من الممكن دراسة تطور عملية شحن وتفريغ المكثفة، بتكرار الظاهرة في أزمنة كبيرة نسبيا، ويتم تحقيق عملية التكرار عن طريق تغذية الدارة (R,C) بمولد منخفض التواتر (GBF) (*Générateur à Basses Fréquences*) ذي إشارة مربعة (⊓⊔) (أو يقال على شكل لبنات). وبهذا يمكن مشاهدة عملية شحن وتفريغ مكثفة بواسطة راسم الاهتزاز (*l'oscilloscope*).



في المدخل y_1 لراسم الاهتزاز

نلاحظ أننا ربطنا المولد (GBF) (لاحظ أن المولد بين المربط y_1 والمربط الأرضي ⏚). لذا نشاهد منحني تغير التوتر بين طرفي المولد ذي الإشارة المربعة، كما هو موضح بالمنحني المقابل.

في المدخل y_2 لراسم الاهتزاز

نلاحظ أننا ربطنا المكثفة (لاحظ أن المكثفة موجودة بين المربط y_2 والمربط الأرضي ⏚). لذا نشاهد منحني شحن المكثفة ومنحني تفريغها (يمكن الرجوع إلى التمرين 6 للاستزادة).

الطاقة المخزنة في مكثفة

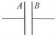
تختزن المكثفة الطاقة الكهربائية $(E_{él})$ أثناء شحنها، وتفقد هذه الطاقة أثناء التفريغ.

تعطى عبارة الطاقة الكهربائية المخزنة في مكثفة كما يلي :

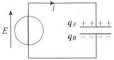
$$\boxed{E_{él} = \frac{1}{2}qu_c = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}Cu_c^2}$$

الدارة R,C

1/ المكثفة

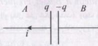
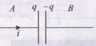


* رمز المكثفة :



* شحنة المكثفة : $\boxed{q(t)=q_A(t)=-q_B(t)}$

● **العلاقة بين شحنة المكثفة (q) وشدّة التيار (i)**

حالة تفريغ المكثفة	حالة شحن المكثفة
	
i جهته سالبة، q يتناقص، $\frac{dq}{dt}<0$ تتناقص.	i جهته موجبة، q تزداد، $\frac{dq}{dt}>0$ تتزايد.

* إذا شحنت المكثفة بتيار ثابت الشدّة (I) فإن شحنتها تزداد مع الزمن (t) حسب العلاقة :

$$\boxed{q=I.t}$$

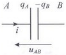
● **العلاقة بين شحنة المكثفة (q) والتوتر الكهربائي $u_C(t)$ المطبّق عليها**

$$\boxed{q(t)=C.u_C(t)}$$

C : سعة المكثفة وتقاس بالفاراد (F).

* يفضل دوما في المكثفة جعل اتجاه التيار (i) عكس اتجاه التوتر (u_C)، مثل الأخذة.

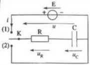
● **العلاقة بين (i) و (u_C)**

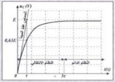
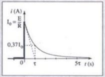
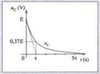
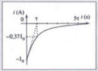


$$\boxed{i(t)=C\frac{du_C}{dt}}$$

2/ ثنائي القطب (R,C)

تعطى الدارة الممثلة في الشكل المقابل.



	حالة شحن المكثفة (تحت التوتر E) (القاطعة K في الوضع 1)	حالة تفريغ المكثفة (القاطعة K في الوضع 2)
قانون التوترات	$E=u_R+u_C=RC\frac{du_C}{dt}+u_C$	$0=u_R+u_C$ $=RC\frac{du_C}{dt}+u_C$
المعادلة التفاضلية	نضع $\tau=RC$ وهو ثابت الزمن : $\frac{du_C}{dt}+\frac{u_C}{\tau}=\frac{E}{\tau}$	$\frac{du_C}{dt}+\frac{u_C}{\tau}=0$
عبارة $u_C(t)$ وبيانها	$\boxed{u_C(t)=E(1-e^{-t/\tau})}$  u_c يزداد، ثم يثبت عند القيمة $u_C=E$	$\boxed{u_C(t)=E\,e^{-t/\tau}}$  $u_C(t)$ يتناقص، ثم ينعدم : $u_C=0V$.
عبارة $i(t)$ وبيانها	 i ينتقل فجأة من القيمة $(0A)$ إلى القيمة العظمى I_0 في الاتجاه الموجب، ثم يتناقص بسرعة حتى ينعدم.	 i ينتقل فجأة من القيمة $(0A)$ إلى القيمة العظمى $(-I_0)$ في الاتجاه السالب، ثم يتناقص بسرعة حتى ينعدم.

3/ الطاقة المخزّنة في المكثفة

أثناء الشحن، تخزن المكثفة طاقة كهربائية تعطى بالعبارة : $E_{élé}=\frac{1}{2}Cu_C^2=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$

$E_{élé}$: الطاقة الكهربائية بـ (J)،

C : سعة المكثفة بـ (F)،

u_C : التوتر الكهربائي بـ (V)،

q : الشحنة بـ (C).

تمارين خاصة بالدارة (R,C)

التمرين 1

أجب بصحيح أو خطأ على الاقتراحات التالية وصحح الخطأ.

1/ تتألف المكثفة من لبوسين عازلين.

2/ يفصل اللبوسين مادة عازلة.

3/ لا تسمح المكثفة بمرور التيار المستمر.

4/ إذا كانت شحنة المكثفة هي (Q) فإن شحنة اللبوس الموجب هي $(+Q)$ وشحنة اللبوس السالب هي $(-Q)$.

5/ سعة المكثفة (C) من رتبة (kF).

الحل

1/ خطأ. والصحيح هو : تتألف المكثفة من لبوسين ناقلين.

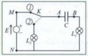
2/ صحيح.

3/ صحيح.

4/ صحيح.

5/ خطأ : لأن سعة المكثفة من رتبة الميكروفاراد (μF) وأقل، لا من رتبة الكيلوفاراد (kF).

التمرين 2



نحقق تركيب الدارة الكهربائية الممثلة بالشكل المرفق.

1/ تعرّف على ثنائيات الأقطاب المبينة بالدارة.

2/ نجعل القاطعة K في الوضع 1. أجب على ما يلي :

أ/ أي المصباحين يتوهج ؟ هل يبقى متوهجا ؟

ب/ ماذا نسمي التيار الكهربائي الذي سمح بتوهج المصباح ؟ ما هي عبارته ؟

ج/ ما مصدر هذا التيار ؟ هل يدوم طويلا ؟ حدد اتجاهه في مخطط للدارة الكهربائية.

د/ ماذا نسمي العملية التي حدثت للمكثفة ؟

3/ أ/ بعد عدة دقائق، كم تكون الشدة I للتيار الكهربائي المار في الدارة ؟

ب/ إذا ربطنا فولطمتر بين طرفي المكثفة، هل نسجل توترا كهربائيا u_C ؟ إذا كان كذلك، فما قيمته ؟ يعطى $E=10V$.

ج/ احسب الشحنة Q للمكثفة علما بأن سعتها $C=1\mu F$.

د/ استنتج قيمة الطاقة المخزنة من طرف المكثفة.

4/ صف ما يحدث عند جعل القاطعة في الوضع 2. ماذا تسمي هذه العملية ؟

الحل

1/ التعرف على ثنائيات الأقطاب

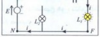
- (L_1) و(L_2) مصباحان.
- ثنائي القطب (AB) هو مكثفة سعتها (C).
- ثنائي القطب (MN) مولد مثالي للتوتر المستمر قيمته (E) وبالتالي مقاومته $(r=0\Omega)$.
- (K) قاطعة او مبدل.

2/ عند جعل القاطعة (K) في الوضع (1) :

أ/ المصباح (L_1) هو الذي يتوهج لمدة وجيزة، ثم ينطفئ ، لأنه عند جعل (K) في الوضع (1) يصبح (L_1) في دارة كهربائية مغلقة فيها المولد (E). اما المصباح (L_2) فيكون في هذه الحالة منتميا إلى دارة مفتوحة.

ب/ نسمي التيار الكهربائي الذي سمح بتوهج المصباح (L_1) بتيار الشحن للمكثفة (واختصارا تيار الشحن *courant de charge*)، ويعطى بالعبارة : $i=dq/dt$.

الشكل1



ج/ يفسر وجود تيار الشحن بأنه عند غلق القاطعة فإن مولد التيار يعمل بقوته المحركة الكهربائية (E) على نقل إلكترونات اللبوس (A) (المربوط بالقطب + للمولد) إلى اللبوس (B) فيظهر عليه فائض في الإلكترونات، لذلك يشحن اللبوس (B) بشحنة كهربائية سالبة $(-q)$، وبالتاثير تظهر شحنة كهربائية موجبة $(+q)$ على اللبوس (A).

ومن المعلوم أن حركة الإلكترونات ينشأ عنها تيار كهربائي يدوم ما دامت، وهذا هو تيار الشحن.

اتجاه تيار الشحن (i) : يخرج من القطب $(+)$ للمولد ويدخل من قطبه $(-)$، وهكذا تظهر الشحنة الموجبة $(+q)$ (انظر الشكل 1) على اللبوس (A) القريب من القطب $(+)$ للمولد، وتظهر شحنة سالبة على اللبوس (B) القريب من القطب $(-)$ للمولد.

د/ العملية التي حدثت للمكثفة هي : عملية شحن المكثفة.

3/ أ/ عند انتهاء عملية شحن المكثفة، تصبح شحنتها ثابتة (q) ، ثابت$=Q=q$

وعليه فإن : $i = \frac{dq}{dt} = 0$ ، إذن : $\boxed{i=0A}$

فيصبح التيار معدوما، وهو ما يفسر انطفاء المصباح (L_1).

ب/ إذا ربطنا فولطمتر بين طرفي المكثفة، فإنه يسجل توترا كهربائيا (u_c)، رغم أن $i=0A$.

قيمة u_c

حسب خاصية جمع التوترات، لدينا : $u_{MN} = u_{AB} + u_{BF}$

لكن : $u_{MN}=E$ و $u_{AB}=u_c$ وكذلك $u_{BF}=Ri=0$ باعتبار أن المصباح يماثل الناقل الأومي في درجات الحرارة غير الكبيرة، ومنه : $\boxed{u_c = E = 10v}$

ج/ حساب الشحنة (Q) للمكثفة

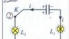
نعلم أن $Q=u_c.C$ مع $C=1\mu F=10^{-6}F$ إذن : $Q=10.10^{-6}$ ، $\boxed{Q=10^{-5}c}$

د/ الطاقة المخزنة من طرف المكثفة تعطى بالعبارة :

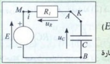
$$E = \frac{1}{2}Cu_c^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}\times 10^{-6}(10)^2 \; ; \; \boxed{E = 5.10^{-5}\, j}$$

4/ عند جعل القاطعة في الوضع (2) فإننا نلاحظ توهج المصباحين (L_1) و(L_2) معا، ثم ينطفئان، بالرغم من عدم ربط مولد بالدارة الكهربائية، ونفسر هذا بأن المكثفة بدأت تفقد شحنتها الكهربائية حتى تنتهي تماما، اي $(q=0c)$، وفي هذه الأثناء يمر تيار كهربائي $(i=dq/dt)$ يسمى تيار التفريغ الكهربائي. كما أن اتجاه تيار التفريغ (i) يكون معاكسا لاتجاه تيار الشحن (انظر الشكل2).

الشكل2



التمرين 3



لتكن الدارة (R,C) الممثلة بالشكل المرفق.

عندما تغلق القاطعة (K) يسري تيار الشحن (i) في الدارة.

1/ باستعمال خاصية جمع التوترات، جد علاقة بين (E) و(u_c) و(u_R).

2/ باستعمال قانون أوم، اعط عبارة (u_R)، واعط كذلك عبارة (i) بدلالة (C) و(du_c/dt).

3/ جد المعادلة التفاضلية للتوتر الكهربائي (u_c) .

4/ تاكد من أن هذه المعادلة التفاضلية تقبل حلا لها هو $u_c(t)=E(1-e^{-t/\tau})$ مع $\tau=RC$.

ماذا يسمى الثابت τ ؟ بيّن أن له وحدة زمن.

5/ أ/ احسب القيم $u_c(0)$ ، $u_c(\tau)$ ، $u_c(5\tau)$ و $u_c(\infty)$.

ب/ أعط المعنى الفيزيائي لكل من القيم السابقة.

6/ أ/ مثّل بيان $u_c(t)$.

ب/ أثبت أن ميل البيان $u_c(t)$ في اللحظة $(t=0s)$ يساوي (E/RC).

ج/ بيّن أن في لحظة نصف الزمن $t_{1/2}$ التي يكون فيها $(u_c=E/2)$ يتحقق $t_{1/2}=\tau.ln2$.

الحل

1/ إيجاد العلاقة بين (E) و(u_c) و(u_R)

حسب خاصية جمع التوترات لدينا : $u_{MB} = u_{MA} + u_{AB} \;...... (1)$

لكن : $u_{AB}=u_c$ و $u_{MA}=u_R$ كما أن $u_{MB} = E$

عندما نعوض في المعادلة (1) نجد : $\boxed{E = u_c + u_R} \;...... (2)$

وهي العلاقة المطلوبة.

2/ عبارة u_R

باستعمال قانون أوم نجد : $\boxed{u_R = Ri}$

عبارة i

نعلم ان تيار شحن المكثفة يعطى بالعبارة : $i=dq/dt$

لكن $q=C.u_c$ حيث (C) سعة المكثفة و(q) شحنتها في اللحظة (t). نعوض في عبارة (i) فنجد :

$$i=\frac{d}{dt}(C.u_c)$$

C : مقدار ثابت يمكن إخراجه من عامل التفاضل (d/dt)، ليكون :

$$\boxed{i=C\frac{du_c}{dt}}$$

وهي العبارة المطلوبة.

/3 إيجاد المعادلة التفاضلية للتوتر الكهربائي u_c

نعوض عن (u_R) و(i) في المعادلة (2) فنجد : $E=u_c+Ri=u_c+RC\dfrac{du_c}{dt}$

بالقسمة على (RC) نجد : $\boxed{\dfrac{du_c}{dt}+\dfrac{u_c}{RC}=\dfrac{E}{RC}}$ وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة.

ملاحظة : سميت معادلة تفاضلية لأن فيها المتغير (u_c) ومشتقه (تفاضله) الذي هو (du_c/dt).

/4 لكي نتأكد من ان حل المعادلة التفاضلية السابقة هو :

$u_c(t)=E(1-e^{-t/\tau})$ مع $\tau=RC$

يكفي أن نعوض بهذا الحل في المعادلة التفاضلية، لنجد أنه يحققها.

إذا كان $u_c=E(1-e^{-t/\tau})$ فإن المشتق بالنسبة للزمن (du_c/dt) نعينه كالتالي :

$$\frac{du_c}{dt}=E\left(0-(-\frac{1}{\tau})e^{-t/\tau}\right)=\frac{E}{\tau}e^{-t/\tau}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية فنجد :

$$\frac{E}{\tau}e^{-t/\tau}+\frac{E(1-e^{-t/\tau})}{RC}\overset{?}{=}\frac{E}{RC}$$

$$\frac{E}{\tau}e^{-t/\tau}+\frac{E}{RC}-\frac{E}{RC}e^{-t/\tau}\overset{?}{=}\frac{E}{RC}$$

لاحظ أن :

$$\cancel{\frac{E}{\tau}e^{-t/\tau}}+\frac{E}{RC}-\cancel{\frac{E}{RC}e^{-t/\tau}}=\frac{E}{RC}\Rightarrow\frac{E}{RC}=\frac{E}{RC}$$

فالمعادلة التفاضلية محققة.

يسمى الثابت τ ثابت الزمن.

إثبات أن τ له وحدة زمن (أو يقال إن τ متجانس مع الزمن)

نستعمل معادلة الوحدات :

بما أن $\tau=RC$ فإن : $[\tau]=[RC]$ وتقرأ : وحدة (τ) = وحدة (RC).

إذن : $[\tau]=[R][C]$ ...... *

لكن : $[R]=\dfrac{[u]}{[I]}\ \wedge\ [C]=\dfrac{[q]}{[u]}$ نعوض في المعادلة * فنجد :

$$[\tau]=\frac{[q]}{[u]}\frac{[u]}{[I]}=\frac{[q]}{[I]}$$

لكن $q=It$ إذن : $[q]=[I][t]$ وبالتالي : $[\tau]=\dfrac{[I][t]}{[I]}$ وأخيرا : $\boxed{[t]=[\tau]}$

هذا يعني أن (τ) له وحدة الزمن (t).

/5 أ/ حساب القيم $u_c(0)$ ، $u_c(\tau)$ ، $u_c(5\tau)$ و $u_c(\infty)$ وإعطاء المعنى الفيزيائي لكل منها

حساب $u_c(0)$

$$u_c(0)=E(1-e^{-0/\tau})\ ;\ \boxed{u_c(0)=0V}$$

وهذا يعني أنه في لحظة غلق القاطعة (K) أي اللحظة $(t=0s)$ يكون التوتر الكهربائي $(u_c=0V)$ بين طرفي المكثفة.

حساب $u_c(\tau)$

$$u_c(\tau)=E(1-e^{-\tau/\tau})=E(1-e^{-1})=E(1-\frac{1}{e})=E(1-\frac{1}{2,718})$$

$$\boxed{u_c(\tau)=0,63E=63\%E}$$

أي أنه في اللحظة $(t=\tau)$ يكون للتوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة القيمة (63%) من قيمة التوتر الكهربائي (E) بين طرفي المولد.

حساب $u_c(5\tau)$

$$u_c(5\tau)=E(1-e^{-5\tau/\tau})=E(1-e^{-5})=E(1-\frac{1}{e^5})$$

$$\boxed{u_c(5\tau)=0,99E=99\%E}$$

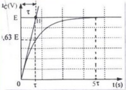
أي أنه في اللحظة $(t=5\tau)$ تبلغ قيمة التوتر الكهربائي (u_c) بين طرفي المكثفة القيمة (99%) من قيمة التوتر الكهربائي (E) للمولد. عمليا، يعتبر شحن المكثفة قد تم عند اللحظة (5τ).

حساب $u_c(\infty)$

$$u_c(\infty)=E(1-e^{-\infty/\tau})=E(1-0)\ ;\ \boxed{u_c(\infty)=E}$$

وهذا يعني أنه كي يصل التوتر الكهربائي (u_c) إلى القيمة (E) للمولد، لا بد أن تستغرق عملية الشحن زمنا طويلا جدا.

6/ أ/ تمثيل بيان $u_c(t)$



$t(s)$	0	τ	5τ	∞
$u_c(v)$	0	$0,63E$	$0,99E$	E

ب/ تعيين ميل المستقيم في اللحظة $(t=0s)$

يعيَّن ميل المستقيم نظريا من اشتقاق معادلة $u_c(t)$ بالنسبة للزمن وتعويض (t) بالقيمة $(t=0s)$

بمعنى أن الميل في اللحظة $(t=0s)$ يساوي $\left(\frac{du_c}{dt}\right)_{t=0}$

وبما أن ، $u_c = E(1- e^{-t/\tau})$

إذن ، $$\frac{du_c}{dt} = E\left(0 + \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\right) = \frac{+E}{\tau}e^{-t/\tau}$$

نعوض $(t=0s)$ فنجد ، $$\left(\frac{du_c}{dt}\right)_{t=0} = \frac{+E}{\tau}e^{-0/\tau} = \frac{+E}{\tau}e^{0} = \frac{E}{\tau}\cdot 1$$

وبما أن $\tau=RC$ فإن ، $$\boxed{\text{الميل} = \left(\frac{du_c}{dt}\right)_{t=0} = \frac{E}{RC}}$$

ج/ إثبات أن $t_{1/2}=\tau.\ln 2$

نعلم أن في لحظة نصف الزمن $(t_{1/2})$ يكون $(u_c = E/2)$.

نعوض عن (u_c) في معادلة $u_c(t)$ فنجد ،

$$u_c(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$$

$$\frac{E}{2} = E(1 - e^{-t_{1/2}/\tau})$$

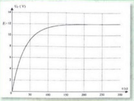
$$1 - e^{-t_{1/2}/\tau} = \frac{1}{2}$$

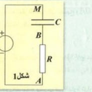
$$e^{-t_{1/2}/\tau} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \ln e^{-t_{1/2}/\tau} = \ln\frac{1}{2}$$

$$-\frac{t_{1/2}}{\tau} = \ln 1 - \ln 2 \quad ; \quad \boxed{t_{1/2} = \tau \ln 2}$$

التمرين 4

مكثفة غير مشحونة سعتها $(C=140,0\mu F)$ تربط على التسلسل مع ناقل أومي مقاومته (R). نقوم بشحنها بواسطة مولد للتيار الكهربائي قوته المحركة الكهربائية (E). في لحظة نعتبرها مبدأ الزمن $(t=0s)$، نغلق القاطعة (K) (الشكل المرفق) ونقوم بتسجيل تغير (u_c) بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن (t)، فنحصل على المنحني التالي.





1/ انطلاقا من البيان، عين القوة المحركة الكهربائية (E) للمولد.

2/ استنتج قيم الثوابت (τ) و$(t_{1/2})$ و(R).

3/ بكم مرحلة يتم شحن المكثفة ؟ حددها إذن.

4/ حدد عبارة كل من :

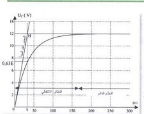
أ/ شحنة المكثفة بدلالة الزمن $q(t)$ ،

ب/ شدة تيار الشحن $i(t)$ ومثله بيانيا.

الحل

1/ تعيين القوة المحركة الكهربائية (E) للمولد

أعظم قيمة لـ(u_c) توافق قيمة (E). فمن المنحني البياني $u_c(t)$ نجد ، $E=12V$



2/ تعيين قيم الثوابت

الثابت الزمني τ

- طريقة 1 : يُعيَّن (τ) من فاصلة نقطة تقاطع المماس في مبدأ الزمن $(t=0s)$ مع المستقيم $u_c = E$ ، كما هو موضح بالشكل المرفق. حيث نقوم برسم المماس المذكور وتعيين اللحظة $(t=\tau)$. فنجد ، $\tau=34s$.
- طريقة 2 : الزمن (τ) هو الفاصلة الموافقة للقيمة $(u_c=0,63E)$ ، لذلك نعين الترتيبة $(0,63E)$ بشكل تقريبي ونسقطها على محور الزمن فنجد الفاصلة الموافقة لها، كما هو موضح بالشكل المرفق. أي ، $\tau=34s$.

• الثابت $(t_{1/2})$

الثابت $(t_{1/2})$ هو الفاصلة التي توافق الترتيبة $(u_c = E/2=6V)$. لذا نقوم بتعيين القيمة $(E/2=6V)$ ونسقطها على محور الزمن، ومن ثم نعين الفاصلة الموافقة لها، كما يوضحه الشكل المرفق، فنجد : $t_{1/2} \approx 24s$.

المقاومة (R)

نعلم أن $\tau=RC$ ومنه، $\boxed{R=\dfrac{\tau}{C}}$

نعوض فنجد،

$$R=\frac{34}{140.10^{-6}}\approx 2{,}43.10^{5}\,\Omega \;;\; \boxed{R\approx 2{,}4.10^{5}\,\Omega}$$

3/ يتم شحن المكثفة في النظام الانتقالي (*régime transitoire*)، وهذا يستغرق زمنا $(t=5\tau)$ أي $(t=5\times 34=170s)$. وفي هذه الحالة تكون شحنة المكثفة قد بلغت (99%) من شحنتها الكلية، ويكون،

$$u_c=\frac{99}{100}E$$

وعند هذا الحد ينعدم تيار الشحن أي يصبح $(i=0A)$ وتبدأ النظام الدائم (*régime permanent*) كما هو موضح بالشكل المرفق.

4/ ا/ عبارة الشحنة (q) للمكثفة

نعلم أن، $q=u_cC$ وبما أن، $u_c=E(1-e^{-t/\tau})$ إذن، $\boxed{q=EC(1-e^{-t/\tau})}$

ب/ عبارة شدة التيار (i)

أثناء شحن المكثفة يسري في الدارة تيار كهربائي ندعوه تيار الشحن (i)، ونعيّنه كالتالي، نشتق الشحنة بالنسبة للزمن، $i=dq/dt$

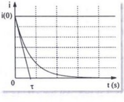
إذن نقوم باشتقاق عبارة الشحنة (q) فنحصل على،

$$\frac{dq}{dt}=EC\left(0-\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-t/\tau}\right)$$

ومنه، $$i=\frac{dq}{dt}=\frac{EC}{\tau}e^{-t/\tau}$$

لكن $\tau=RC$ إذن،

$$i=\frac{EC}{RC}e^{-t/\tau}\;\Rightarrow\;\boxed{i=\frac{E}{R}e^{-t/\tau}}$$



تمثيل $i(t)$

نكتفي ببعض قيم $i(t)$،

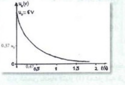
$t(s)$	0	τ	5τ
$i(A)$	$\dfrac{E}{R}$	$0{,}37\dfrac{E}{R}$	$0{,}0067\dfrac{E}{R}$

التمرين 5

إليك الدارة الكهربائية (R,C) الممثلة بالشكل المقابل.

نهدف إلى دراسة التفريغ الكهربائي لمكثفة مشحونة سعتها $C=10^{-4}F$ في ناقل أومي R.

1/ في البداية كانت القاطعة K في الوضع (1). ماذا حدث للمكثفة ؟



الشكل 1

2/ نضع القاطعة K في الوضع (2) ونفترض أن اتجاه تيار التفريغ (i_2) موضح في الدارة السابقة.

تسمح برمجة خاصة برسم تغيرات $u_c(t)$ بين طرفي المكثفة، كما توضحه الوثيقة المرفقة، لحظة وصل القاطعة K بالوضع (2).

ا/ احسب الشحنة الابتدائية (q_0) للمكثفة.

ب/ حدد في أي اتجاه تنتقل الإلكترونات.

ج/ حدد اتجاه تيار التفريغ الكهربائي. هل يتوافق مع اتجاه (i) المعطى في الشكل 1 ؟

3/ا/ ذكّر بالعلاقة بين (i) و (du_c/dt) حيث $u_c=u_{AB}$.

ب/ جد العلاقة بين u_c و u_R.

ج/ استخرج المعادلة التفاضلية لـ u_c في حالة تفريغ المكثفة.

د/ تأكد من أن حل المعادلة التفاضلية هو، $u_c(t)=Ee^{-t/\tau}$ مع $\tau=RC$.

4/ انطلاقا من المنحني، استنتج ما يلي،

ا/ قيمة E. ب/ ثابت الزمن τ. ج/ قيمة المقاومة R.

5/ا/ استخرج المعادلة التي تعطي تطور شدة تيار التفريغ $i(t)$. ب/ مثّل بيانيا $i(t)$.

الحل

1/ عندما كانت القاطعة في الوضع (1) حدث للمكثفة "عملية شحن كهربائي".

2/ ا/ حساب الشحنة الابتدائية (q_0) للمكثفة

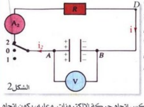
نعلم أن $q=u_cC$، وفي اللحظة الابتدائية $(t=0s)$ لدينا، $u_c=u_c(0)=6V$ ومنه،

$$\boxed{q_0=u_c(0).C}\;,\;C=10^{-4}F\;\Rightarrow\;\boxed{q_0=6.10^{-4}c}$$

ب/ تحديد اتجاه حركة الإلكترونات أثناء التفريغ الكهربائي

تنتقل الإلكترونات من اللبوس الكهربائي السالب (الذي به فائض من الإلكترونات) إلى اللبوس

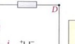
الموجب (الذي به نقص في عدد الإلكترونات)، كما هو موضح بالشكل المرفق.



الشكل2

ملاحظة : إن عملية شحن المكثفة يمكن أن نمثلها بانتقال الإلكترونات المخزنة في الصفيحة المعدنية (B) إلى الصفيحة المعدنية (A). ففي الأولى يحدث نقص في عدد الإلكترونات، فتزداد شحنتها الكهربائية (q_B)، بينما الصفيحة الثانية يحدث لها زيادة في عدد الإلكترونات فتنقص شحنتها (q_A)، لكن في كل لحظة يتحقق $(q_A=-q_B)$.

ج/ للتيار الكهربائي اتجاه اصطلاحي يعاكس اتجاه حركة الإلكترونات. وعليه، يكون اتجاه تيار الشحن باتجاه التيار (i) المشار إليه في الشكل 1. أما تيار التفريغ فاتجاهه عكس اتجاه تيار الشحن، وعليه فاتجاهه اتجاه التيار (i_2).



3/ أ/ التذكير بالعلاقة بين (i) و(du_c/dt)

نعلم أن $i=dq/dt$ بما أن $q=u_cC$ ، إذن :

ب/ العلاقة بين u_c و u_R

بفضل جعل المكثفة تؤدي دور آخذة، اي جعل (i) يدخل من اللبوس الموجب، كما يوضحه الشكل المقابل.

حسب الشكل، لدينا : $u_{DB}=u_{DA}+u_{AB}$

لكن $u_{AB}=u_c$ و $u_{DA}=u_c=Ri$ و $u_{DB}=0v$ لأنه لا يوجد مولد بين النقطتين (D) و(B).

إذن : $0=u_R+u_c \; ; \; u_c=-u_{DA} \Rightarrow \boxed{u_c=-u_R}$

وهي العلاقة المطلوبة

ج/ المعادلة التفاضلية لـ(u_c)

وجدنا سابقا : $u_c=-u_R$ ، إذن : $u_c=-Ri$

كما أننا أيضا وجدنا سابقا : $i=C\dfrac{du_c}{dt}$ ومنه نكتب :

$$u_c=-RC\frac{du_c}{dt} \; ; \; \boxed{u_c+RC\frac{du_c}{dt}=0}$$

وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة.

د/ حتى يكون $u_c=Ee^{-t/\tau}$ حلا للمعادلة التفاضلية، يجب أن يحققها. كيف ذلك ؟ يكفي أن نعوض بهذا الحل في المعادلة للحصول على : $0=0$.

في البداية، نقوم باشتقاق u_c بالنسبة للزمن :

$$\frac{du_c}{dt}=-\frac{E}{\tau}e^{-t/\tau}$$

لكن $\tau=RC$ ، إذن : $\dfrac{du_c}{dt}=-\dfrac{E}{RC}e^{-t/\tau}$

نعوض الآن في المعادلة التفاضلية :

$$\left(Ee^{-t/\tau}\right)+RC\left(-\frac{E}{RC}e^{-t/\tau}\right)\overset{?}{=}0$$

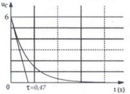
$$Ee^{-t/\tau}-Ee^{-t/\tau}=0$$

إذن بالفعل : $0=0$

المعادلة محققة، وبالتالي فالحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية.

4/ أ/ استنتاج قيمة E

نعلم أن قيمة u_c في اللحظة $t=0s$ تساوي E إذن : $\boxed{E=u_c(0)=6{,}0V}$



ب/ قيمة ثابت الزمن τ

نرسم المماس للمنحنى $u_c(t)$ عند المبدأ فيتقاطع مع محور الزمن في اللحظة $t=\tau$ كما يوضحه الشكل المرفق، ونقرأ من البيان القيمة : $\boxed{\tau=0{,}47s}$

ج/ قيمة المقاومة R

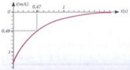
نعلم أن $\tau=RC$ ، إذن : $R=\tau/C$

$$R=\frac{0{,}47}{10^{-4}}=4{,}7.10^3\,\Omega \; ; \; \boxed{R=4{,}7.10^3\,\Omega=4{,}7\,k\Omega}$$

5/ أ/ إيجاد العلاقة التي تعطي تغير شدة تيار التفريغ $i(t)$

علما بأن $i=Cdu_c/dt$ و $\dfrac{du_c}{dt}=-\dfrac{E}{RC}e^{-t/\tau}$ بالتعويض نحصل على :

$$i=\cancel{C}\left(-\frac{E}{R\cancel{C}}e^{-t/\tau}\right) \Rightarrow \boxed{i(t)=-\frac{E}{R}e^{-t/\tau}}$$



ب/ تمثيل البيان $i(t)$

في اللحظة $t=0s$ لدينا :

$$i=-\frac{E}{R}=\frac{-6}{4{,}7.10^{+3}}$$

$$i\approx-1{,}28.10^{-3}A\approx-1{,}3\;mA$$

في اللحظة $t=\tau=0{,}47s$ لدينا :

$$i = -\frac{E}{R}e^{-1} = \frac{-6}{4{,}7.10^{+3}} \times \frac{1}{2{,}718} = -0{,}47mA$$

وفي اللحظة $t=1s$ لدينا :

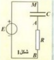
$$i = \frac{-6}{4{,}7.10^{+3}} \times \frac{1}{(2{,}718)^{\frac{1}{0{,}47}}} = -\,0{,}15\ mA$$

التمرين 6 (مشاهدة منحني الشحن والتفريغ براسم الاهتزاز - تمرين تجريبي)

I/1/ لتكن الدارة (R,C) الممثلة بالشكل 1، علما بان : $E=12V$ ، $R=1{,}0k\Omega$ ، $C=10\mu F$.

أ/ احسب الثابت الزمني τ لهذه الدارة.

ب/ احسب عند اللحظة $t=\tau$ التوتر الكهربائي u_c بين طرفي المكثفة ثم استنتج قيمة شحنة المكثفة q.



شكل 1

ج/ جد شدة التيار (i) في اللحظة $t=\tau$.

2/ أ/ احسب u_c و q للمكثفة عند اللحظة $t=5\tau$.

ب/ هل الزمنان τ و 5τ صغيران أم كبيران ؟

برايك، هل تتم عملية شحن المكثفة بسرعة أم ببطء ؟ علل.

II/ في الواقع، إن عملية شحن وتفريغ المكثفة تتم بسرعة لا تسمح بتتبعها لحظة بلحظة بواسطة الفولطمتر لقياس u_c والأمبيرمتر لقياس شدة تيار الشحن (i) المار في الدارة (R,C). من أجل ذلك نستعمل مولدا منخفض التواتر (GBF) ذا إشارة مربعة (⊓⊔) (او على شكل لبنات) دورها (T).

1/ لكي نشاهد الإشارة المربعة على شاشة راسم الاهتزاز نربط الطرف (B) للمولد بالمدخل y_1 لراسم الاهتزاز، اما طرفه الآخر (M) فنربطه بالكتلة ($la\ masse$ ⏚) لراسم الاهتزاز التي يجب ان تكون معزولة عن الأرض (الشكل 2).

شكل 2

بعد ضبط راسم الاهتزاز على القيم التالية :

السعة : $2v/div$

سلم الزمن : $1ms/div$

تظهر الإشارة كما هو موضح في الوثيقة المرفقة (الشكل السفلي).

أ/ احسب الدور T ومن ثم التواتر f للتوتر المربع الذي يعطيه المولد GBF .

ب/ حدد قيمة التوتر E الذي يعطيه المولد.

ج/ حدد قيمة u_{BM} في المجالين الزمنيين $0<t<T/2$ و $T/2<t<T$ وعلق على النتائج.

د/ ماذا يحدث للمكثفة خلال هذين المجالين ؟ هل تتكرر العملية ؟

III/1/ نريد الآن مشاهدة التوتر الكهربائي u_c بين طرفي المكثفة. من أجل ذلك نربط طرفها (A) بالمدخل y_2 لراسم الاهتزاز، اما طرفها (M) فهو مربوط بالكتلة (المربط الأرضي) كما هو موضح بالشكل 2.

نضبط المدخل y_2 لراسم الاهتزاز على القيم التالية :

الحساسية الشاقولية : $2v/div$

المسح الأفقي : $1ms/div$

فنحصل على شكل ممثل في الوثيقة السابقة (الشكل العلوي).

أ/ ما هي الظاهرة التي تترجمها هذه الوثيقة ؟ كيف تفسرها ؟

ب/ أعط العبارة النظرية لتغير التوتر الكهربائي $u_c(t)$ بين طرفي المكثفة. هل المنحني المشاهد يجسد هذه العبارة ؟

الحل

I/1/ أ/ حساب الثابت الزمني τ للدارة (R,C)

نعلم ان $\tau=RC$ مع $R=1k\Omega=10^3\Omega$ و $C=10\mu F=10.10^{-6}F$ إذن : $C=10^{-5}F$

نعوض فنجد : $\boxed{\tau=10^{+3}.10^{-5}=10^{-2}s}$

ب/ حساب التوتر الكهربائي u_c بين طرفي المكثفة عند اللحظة $t=\tau$

نعلم أن : $u_c = E(1-e^{-t/\tau})$

ففي اللحظة الزمنية $t=\tau$ لدينا : $u_c=E(1-e^{-\tau/\tau}) = E(1-e^{-1})$

اي : $u_c = E(1-\frac{1}{e}) = E(1-\frac{1}{2{,}718}) \Rightarrow u_c = 0{,}63E$

وبما ان $E=12v$ إذن : $\boxed{u_c = 0{,}63\times 12=7{,}56v}$

حساب الشحنة q للمكثفة في الزمن τ

نعلم ان $q=u_cC$ ومنه : $\boxed{q=7{,}56.10^{-5}\approx 7{,}6.10^{-5}c}$

ج/ إيجاد شدة التيار i في اللحظة τ

نعلم من خاصية جمع التوترات أن : $E=u_R+u_c=Ri+u_c$ ومنه : $Ri=E-u_c$ فنكتب :

$$\boxed{i = \frac{E-u_c}{R}}$$

بالتعويض نجد : $i = \frac{12-7{,}56}{10^3} \Rightarrow \boxed{i = 4{,}4.10^{-3}\ A}$

2/ أ/ حساب u_c و q في اللحظة الزمنية 5τ

بنفس الطريقة المتبعة في الجواب عن السؤال 1، نكتب : $u_c=E(1-e^{-\tau/\tau})$

لكن $t=5\tau$ إذن $u_c=E(1-e^{-5\tau/\tau})$

$$u_c = E(1-e^{-5}) = E(1-\frac{1}{e^5}) = E(1-\frac{1}{(2{,}718)^5}) = 0{,}99E$$

إذن : $u_c = 12(0,99) \Rightarrow \boxed{u_c = 11,88v \approx 12v}$

أما بالنسبة للشحنة q فلدينا : $\boxed{q \approx u_c C \approx 12.10^{-5} = 1,2.10^{-4}c}$

ب/ إن الزمنين τ و 5τ هما زمنان صغيران، إذ ان : $\tau = RC = 10^{-2}s$ و $5\tau = 5.10^{-2}s$.

ج/ بما ان في اللحظة $t=5\tau$ لدينا $u_c = 0,99E$ اي $u_c = 99\%E$ (عمليا، نعتبر ان شحن المكثفة ينتهي عند اللحظة 5τ ، وهي هنا فترة زمنية صغيرة)، لذا نعتبر أن شحن المكثفة يتم في زمن صغير هو 5τ ، وعليه فإن عملية شحن المكثفة تتم بسرعة، لكن ليس لحظيا، بل تستغرق فترة زمنية هي 5τ .

I/1/ ا/ حساب الدور T والتواتر f

الدور T هو زمن، لذلك نستعمل السلم المعطى للزمن، وهي القيمة التي ضبطت عليها قاعدة الزمن ($1ms/div$) والتي تسمى ايضا الحساسية الأفقية.

لاحظ ان T ممثل بـ 6 تدريجات اي $6div$ ، وإذن : $\boxed{T = 6 \times 1ms = 6ms = 6.10^{-3}s}$

أما التواتر f فنحسبه من العلاقة :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{6.10^{-3}} = \frac{10^3}{6} = 166,7 \ ; \ \boxed{f = 166,7\,Hz}$$

ب/ تحديد قيمة التوتر E

نعلم أن E أعظم قيمة ثابتة يعطيها المولد. والوثيقة تظهر أن أعظم قيمة ممثلة بـ 3 تدريجات وحسب السلم فإن كل 1 تدريجة ← $2v$ اي ($2v/div$) وبالتالي : $\boxed{E = 3 \times 2 = 6v}$

ج/ تحديد قيمة u_{BM}

- في المجال الزمني $0<t<T/2$ لدينا : $u_{BM} = E = 6v$
- في المجال الزمني $T/2<t<T$ لدينا : $u_{BM} = 0v$

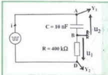
د/ في المجال الأول يحدث شحن للمكثفة. في المجال الثاني يحدث تفريغ للمكثفة. وتتكرر العملية في المجالات الزمنية الأخرى.

III/1/ الظاهرة التي تترجمها الوثيقة هي شحن وتفريغ المكثفة. ونفسرها بأن في المجال الأول يكون $u_{BM} = E$ فيسري تيار الشحن في الدارة (R,C)، ثم تزداد قيمة u_c من $0v$ إلى E. أما في المجال الثاني فيكون $u_{BM} = 0v$ وبالتالي يحدث تفريغ للمكثفة، فتنقص قيمة u_c من E إلى $0v$.

2/ العبارة النظرية لتطور التوتر الكهربائي u_c

- في حالة الشحن : $u_c = E(1 - e^{-t/\tau})$ مع $\tau = RC = 10^{-2}s$ و $E = 6v$ ومنه : $\boxed{u_c = 6(1 - e^{-100t})}$ (t) بالثانية و(u_c) بالفولط.
- في حالة التفريغ : $\boxed{u_c = 6\,e^{-100t}}$

التمرين 7

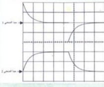


لتكن الدارة (R,C) الممثلة بالشكل المقابل ، $R = 400\Omega$ والمولد GBF يعطي توترا مربعا يأخذ القيمتين ($0V$) و(E) بالتناوب.

1/ ا/ ماذا يمثل التوتران u_1 و u_2 ؟

ب/ أعط العبارة النظرية لكل منهما.

ج/ أي التوترين يمكّننا من معرفة تغير شدة التيار (i) المار في الدارة بدلالة الزمن ؟



2/ ضبطنا راسم الاهتزاز على الحساسيتين التاليتين :

الحساسية الشاقولية في المدخلين y_1 و y_2 هي ($2v/div$)،

قاعدة الزمن : $0,5ms/div$.

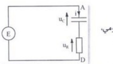
فشاهدنا المنحنيين الممثلين بالوثيقة المرفقة (مع ملاحظة أننا سحبنا أحد المنحنيين إلى الأعلى، حتى تكون القراءة جيدة).

ا/ أعط المعنى الفيزيائي لكل منحن، وميز أجزاءه المختلفة.

ب/ أرفق بكل منحن توتره المناسب.

ج/ استنتج من المنحنيين قيم المقادير التالية : التواتر f للمولد ، التوتر E ، الشدة الأعظمية I_{max} للتيار المار في الدارة ، ثابت الزمن τ مع حساب السعة C للمكثفة.

الحل



1/ ا/ التوتران u_1 و u_2

u_1 : هو التوتر الكهربائي u_R بين طرفي الناقل الأومي،

u_2 : هو التوتر الكهربائي u_c بين طرفي المكثفة.

ب/ العبارة النظرية لكل من u_1 و u_2

حالة شحن المكثفة : قصد السهولة نمثل جزءا من الدارة مع احترام القطبية كما يلي :

- توجيه التوتر u_c عكس اتجاه التيار (كالآخذة).
- توجيه u_R عكس اتجاه التيار (فالتيار يدخل من الكمون المرتفع إلى الكمون المنخفض).

نطبق قانون التوترات : $E = u_R + u_c$ مع :

$$i = C\frac{du_c}{dt} \quad ; \quad u_R = Ri$$

نعوض فنجد المعادلة التفاضلية لتطور u_c :

$$E = RC\frac{du_c}{dt} + u_c \; ; \; \boxed{\frac{E}{RC} = \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{RC}}$$

حل هذه المعادلة التفاضلية هو : $\boxed{u_c = E(1- e^{-t/\tau})}$ مع $\tau=RC$.

لاحظ ان u_2 باتجاه u_c إذن : $\boxed{u_2 = E(1- e^{-t/\tau})}$

اما u_R فهو : $u_R = RC\dfrac{du_c}{dt}$

نقوم باشتقاق عبارة u_c : $\dfrac{du_c}{dt} = \dfrac{E}{\tau}e^{-t/\tau} = \dfrac{E}{RC}e^{-t/\tau}$

نعوض في عبارة u_R فنجد : $u_R = \dfrac{RC}{RC}E\,e^{-t/\tau}$; $\boxed{u_R = E\,e^{-t/\tau}}$

لكن اتجاه u_1 عكس اتجاه u_R لذلك نكتب : $\boxed{u_1 = -u_R = -\,Ee^{-t/\tau}}$

حالة تفريغ المكثفة

- التوتر بين طرفي المولد معدوم $(0V)$.

في هذه الحالة يحدث تفريغ للمكثفة، فينعكس اتجاه التيار، إلا أننا سنحافظ على اتجاهه السابق، على اعتبار اتجاه (i) عكس اتجاه التوتر (u_c) (حالة الآخذة). في هذه المرحلة نضع $E=0$ في المعادلة التفاضلية السابقة لنحصل من جديد على المعادلة التفاضلية :

$\boxed{\dfrac{du_c}{dt} + \dfrac{u_c}{RC} = 0}$ وحلها هو : $u_c = -E\,e^{-t/\tau}$

إذن : $\boxed{u_2 = u_c = -\,Ee^{-t/\tau}}$

وبالمثل نجد u_R : $u_R = RC\dfrac{du_c}{dt} = \dfrac{-RC}{\tau}E\,e^{-t/\tau}$

لكن $\tau=RC$ إذن $u_R = -E\,e^{-t/\tau}$ ومنه : $\boxed{u_1 = u_R = -\,Ee^{-t/\tau}}$

ج/ التوتر u_R هو الذي يمكننا من معرفة تغيّر شدة التيار $i(t)$ لأن : $u_R=Ri$

ا/ المعنى الفيزيائي لكل منحن وأجزائه المختلفة

- المنحني 1 : يحتوي على جزئين مختلفين خلال كل دور زمني (T) للمولد :

الجزء الأول : يعبر عن تناقص التوتر u_R وأيضا i في الناقل الأومي R من قيمة عظمى I_{max} إلى القيمة 0 .

الجزء الثاني : يعبر عن تزايد تيار التفريغ في الناقل الأومي من القيمة $(-I_{max})$ إلى القيمة 0 (الإشارة السالبة أتت من كونه يسري في الاتجاه المعاكس لاتجاه تيار الشحن).

/2

- المنحني 2 : يحتوي أيضا على جزئين مختلفين :

الجزء الأول : يعبر عن تزايد u_c وبالتالي شحن المكثفة.

الجزء الثاني : يعبر عن تناقص u_c وبالتالي تفريغ المكثفة.

ب/ إرفاق بكل منحن توتره المناسب

- المنحني 1 : يمثل تغيرات $u_R(t)$.
- المنحني 2 : يمثل تغيرات $u_c(t)$.

ج/ استنتاج قيم المقادير

- التواتر : نعلم أن $f=1/T$ لذلك يجب تعيين الدور T من أحد المنحنيين 1 أو 2 وهذا بالاستعانة بقاعدة الزمن التي هي $0,5ms/div$.

لدينا : $T=0,5\times9$ ، أي $T=4,5ms$ ومنه $T=4,5.10^{-3}s$.

نعوض فنجد : $\boxed{f = 222\ Hz}$; $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{4,5.10^{-3}} \simeq 222\ Hz$

- التوتر E

باستعمال الحساسية الشاقولية وهي $2v/div$ ، وبالاستعانة بالمنحني 2 نجد أن (E) هي أعظم قيمة لـ u_c وهي ممثلة بـ 2 تدريجة، لذلك نكتب : $E=2\times2=4v$ ، $\boxed{E=4v}$

- الشدة الأعظمية للتيار I_{max}

نعينها من أعظم قيمة للمنحني 1 الذي يمثل $u_R(t)$.

لدينا : $u_R(t)=Ee^{-t/\tau}$

عند مبدأ المنحني أي في اللحظة $(t=0s)$ لدينا : $u_R(0)=Ee^{-0/\tau}$ إذن $u_R(0)=E$

لكن : $u_R=Ri$ إذن $i=u_R/R$ ومنه : $i(0) = I_{max} = \dfrac{E}{R} = \dfrac{4}{400}$

إذن : $\boxed{I_{max}=0,01A}$

- ثابت الزمن τ
- طريقة 1

برسم مماس المنحني 2 أو 1 في اللحظة الابتدائية $(t=0s)$ نجد (τ).

باستعمال المنحني 2 نجد : $\tau=0,6div$.

وبالاستعانة بالمسح وهو $0,5ms/div$ إذن نكتب : $\tau=0,5\times0,6=0,3ms$

$\boxed{\tau=0,3ms}$

- طريقة 2

نعلم أن (τ) هو الزمن اللازم لكي تبلغ u_c القيمة 63% من E أي لما يكون :

$u_c = 0,63E = 0,63\times4$; $u_c = 2,52v$

ننقل هذه القيمة على المنحني 2 فنجد أن : $\tau=0,3ms$

حساب سعة المكثفة (C)

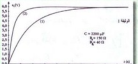
نعلم ان $\tau=RC$ إذن $\boxed{C=\tau/R}$ نعوض فنجد ، $C=\dfrac{0,3.10^{-3}}{400}$ ومنه ،

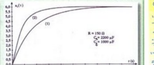
$\boxed{C=0,75.10^{-6}F}$

التمرين 8 (تمرين تجريبي)

1/ تمثل الوثيقة 1 عملية شحن مكثفة في دارة (R,C) على التسلسل، بواسطة راسم الاهتزاز، وهذا من اجل مقاومتين مختلفتين $R_1=150\Omega$ و $R_2=40\Omega$ مع ثبات (C) عند القيمة $C=2200\mu F$.

ارفق بكل بيان قيمة R المناسبة له. علل.





2/ نثبت R عند القيمة $R_1=150\Omega$ ونقوم بتغيير سعة المكثفة (C)، للحصول على القيمة $C_1=2200\mu F$ ثم القيمة $C_2=1000\mu F$ فنحصل على الوثيقة 2.

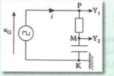
ارفق بكل بيان قيمة C المناسبة له. علل.

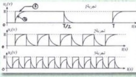
3/ لدراسة تاثير التواتر f للمولد GBF على عملية شحن وتفريغ المكثفة. نقوم بتغيير f مع إبقاء R و C ثابتتين، ونشاهد في كل مرة على راسم الاهتزاز منحني الشحن والتفريغ.

نحصل على المنحنيات التالية :

أ/ ميّز في كل تجربة المنحني $u_c(t)$ من المنحني $u_G(t)$.

ب/ صف في كل تجربة طريقة شحن وتفريغ المكثفة.





4/ ما هي النتائج المستخلصة من هذه الدراسة ؟

الحل

1/ إرفاق كل منحنى بمقاومته المناسبة

R_1 ، ترفق بالمنحنى 1

R_2 ، ترفق بالمنحنى 2.

التعليل : نعلم أن الثابت الزمني (τ) يعطى بالعبارة $\tau=RC$ فكلما كبرت R كبر τ مع ثبات قيمة C (سعة المكثفة)، إذن ، $\tau_1=R_1C$ و $\tau_2=R_2C$ وبما ان $R_1>R_2 \Leftarrow \tau_1>\tau_2$.

عند رسم مماسي المنحنيين 1 و2 في اللحظة $(t=0s)$.

نجد من المماسين أن $\tau_1>\tau_2$. نستنتج ان المنحني 1 يوافق R_1 والمنحني 2 يوافق R_2 .

2/ المنحني 1 يوافق السعة C_1 . المنحني 2 يوافق السعة C_2 .

التعليل : نفس إثبات السؤال السابق.

3/ أ/ التمييز بين المنحنيين $u_c(t)$ و $u_G(t)$

نعلم أن $u_c(t)$ يمثل التوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة، وهو منحني شحن وتفريغ المكثفة، وبناء عليه فهو ممثل بالمنحني 2 في جميع التجارب. أما $u_G(t)$ فهو التوتر الكهربائي بين طرفي المولد، الذي يأخذ القيمتين E و $0v$ خلال كل دور زمني T فهو إذن ممثل بالمنحني 1 في جميع التجارب.

ب/ طريقة شحن وتفريغ المكثفة

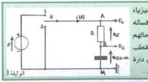
- في التجربة 1 ، نلاحظ ان التواتر f_1 صغير، لأن نصف الدور الزمني $T/2$ كبير بما يسمح بشحن المكثفة تماما، فيبلغ التوتر u_c بين طرفيها القيمة E ثم تتفرغ في زمن كاف هو نصف الدور الثاني اي من $T/2$ إلى T .
- في التجربة 2 ، التواتر f_2 له قيمة متوسطة، ولذا نلاحظ أيضا ان المكثفة تشحن وتفرغ في زمن كاف، لكنه اقل من زمن التجربة 1، وتصل قيمة u_c إلى E اثناء عملية الشحن.
- في التجربة 3 ، الدور صغير وبالتالي فالتواتر f_3 كبير ونلاحظ ان زمن شحن وتفريغ المكثفة صغير لدرجة أن عملية الشحن والتفريغ لا تتم بشكل كاف، فلا تصل قيمة u_c إلى E ، بل تصل إلى قيمة اقل من E ، ثم تبدأ عملية التفريغ. وهكذا فالزمن الدوري صغير بحيث لا يسمح بشحن ولا بتفريغ المكثفة بشكل كاف.

4/ النتائج المستخلصة من التجارب السابقة

- الثابت الزمني τ يتناسب طردا مع R ومع C .
- لكي تتم عملية شحن وتفريغ المكثفة بشكل كاف، يجب أن يكون الدور الزمني T مناسبا، فيجب اختيار التواتر f للمولد GBF بشكل مناسب.

التمرين 9 (وضعية ادماجية)

في حصة الأعمال التطبيقية، احضر استاذ الفيزياء علبة BM تحتوي على ثنائي قطب مجهول، فساله التلاميذ عن طبيعة ثنائي القطب داخل العلبة فأحالهم على تجربة الهدف منها دراسة استجابة ثنائي القطب المجهول لتوتر كهربائي مربع قيمته $(E,0)$ في دارة (R,θ) حيث θ الثابت المميز لثنائي القطب BM .

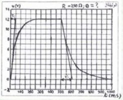


الوثيقة1

- في خطوة أولى طلب الأستاذ تركيب الدارة الممثلة بالوثيقة 1 مع العلم بأن هذه الدارة متصلة بحاسوب عن طريق تجهيز خاص وبرنامج هو ($WinLabo2$) الذي يسمح بمشاهدة تطور u_{BM} خلال الزمن بين طرفي ثنائي القطب المجهول على شاشة الحاسوب.

I/ التجربة 1

1/ في اللحظة الزمنية ($t=0s$) توصل القاطعة K بالوضع 1، وبين اللحظتين $t_1=300ms$ و $t_2=500ms$ تم تبديل القاطعة K إلى الوضع 2 فتمت مشاهدة المنحني $u_{BM}(t)$ كما تبينه الوثيقة 2.



أ/ من خلال المنحني $u_{BM}(t)$ ، حدّد نوع ثنائي القطب BM. برر إجابتك.

- ما هو الرمز الحقيقي للثابت θ ؟

ب/ حدد الأجزاء المختلفة لهذا المنحني وأعط المعنى الفيزيائي لها.

2/أ/ في حالة K موصولة بالوضع 1 و $u_{BM}=u$، اعط المعادلة التفاضلية لتطور u بدلالة الزمن في المجال الزمني $0<t<t_1$ وبيّن أنها من الشكل :

$$u+\tau_1\frac{du}{dt}=A$$

حيث A و τ_1 ثابتان يطلب تعيينهما بدلالة ثوابت الدارة.

ب/ أعط حلا لها.

ج/ استنتج قيمة الثابت المميز لثنائي القطب BM واحسب القيمة العددية للمقدار المميز لثنائي القطب BM .

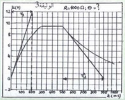
3/ أ/ بين أنه في المجال الزمني $t>t_2$ تعطى المعادلة التفاضلية لتطور u بدلالة الزمن بالشكل :

$$u+\frac{1}{\alpha}\frac{du}{dt}=0$$

ب/ حدد الثابت $1/\alpha$ بدلالة ثوابت الدارة وعيّن قيمته.

II/ التجربة 2

نستبدل الآن الناقل الأومي السابق (AB) بناقل أومي آخر مقاومته 1000Ω ونتبع نفس خطوات التجربة 1 فنحصل على منحني تطور $u_{BM}(t)$ من جديد في الوثيقة 3.



1/ ما الفرق بين منحني $u_{BM}(t)$ في الوثيقتين 2 و3 ؟ قيّم النتائج.

2/ استنتج بيانيا الثابت الجديد للزمن τ_2 .

3/ تأكد من انه يتطابق مع القيمة النظرية.

الحل

I/1/ أ/ تحديد نوع ثنائي القطب

انطلاقا من البيان $u_{BM}(t)$ الذي يمثل استجابة ثنائي القطب BM ، والذي يطابق منحني استجابة مكثفة أثناء الشحن والتفريغ. فنستنتج أن ثنائي القطب BM هو مكثفة.

- الرمز الحقيقي للثابت θ هو C المميز للمكثفة.

ب/ الأجزاء المختلفة للمنحني $u_{BM}(t)$

- الجزء الأول : $0ms\leq t\leq 300ms$

يمثل تطور التوتر الكهربائي u_{BM} أو u_c بين طرفي المكثفة أثناء شحنها.

- الجزء الثاني : $500ms\leq t\leq 1000ms$

يمثل تطور التوتر الكهربائي u_c بين طرفي المكثفة أثناء تفريغها.

ملاحظة : الجزء من المنحني بين $300ms$ و $500ms$ لا نهتم به، لأن بين هاتين اللحظتين تم تبديل القاطعة بين الوضعين 1 و2.

2/ أ/ المعادلة التفاضلية لـ u_{BM}

قصد التسهيل نضع : $u_{BM}=u$ ونعبر عن ثنائي القطب بالمكثفة.

حسب خاصية جمع التوترات لدينا : $u_{AM}=u_R+u$ ...... (1)

علما بأن $u=u_c$ و $u_{AM}=E$

لدينا كذلك $u_R=Ri$ و $i=Cdu_c/dt$ اي $i=Cdu/dt$ إذن $u_R=RCdu/dt$

نعوض في المعادلة (1) فنجد : $\boxed{E=RC\frac{du}{dt}+u}$ ...... (2)

هذه هي المعادلة التفاضلية، وهي من الشكل : $\boxed{u+\tau_1\frac{du}{dt}=A}$ ...... (3)

تعيين الثابتين A و τ_1

بالمطابقة بين المعادلتين (2) و(3) نجد : $\boxed{\tau_1=RC}$ و $\boxed{A=E}$.

ب/ حل المعادلة التفاضلية

$u=E(1-e^{-t/RC})$ أو $u_c=A(1-e^{-t/\tau_1})$.

ج/ قيمة الثابت τ_1 المميز للدارة

إن τ_1 هو الثابت الزمني $\tau_1=RC$ ، ويمكن تعيينه بيانيا من نقطة تقاطع مماس المنحني $u(t)$ في اللحظة ($t=0$) مع المستقيم $u=E=12v$.

نقرا من البيان فنجد : $\boxed{\tau_1=50ms}$

حساب الثابت المميز وهو السعة C لثنائي القطب (BM)

$$C=\frac{\tau_1}{R}=\frac{50.10^{-3}}{250}=200.10^{-6}\,F$$

3/ أ/ إيجاد المعادلة التفاضلية في المجال الزمني $t>t_2$

في هذا المجال الزمني تكون المكثفة في حالة تفريغ كهربائي، فلإيجاد المعادلة التفاضلية يكفي أن نضع $u_{AM}=0v$ أو نجعل $E\to 0$ في المعادلة التفاضلية 2 لنجد :

$$\boxed{u+RC\frac{du}{dt}=0}$$ وهي من الشكل $$u+\frac{1}{\alpha}\frac{du}{dt}=0$$

ب/ تحديد الثابت $1/\alpha$

بالمطابقة بين المعادلتين السابقتين نجد أن : $$\boxed{\frac{1}{\alpha}=RC=\tau_1'}$$

ويمكن تعيين قيمة الثابت τ_1' بيانيا برسم مماس المنحني في لحظة بدء التفريغ الكهربائي وهي اللحظة $t_2=500ms$ ، وتعيين نقطة تقاطعه مع المستقيم $u=0V$ فنجد أن : $\tau_1'\approx 50ms$.

II/1/ الفرق بين المنحنيين $u_{BM}(t)$ في الوثيقتين 2 و3

هو أن في الوثيقة 2 الثابت الزمني τ_1 للمكثفة صغير إذ أن $\tau_1=50ms$ ، وعليه فإن عملية شحن وتفريغ المكثفة (ثنائي القطب BM) يتم بسرعة كبيرة، لذا فإن عمليتي الشحن والتفريغ تكونان تامتين.
أما في الوثيقة 3 فإن عمليتي شحن وتفريغ المكثفة تتمان في زمن أطول نسبيا $\tau_2=200ms$ وعليه فإن عمليتي الشحن والتفريغ لا تتمان في زمن كاف، لذا لا يكون الشحن تاما، كما لا يكون التفريغ تاما.

2/ الثابت الزمني الجديد هو $\boxed{\tau_2=200ms}$

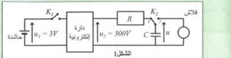
3/ التاكد نظريا من قيمة τ_2

$$\tau_2=RC=1000\times 200.10^{-6}=200.10^{-3}\ ;\ \boxed{\tau_2=200ms}$$

وهذه القيمة تتوافق مع القيمة التجريبية.

التمرين 10

نقترح دراسة مبدأ وماض ($Flash$) لآلة تصوير. للحصول على وميض ضوئي ساطع نستعمل أنبوب الوماض الذي يتطلب لاشتعاله توترا كهربائيا في حدود $u_2=300V$. لتخزين الطاقة الكهربائية الكافية لعمل الوماض نستعمل مكثفة سعتها C. شحن هذه المكثفة بواسطة دائرة إلكترونية مغذاة بمولد (بطارية) توترها $u_1=3V$ ، كما هو موضح في الشكل 1.



الشكل 1

الدارة الإلكترونية تعمل على رفع التوتر الكهربائي من $u_1=3V$ إلى $u_2=300V$.

$R=1k\Omega$ ، $C=150\mu F$

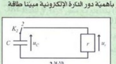
1/أ/ كيف نجعل الدارة الإلكترونية تشتغل (الجزء الأول من الدارة) ؟

ب/ عندما نجعل البدالة K_2 في الوضع 1، ماذا يحدث للمكثفة ؟

ج/ احسب ثابت الشحن 5τ .

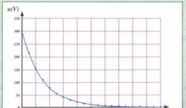
د/ احسب الطاقة الكهربائية $E_{éle}$ التي تخزنها المكثفة. ذكّر بأهمية دور الدارة الإلكترونية مبينا طاقة شحن المكثفة فيما لو نزعنا هذه الدارة الإلكترونية ؟

هـ/ عندما نجعل البدالة K_2 في الوضع 2، ماذا يحدث للوماض ؟



الشكل 2

2/ نعتبر أن الوماض من أنبوب به ناقل أومي مقاومته r كما هو موضح في الشكل 2 ونعتبر أن لحظة جعل K_2 في الوضع 2 هي اللحظة $t=0s$ ونسجل تطور $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة في المنحني البياني التالي.



الوثيقة

أ/ استنتج قيمة ثابت التفريغ τ' وقارن بينه وبين τ . ماذا تستنتج ؟

ب/ بيّن أن المعادلة التفاضلية لتطوّر $u_C(t)$ تُعطى بالمعادلة $\alpha\frac{du_C}{dt}+u_C=0$ مع تحديد عبارة الثابت α .

ج/ قارن بين α و τ' .

د/ تأكّد من أن حل المعادلة التفاضلية السابقة هو $u_C(t)=u_0e^{-t/\alpha}$. يطلب تعيين قيمة u_0 .

تأكّد من أن قيمة u_0 تتوافق مع توتر تشغيل الوماض.

الحل

1 /أ/ تشتغل الدارة الإلكترونية بمرور التيار الكهربائي فيها، وهذا يتحقّق بغلق القاطعة K_1 .

ب/ عندما نجعل البدّالة K_2 في الوضع 1 ، نشحن المكثفة.

ج/ حصيلة زمن الشحن

- نعلم أنه في الزمن τ تشحن المكثفة بـ 63%
- وفي الزمن 5τ تشحن المكثفة بـ 99%

وعليه فالزمن 5τ هو زمن الشحن t_c

$$t=5\tau=5RC$$

لدينا : $R=1k\Omega=10^3\Omega$ و $C=150\mu F=150.10^{-6}F=1{,}5.10^{-4}F$

إذن : $t=5\times10^3\times1{,}5.10^{-4}$

$$\boxed{t=7{,}5.10^{-1}s=0{,}75s}$$

د/ الطاقة الكهربائية المخزّنة

- تعطى عبارة الطاقة الكهربائية المخزنة من طرف المكثفة U_C بالعبارة $U_C=E\left(1-e^{-t/\tau}\right)$

$$\boxed{E_{éle}=\frac{1}{2}CU_c^2}$$

لكن في اللّحظة $t=5\tau$ تكون $U_C=E$

هنا $E=U_2=300V$ ومنه $U_C=300V$

نعوّض فنجد $E_{éle}=\frac{1}{2}\times1{,}5.10^{-4}\times(300)^2$ ، $\boxed{E_{éle}=6{,}75j}$

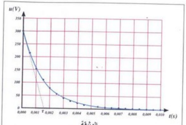
- لو نزعنا الدارة الإلكترونية لكان $U_C=U_1=3V$ فقط، وبالتالي تنقص طاقة شحن المكثفة،

ونؤكّد ذلك بالحسابات التالية : $\boxed{E_{éle}=6{,}75.10^{-4}j}$ ، $E_{éle}=\frac{1}{2}1{,}5.10^{-4}\times(3)^2$

هـ/ عندما نجعل البدّالة في الوضع 2، تتفرّغ طاقة المكثفة في الوماض، وبالتالي يتوهّج.

2/أ/ قيمة ثابت التفريغ τ'

/3



الوثيقة

طريقة 1 : إن المماس عند المبدأ للمنحني (الممثل في الوثيقة) يتقاطع مع محور الزمن في لحظة $t=\tau'=0{,}0016s$ (انظر الوثيقة في الشكل المجاور)، إذن $\boxed{\tau'=1{,}6.10^{-3}s}$

ننصح التلميذ بعدم استعمال هذه الطريقة، لصعوبة رسم المماس.

طريقة 2 : نعيّن $0{,}37U_C$ اي $0{,}37\times300=111V$ ثم نبحث عن فاصلة القيمة $111V$

فنجد $\tau'=1{,}6.10^{-3}s$.

حساب τ

$\boxed{\tau=1{,}5.10^{-1}s}$ ، $\tau=RC=10^3\times1{,}5.10^{-4}$

المقارنة بين τ و τ'

نلاحظ أن $\tau'<<\tau$. نستنتج أن زمن تفريغ المكثفة أصغر بكثير من زمن شحنها، وهذا حتى يتسنى للوماض تلقي كل طاقة المكثفة في زمن صغير جدًا، حتى تكون استطاعته كبيرة، وبالتالي يكون توهجه أخاذا.

ب/ إيجاد المعادلة التفاضلية لتطوّر $U_C(t)$ في حالة تفريغ المكثفة

حسب قانون جمع التوترات :

$$\begin{cases}U_C+U_r=0\\U_C+r_i=0\end{cases}$$

لكن $i=C\frac{dU_C}{dt}$

تمارين خاصة بالدارة (R,C)

إذن $U_C + rC\dfrac{dU_C}{dt} = 0$

بالقسمة على rC نجد : $\boxed{rC\dfrac{dU_C}{dt} + U_C = 0}$

وهذه المعادلة التفاضلية هي من الشكل $\alpha\dfrac{dU_C}{dt} + U_C = 0$

بالمطابقة بين المعادلتين نجد : $\boxed{\alpha = rC}$

ج/ المقارنة بين α و τ'

نعلم أن الدارة (r,C) في حالة التفريغ لديها الثابت الزمني $\tau' = rC$ إذن $\boxed{\tau' = \alpha}$

د/ لكي نتأكد من أن حل المعادلة التفاضلية هو $U_C(t) = U_0 e^{-t/\alpha}$، يجب تعويضه في المعادلة المذكورة، فنجد أنه يحققها.

المعادلة التفاضلية هي $\alpha\dfrac{dU_C}{dt} + U_C = 0$

نعيّن في البداية $\dfrac{dU_C}{dt}$ ، إذن $\dfrac{dU_C}{dt} = -\dfrac{U_0}{\alpha}e^{-t/\alpha}$

$$\alpha\left(-\frac{U_0}{\alpha}e^{-t/\alpha}\right) + U_0 e^{-t/\alpha} \overset{?}{=} 0$$

نعوّض في المعادلة التفاضلية فنجد :

$$-U_0 e^{-t/\alpha} + U_0 e^{-t/\alpha} \overset{?}{=} 0$$

بالفعل..........0 = 0..............................

فالمعادلة محققة.

إيجاد قيمة U_0

لدينا $U_C(t) = U_0 e^{-t/\tau}$

في اللحظة $t = 0$ لدينا $U_C(0) = U_0 e^{-0}$ إذن $\boxed{U_C(0) = U_0}$

ومنه نقول إن U_0 تمثل قيمة U_C في اللحظة الابتدائية (لحظة التفريغ $t = 0$)

وفي لحظة التفريغ كان التوتر الكهربائي $U_C = U_2 = 300V$

إذن $\boxed{U_0 = 300V}$

هـ/ إن التوتر $300V$ هو توتر تشغيل الوماض، كما جاء في نص التمرين.

الوحدة 3

تطور شدة التيار الكهربائي المار في وشيعة تحريضية

1- الوشيعة

1-1- مبدأ تركيب الوشيعة

- تتألف الوشيعة من عدد من اللفات من سلك ناقل.
- كل وشيعة تتميز بذاتيتها L التي تقاس بالهنري (H)، وبمقاومتها الداخلية (r)، وتقاس بالأوم.

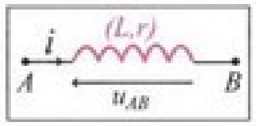
2-1- رمز الوشيعة

تمثل الوشيعة بالرمز  وأحيانا بالرمز  وفي هذا الأخير نبرز مقاومة الوشيعة (r).

- **الوشيعة المثالية:** يقال عن وشيعة إنها مثالية إذا كانت مقاومتها منعدمة $(r = 0\Omega)$.

3-1- العلاقة بين شدة التيار والتوتر الكهربائي بين طرفي وشيعة

- تعطى العلاقة بين شدة التيار (i) المار في الوشيعة (L,r) والتوتر الكهربائي u_{AB} بين طرفيها بالعلاقة : $\boxed{u_{AB} = ri + L\dfrac{di}{dt}}$



فالوشيعة تكون لها الخاصية التحريضية (أو الحثية).

- في حالة النظام الدائم (ثابت $= i$) أو حالة التيار المستمر فإن $\dfrac{di}{dt} = 0$ ومنه : $\boxed{u_{AB} = ri}$

فالوشيعة تتصرف كأنها ناقل أومي.

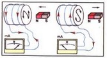
2-2- تذكرة

لقد درسنا في السنة الثانية التحريض الكهرطيسي $(l'induction\ électromagnétique)$ والتحريض الذاتي $(l'auto-induction)$. ولا بأس أن نذكر ببعض التجارب الهامة التي تم دراستها.

- **تجربة 1 (تجربة فاراداي)**

وهي تجربة تظهر التحريض الكهروطيسي نلخصها كما يلي :

- وشيعة يربط بين طرفيها غلفانومتر (يقيس شدة التيارات الضعيفة).



◄ عندما يقرب مغناطيس من أحد وجهي الوشيعة أو تقرب الوشيعة من المغناطيس فإن مؤشر الغلفانومتر ينحرف، مما يدل على مرور تيار كهربائي في دارة الوشيعة.

◄ ينعدم هذا التيار عندما نوقف الحركة النسبية بين الوشيعة والمغناطيس.

◄ تسمى هذه الظاهرة بظاهرة التحريض الكهرطيسي ، لأن تحريك المغناطيس حرض على ظهور تيار كهربائي داخل الوشيعة، والوشيعة أدت هنا دور مولد كهربائي قوته المحركة الكهربائية تعطى بقانون فاراداي-لانز :

$$\boxed{u = e = -L\frac{di}{dt}}$$

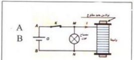
- **تجربة 2 (التحريض الذاتي)**

الأدوات :

◄ وشيعة ذات نواة حديدية،

◄ مصباح نيون توتر اشتعاله $60V$،

◄ مولد G لتوتر مستمر $(E = 4,5V)$.



التجربة :

◄ عند غلق القاطعة لا يتوهج مصباح النيون،

ونفسر هذا بأن التوتر $u_{AB} = 4,5V$ لا يمكن أن يصل إلى القيمة $(u_{AB} = 60V)$ التي تجعل توهج مصباح النيون ممكنا.

◄ عند فتح القاطعة ينقطع التيار الكهربائي الناشئ من المولد G ، غير أننا نلاحظ ظاهرة محيّرة تتمثل في توهج مصباح النيون. فما الذي جعل مصباح النيون يتوهج، رغم أن توهجه يحتاج، على الأقل، إلى توتر يساوي $60V$؟

◄ نجيب بقولنا إن تيار المولد صار منعدما $(I = 0A)$ بعد فتح القاطعة، لكن تيارا كهربائيا متحرضا (i) نشا من الوشيعة ذاتها وتغيره كبير (di/dt كبير جدا) مما جعل الوشيعة تؤدي دور مولد توتره عال جدا $e = -L\frac{di}{dt}$ لأن di/dt كبير جدا قد يجعل التوتر الكهربائي u_{AB} بين طرفي مصباح النيون ذا قيمة تفوق $60V$ مما يسبب توهجه.

◄ يسمى هذا التحريض الكهرطيسي الناشئ بالتحريض الذاتي ، لأن الوشيعة هي مصدر هذا التيار (i) (عندما تغير فيها التدفق المغناطيسي نتيجة انقطاع التيار I للمولد G).

2. دراسة الدارة (R,L) بواسطة راسم الاهتزاز

2-1- تعريف ثنائي القطب (R,L)

ثنائي القطب (R,L) مؤلف من ناقل اومي ذي مقاومة R مربوط على التسلسل مع وشيعة تحريضية (L,r) ذاتيتها L ومقاومتها r.

2-2- تطور شدة التيار الكهربائي المار في وشيعة

أ- الدراسة بواسطة راسم الاهتزاز لدارة (R,L) خاضعة لمستوى واحد من التوتر

- **تجربة 1**

الهدف من التجربة : 1/ إثبات تجريبيا أن الوشيعة تعاكس مرور التيار في دارة كهربائية.

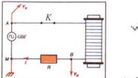
2/ تعيين ثابت الزمن τ .

تحقيق الهدف 1

العمل التجريبي :

نحقق تركيب دارة كهربائية على التسلسل مؤلفة من ، وشيعة ذاتيتها $L = 0,1H$ ومقاومتها مهملة $(r \approx 0\Omega)$، ناقل اومي مقاومته $R = 500\Omega$ وقاطعة K .

نغذي المجموعة بواسطة مولد كهربائي منخفض التواترات (GBF) يعطي توترات كهربائية مربعة على شكل لبنات $(en\ créneaux)$ قيمتها $5V$ وتواترها $f = 2000Hz$.



إجراء التجربة :

◄ نمثل مخطط تركيب الدارة بالشكل المرفق،

◄ نوصل الوشيعة بالمدخل y_A لراسم الاهتزاز المهبطي،

◄ نوصل الناقل الأومي R بالمدخل y_B .

• سؤال 1 : عند غلق القاطعة K ، ماذا نشاهد في المدخلين y_A و y_B لراسم الاهتزاز المهبطي ؟

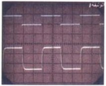
• جواب 1 : نرى في المدخل y_A التوتر الكهربائي u_{AM} بين طرفي الدارة (الوشيعة + الناقل الأومي) أي بين طرفي المولد GBF (الذي يعطي توترات مربعة) كما هو موضح بالوثيقة 1.

كما نرى في المدخل y_B التوتر الكهربائي u_R بين طرفي R ، وحسب قانون اوم فإن $u_R = Ri$ إذن ،

$$i = \frac{u_R}{R}$$

وعليه، يمكن القول إننا نرى في المدخل y_B تغير شدة التيار (i) المار في الدارة بدلالة الزمن (t) كما هو موضح بالوثيقة 1.

ملاحظة: لكي تسهل دراسة الوثيقة 1 ، نعيد تمثيلها بالشكلين المرفقين التاليين.



*** نتائج التجربة 1**

• سؤال 2 : أي المنحنيين فيه انقطاع ؟

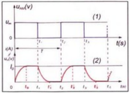
• جواب 2 : المنحني $u_{AM}(t)$ هو الذي يحدث فيه انقطاع ،

◄ فمثلا في المجال $0 < t < t_1$ نلاحظ أن $u_{AM} = 5V$،

◄ أما في المجال $t_1 < t < t_2$ فإن $u_{AM} = 0V$.

◄ وتتكرر هذه العمليات في المجالات الزمنية الأخرى.

اما المنحني $i(t)$ فليس فيه انقطاع.



- لاحظ في المنحني 1 ان u_{AM} يصل قيمته العظمى $(u_{max}=5V)$ لحظيا، فإذا افترضنا أن لحظة غلق القاطعة هي اللحظة $(t=0s)$ ففي اللحظة $(t=0+\varepsilon)$ (حيث ε لحظة متناهية في الصغر) يبلغ قيمته العظمى.
- لاحظ في المنحني 2 أن شدة التيار (i) المار في الدارة لا تبلغ قيمتها العظمى $(I_{max}=I_0)$ لحظيا، بل تستغرق فترة زمنية، من اللحظة $(t=0s)$ إلى اللحظة (t_0).

*** نتيجة 1 :**

> التيار الكهربائي لا يستقر لحظيا في الدارة (R,L)، بل يتاخر فترة زمنية معينة.

- نفس الملاحظات نسجلها في اللحظة t_2 إذ يبلغ التوتر u_{AM} قيمته العظمى $(u_m=5V)$ بينما التيار لا يبلغ قيمته العظمى إلا في اللحظة (t'_2).

2/ لاحظ أيضا من المنحني 1 أن التوتر الكهربائي u_{AM} ينعدم لحظيا (في اللحظة t_1) إذ يقفز من القيمة $5V$ إلى القيمة $0V$ وهذا تقريبا في نفس اللحظة t_1.

- لاحظ أيضا من المنحني 2 أن التيار الكهربائي (i) يتناقص من قيمته العظمى (I_{max}) إلى ان ينعدم $(i=0A)$ وهذا في المجال الزمني $[t_1,t'_1]$، إذن يستغرق فترة زمنية لكي ينعدم.

*** نتيجة 2 :**

> التيار الكهربائي لا ينقطع لحظيا في الدارة (R,L)، بل يتاخر فترة زمنية معينة.

• **سؤال 3** : كيف تفسر النتيجتين 1 و2 ؟

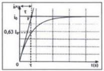
• **جواب 3** : إن وجود الوشيعة هو الذي سبب هذا التاخر الزمني، سواء في استقرار التيار أو في انقطاعه. وبالفعل، لو استبدلنا الوشيعة بناقل أومي (R') للاحظنا ان التيار الكهربائي يظهر لحظيا وينقطع لحظيا، ويكون شكله تماما مثل شكل u_{AM} اي على شكل لبنات (إشارات مربعة).

*** نتيجة 3 :**

> - الوشيعة تعاكس ظهور وانقطاع التيار الكهربائي لحظيا في الدارة الكهربائية (R,L).
> - التيار الكهربائي في الدارة (R,L) لا يصيبه اي انقطاع.

تحقيق الهدف 2

بما أن التوتر الكهربائي u_R يعطى بالعبارة $u_R=Ri$ وعليه فالمنحني البياني $u_R(t)$ لا يختلف عن المنحني البياني $i(t)$ إلا بالثابت R، ومنه نستنتج المنحني البياني $i(t)$ كما يوضحه الشكل المرفق.



تحديد الثابت الزمني τ

الطريقة الأولى

- نرسم مماس المنحني عند المبدأ.
- نحدد نقطة تقاطع المماس مع المستقيم الأفقي I_0 (الخط المقارب للمنحني $i(t)$)
- فاصلة النقطة F هي بقيمة الثابت الزمني τ.

الطريقة الثانية

- علما بان الثابت الزمني τ يوافق القيمة 63% من القيمة العظمى للتيار i اي $0,631_{max}$ او $0,63I_0$ (انظر الدراسة التحليلية).
- نبحث إذن عن $I_{\max}$ ثم نعين الترتيبة $0,631_{max}$،
- نحدد الفاصلة الموافقة لها التي هي ذاتها قيمة τ.

• تجربة 2

الهدف من التجربة

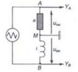
1- التحقيق التجريبي لقانون فاراداي : $u_{MB}=L\dfrac{di}{dt}$

2- التعيين التجريبي للذاتية L.

العمل التجريبي

نحقق تركيب الدارة التي عناصرها في حالة تسلسل وهي :

- وشيعة (L,r) ذاتيتها L مجهولة ومقاومتها r مهملة $(r\approx 0\Omega)$ (بدون نواة من الحديد اللين)،
- ناقل أومي مقاومته $R=2000\Omega$،
- مولد للتوتر المتناوب المثلثي ⋀⋀ يغذي الدارة بتوتر من $(-2V)$ إلى $(+2V)$ تواتره $1000Hz$،
- راسم اهتزاز ذو مدخلين.



إجراء التجربة

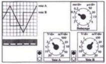
- نريد إظهار التوترين u_{AM} و u_{BM}.
- نوصل الوشيعة بالمدخل y_B لراسم الاهتزاز.
- نوصل الناقل الأومي بالمدخل y_A لراسم الاهتزاز، كما يوضح الشكل.
- نوصل المربط الأرضي M (الكتلة *la masse*) لراسم الاهتزاز بالأرض (الشكل).

تنبيه

- في المدخل A : عند ربط ثنائي القطب R به يجب أن نشاهد التوتر الكهربائي u_{AM}، كما يمكن اعتبار انه يمكن مشاهدة التيار الكهربائي i لأن $i=\dfrac{u_{AM}}{R}$ فليس بين u_{BM} و i فرق إلا في R (فمثلا في حالة $R=1\Omega$ نجد $i=u_{AM}$).
- في المدخل B : عند ربط الوشيعة بالمدخل B يجب مشاهدة التوتر الكهربائي u_{BM}.
- لاحظ ان كلا المربطين A و B للمولد GBF غير موصولين بالأرض (أي بالمربط الأرضي ذي الرمز ⏚). ولإنجاح التجربة ينصح باستعمال مولد GBF بكتلة طافية (*GBF à masse flottante*)، بمعنى ان مربطه الأرضي يجب أن يكون معزولا عن الأرض، وذلك لتجنب استقصار الدارة بين M وكتلة المولد.

• **سؤال 1** : اضبط المدخلين A و B بنفس الحساسية الشاقولية. ماذا تلاحظ ؟

• جواب 1 : أكيد ستلاحظ أن المنحنى المحصل في المدخل B أصغر بكثير من المنحنى المحصل في المدخل A، أي $u_{BM} << u_{AM}$.



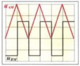
• سؤال 2 : كيف ستضبط إذن الحساسيتين الشاقوليتين ؟

• جواب 2 : أكيد ستضبط الحساسيتان على قيم مختلفة بحيث يظهر منحنيان واضحان ومقروءان (واقعان في مجال شاشة راسم الاهتزاز).

- لنضبطهما إذن على القيم التالية :

• الحساسية الشاقولية على A هي : $1,5V / div$
• الحساسية الشاقولية على B هي : $100mV / div$
• زمن المسح الأفقي هو : $0,5ms / div$

نحصل على الوثيقة المرفقة.

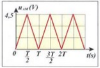


لتسهيل دراسة الوثيقة المرفقة يحسن إعادة تمثيلها كالتالي :

نتائج التجربة

• سؤال 3 : بيّن أن التوتر u_{AM} يتناسب مع i .

• جواب 3 : بما أن $u_{AM} = Ri$ فهذا يعني أن u_{AM} يتناسب طردا مع i .



• سؤال 4 : كيف تتأكد من أن بيان $u_{AM}(t)$ يطابق تقريبا التوتر المثلثي u_{AB} الذي يطبقه المولد GBF على الدارة ؟

• جواب 4 : بالرجوع إلى الدارة الكهربائية، وحسب خاصية جمع التوترات، نكتب : $u_{AB} = u_{AM} + u_{MB}$

لكن $u_{MB} = -u_{BM}$ كما أن $u_{BM} << u_{AM}$ كما وضحنا في ج1 إذن $|u_{MB}| << u_{AM}$ ومنه نكتب : $\boxed{u_{AB} \approx u_{AM}}$

وبناء عليه، نتوقع أن يكون شكل التوتر u_{AM} مثلثيا تماما كشكل التوتر u_{AB} للمولد GBF .

وهذا ما لاحظناه بالضبط على شاشة راسم الاهتزاز المهبطي، إذ أن بيان u_{AM} ذو شكل مثلثي.

• سؤال 5 : من شاشة راسم الاهتزاز المهبطي يظهر أن المنحنى البياني $u_{BM}(t)$ على شكل إشارة مربعة. تحقق حينئذ من أن قانون فاراداي $u_{MB} = L\dfrac{di}{dt}$ يفسر هذا البيان.

• جواب 5 : بما أن $u_{AM} = Ri$ فإن $i = \dfrac{u_{AM}}{R}$

نعوض في قانون فاراداي فنجد : $u_{MB} = L\dfrac{d}{dt}(\dfrac{u_{AM}}{R})$

لكن R مقدار ثابت، لذلك بالإمكان إخراجه من داخل مؤثر المشتق d/dt لنجد :

$$u_{MB} = \frac{L}{R} \times \frac{du_{AM}}{dt}$$

وبما أن الدالة u_{AM} دالة تآلفية كما يوضحه الشكل المقابل، فإنه يمكن كتابة معادلتها كالتالي :

• في المجال الزمني $0 < t < \dfrac{T}{2}$:

$u_{AM} = at + b$ مع $b = -3V$ ومعامل التوجيه = الميل = a

إذن : معامل التوجيه = $a = \dfrac{du_{AM}}{dt}$ وعليه فإن : $\boxed{u_{MB} = \dfrac{L}{R} \times a = \text{ثابت موجب}}$

• وفي المجال الزمني $\dfrac{T}{2} < t < T$:

الدالة u_{AM} ممثلة بخط مستقيم ذي ميل سالب، لذا فإن معادلته هي : $u_{AM} = -a't + b'$

لما نشتق هذه الدالة بالنسبة إلى الزمن نجد : $\dfrac{du_{AM}}{dt} = -a'$

لكن $u_{BM} = \dfrac{L}{R} \times \dfrac{du_{AM}}{dt}$ إذن : $\boxed{u_{MB} = -\dfrac{L}{R}a' = \text{مقدار ثابت سالب}}$

ويكون منحنى التوتر u_{BM} على شكل (إشارة مربعة).

وهذا ما لاحظناه بالضبط على شاشة راسم الاهتزاز، فقانون فاراداي $u_{MB} = L\dfrac{di}{dt}$ محقق فعلا.

استنتاج قيمة L

وجدنا في المجال الزمني $0 < t < \dfrac{T}{2}$ أن $u_{BM} = \dfrac{L}{R}a$ ومنه : $\boxed{L = \dfrac{u_{MB}R}{a}}$

لدينا : $R = 1000\,\Omega$ و $u_{BM} = 100mV \times 1,5 = 150mV = 0,15\,V$

أما a فهو معامل توجيه الدالة التآلفية u_{AM} :

$$\text{الميل} = a = \frac{du_{AM}}{dt} = \frac{4,5-0}{\frac{T}{2}-0} = \frac{4,5 \times 2}{T} = \frac{9}{T}$$

لكن : $T = 2 \times 0,5ms = 10^{-3}s$ ، أي $\boxed{T = 10^{-3}s}$

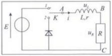
إذن : $a = \dfrac{9}{10^{-3}} = 9000\,V.s^{-1}$ ، ومنه $a = 9.10^{3}\,V.s^{-1}$

نعوض في عبارة الذاتية L فنجد $L = \dfrac{0,15 \times 1000}{9 \times 10^{3}}$ وأخيرا $\boxed{L = 0,01666H \approx 16,7mH}$

3- المعادلة التفاضلية الموافقة لتطور التيار في الوشيعة

الحل التحليلي

أ- حالة نشوء التيار في دارة (R, L) على التسلسل



نعتبر الدارة (R, L) مع وجود مولد للتوترات (الشكل).

◄ عندما نجعل القاطعة K في الوضع 1 ينشأ تيار كهربائي i في الدارة (R, L) . لندرس تطوره.

- حسب خاصية جمع التوترات نكتب: $E = u_R + u_L$
- وحسب قانون أوم: $u_R = Ri$ و $u_L = ri + L\frac{di}{dt}$

إذن: $E = Ri + ri + L\frac{di}{dt} = (R+r)i + L\frac{di}{dt}$

بالقسمة على L نجد: $\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R+r}{L}i = \frac{E}{L}}$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى بوجود طرف ثان، قد رأينا مثلها في حالة الدارة (R,C) وأعطينا حلا لها وهو: $\boxed{i(t) = \frac{E}{R+r}(1-e^{-t/\tau})}$ مع $\tau = \frac{L}{R+r}$.

ويمكن أن نتأكد من هذا الحل بتعويضه في المعادلة التفاضلية فنجد أنه يحققها.

- بيان $i = f(t)$

- لما $t = 0s$ ، $i = \frac{E}{R+r}(1-e^{-0/\tau})$ ، إذن: $\boxed{i = 0A}$

ومعناه أن في لحظة غلق القاطعة ($t = 0s$) يكون التيار منعدما، وعليه فإن التيار لا يظهر لحظيا عند غلق القاطعة.

- لما $t = \tau$ ، $i = \frac{E}{R+r}(1-e^{-1})$ ، إذن: $i = \frac{E}{R+r}\left(1-\frac{1}{e}\right)$ مع $e = 2,718$

إذن: $0,63 \approx \left(1-\frac{1}{e}\right) \approx 0,63$ ومنه: $\boxed{i = 0,63\frac{E}{R+r}}$

ومعناه أن في اللحظة $t = \tau$ تصبح شدة التيار مساوية $63\% = 0,63$ من الشدة العظمى للتيار وهي $I_{max} = \frac{E}{R+r}$.

- في اللحظة $t = 5\tau$ ، $i = \frac{E}{R+r}(1-e^{-5\tau/\tau})$ ، إذن: $\boxed{i = 0,99\frac{E}{R+r}}$

أي أن في اللحظة $t = 5\tau$ تصل شدة التيار إلى 99% من قيمتها العظمى.

- في اللحظة $t \to +\infty$ ، $i = \frac{E}{R+r}(1-e^{-\infty/\tau})$ ومنه $i = \frac{E}{R+r}(1-0)$

إذن: $\boxed{i = I_{max} = \frac{E}{R+r}}$

*** نتيجة هامة**

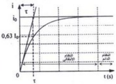
- إن التيار الكهربائي لا يظهر لحظيا في الدارة (R,L) عند غلق القاطعة، لأن الوشيعة تعاكس نشوء التيار الساري في الدارة.
- نظريا، نعتبر أنه لكي يستقر التيار في قيمته العظمى $i = I_{max} = \frac{E}{R+r}$ يلزم زمن لانهائي.
- في اللحظة $t = 5\tau$ يصل التيار إلى 99% من قيمته العظمى I_{max}، وبالتالي نعتبر، عمليا، أن الدارة (R,L) تصل إلى النظام الدائم (المستقر) في هذه اللحظة.

- البيان $i = f(t)$

بنقل القيم السابقة إلى جدول:

$t(s)$	0	τ	5τ	∞
$i(A)$	0	$0,63\,I_{max}$	$0,99\,I_{max}$	I_{max}

يمكن رسم البيان $i = f(t)$



تعيين ثابت الزمن τ

يعين τ بإحدى الطريقتين:

1/ بيانيا برسم مماس المنحنى في المبدأ أي في بداية الزمن ($t = 0s$) لنجد أنه يتقاطع مع المستقيم ذي المعادلة $i = I_{max} = I_0 = \frac{E}{R+r}$ (انظر الشكل).

2/ باعتبار أن ثابت الزمن τ يوافق القيمة $0,63\,I_{max}$ لشدة التيار i (انظر البيان).

II. حالة انقطاع التيار عن الدارة (R,L)

عندما تصل الدارة (R,L) إلى حالة النظام الدائم نجعل القاطعة في الوضع 2 (الشكل)، فينقطع التيار الناشئ عن المولد، لكن تيارا كهربائيا i ينشأ من الوشيعة ويسري في الدارة (R,L). لندرس كيف يتطور هذا التيار داخل الدارة (R,L).

يكفي أن نضع $E = 0$ في المعادلة التفاضلية السابقة (لأننا نزعنا المولد) لنجد: $\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R+r}{L}i = 0}$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى بدون طرف ثان (الطرف الأيمن منعدم القيمة) حلها هو:

$\boxed{i = \frac{E}{R+r}e^{-t/\tau}}$ مع $\tau = \frac{L}{R}$

نلاحظ أن في اللحظة $t = 0s$ ، $i = \frac{E}{R+r}e^{-0/\tau}$ ، إذن: $i = I_{max} = \frac{E}{R+r}$

فشدة التيار تساوي قيمتها العظمى I_{max}.

وفي اللحظة $t = \tau$ لدينا: $i = \frac{E}{R+r}e^{-\tau/\tau}$ ومنه: $i = \frac{E}{R+r}e^{-1}$

إذن، $i=\frac{E}{R+r}\times\frac{1}{e}$ ومنه، $i=\frac{E}{R+r}\times\frac{1}{2,718}$

إذن، $\boxed{i\approx 0,37 I_{max}}$ مع $\boxed{I_{max}=\frac{E}{R+r}}$

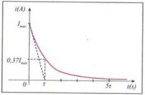
أي في هذه اللحظة تكون شدة التيار قد تناقصت وصارت مساوية تقريبا 37% من قيمتها العظمى I_{max}.

وفي اللحظة $t\to+\infty$ لدينا، $i=\frac{E}{R+r}e^{-\infty/\tau}$ إذن، $\boxed{i=0A}$ فشدة التيار تنعدم.

*** نتيجة هامة**

• عند انقطاع التيار الكهربائي في الدارة (R,L) فإن التيار الكهربائي لا يمر آنيا من القيمة I إلى القيمة $0\,Ampère$ لأن الذاتية تعاكس حينها تناقص التيار، وبناء عليه، يستمر جريان التيار الكهربائي i في نفس اتجاه سريانه قبل قطع التيار.

◄ بيان $i=f(t)$



*** الطاقة في وشيعة**

عند غلق القاطعة K تخزن الوشيعة طاقة مغناطيسية، يمكن أن تفقدها عند فتح القاطعة. وتعطى عبارة الطاقة المخزنة في وشيعة بالعبارة: $\boxed{E_m=\frac{1}{2}Li^2}$

الدارة R,L

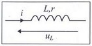
1/ الوشيعة

• رمز الوشيعة:

• **الوشيعة المثالية (الصرفة، الصافية): تتميز بأن** $r=0\Omega$.

• **العلاقة بين شدة التيار (i)، والتوتر الكهربائي (u_L) بين طرفي الوشيعة**

$$\boxed{u_L = L\frac{di}{dt}+ri}$$



u_L: التوتر الكهربائي بـ (V)،

L: ذاتية الوشيعة بـ (H)،

i: شدة التيار بـ (A)،

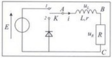
r: مقاومة الوشيعة بـ (Ω).

ملاحظات

• هذه العلاقة صحيحة، إذا كانت الوشيعة بدون نواة من الحديد المطاوع.

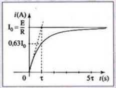
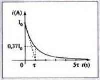
• في حالة التيار المستمر ($i=$ ثابت) أو النظام الدائم $\frac{di}{dt}=0$، الوشيعة تتصرف كأنها ناقل أومي: $\boxed{u_L=ri}$.

• الوشيعة تمانع مرور التيار فيها.



2/ ثنائي القطب (R,L)

تعطى الدارة الممثلة بالشكل القابل.

	حالة نشوء التيار تحت توتر E (القاطعة K في الوضع 1)	حالة انقطاع التيار (القاطعة K في الوضع 2)
قانون التوترات	$E = u_L + u_R$ $E = L\dfrac{di}{dt} + ri + Ri$ $= L\dfrac{di}{dt} + (R+r)i$	$0 = u_L + u_R$ $0 = L\dfrac{di}{dt} + ri + Ri$
المعادلة التفاضلية	$\dfrac{E}{L} = \dfrac{di}{dt} + \dfrac{R+r}{L}i$ نضع $\tau = \dfrac{L}{R+r}$ ، وهو ثابت الزمن	$0 = \dfrac{di}{dt} + \dfrac{(R+r)}{L}i$
عبارة $i(t)$ وبيانها	 $i(t) = \dfrac{E}{R+r}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$	 $i(t) = \dfrac{E}{R+r}e^{-t/\tau}$
عبارة $u_L(t)$	$u_L(t) = E\left(1 - \dfrac{r}{R+r}\right)e^{-t/\tau} + r\dfrac{E}{R+r}$	$u_L(t) = \dfrac{-R}{R+r}Ee^{-t/\tau}$

3/ الطاقة المغناطيسية المخزّنة في الوشيعة

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}Li^2}$$

التمرين 1

1/ اعط رمز الوشيعة (L,r) بطرفيها A ، B .

2/ ماذا يعني الثابتان L ، r . حدد وحدة كل منهما.

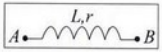
3/أ/ اعط عبارة التوتر الكهربائي u_{AB} بين طرفي الوشيعة، إذا علمت أن تيارا كهربائيا شدته i يمر فيها.

ب/ إذا كان التيار مستمرا، فاعط العبارة الجديدة لـ u_{AB}، ما هو سلوك الوشيعة في هذه الحالة ؟

4/ اعط عبارة الطاقة المغناطيسية التي تختزنها الوشيعة في دارة يجتازها تيار شدته i .

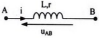
الحل

1/ رمز الوشيعة (L,r)



2/ الثابت r هو مقاومة الوشيعة، وحدته [الأوم] ورمزه (Ω).
الثابت L هو ذاتية الوشيعة، وحدتها [الهنري] ورمزها (H).

3/ أ/ عبارة التوتر الكهربائي u_{AB}



$$\boxed{u_{AB} = ri + L\frac{di}{dt}}$$

ب/ إذا كان التيار مستمرا فإن ثابت $= i$ وبالتالي مشتقه منعدم أي $\dfrac{di}{dt} = 0$

إذن $\boxed{u_{AB} = ri}$

وهذه هي عبارة التوتر الكهربائي بين طرفي ناقل أومي، فالوشيعة تسلك سلوك ناقل أومي في حالة التيار الكهربائي المستمر.

4/ عبارة الطاقة المغناطيسية E_m للوشيعة $\boxed{E_m = \dfrac{1}{2}Li^2}$

التمرين 2

اجب بـ "صحيح" أو بـ "خطأ" مصححا العبارات الخاطئة

1/ في دارة كهربائية (R,L) يجتازها تيار كهربائي i ،

أ/ التوتر الكهربائي بين طرفي ناقل أومي R لا يصيبه أي انقطاع.

ب/ التوتر الكهربائي بين طرفي وشيعة (L,r) لا يصيبه أي انقطاع.

ج/ التيار الكهربائي في وشيعة لا يصيبه أي انقطاع.

د/ الطاقة المغناطيسية في الوشيعة لا يصيبها أي انقطاع.

2/ الثابت الزمني τ لثنائي القطب (R,L) ،

أ/ عبارته $\tau = \dfrac{L}{R+r}$.

ب/ يزداد بازدياد قيمة L.

ج/ يزداد بازدياد قيمة R.

د/ له وحدة زمن (متجانس مع الزمن).

3/ عند فتح قاطعة دارة كهربائية (R,L) كانت مغلقة لمدة طويلة :

أ/ تضيع طاقتها بفعل جول.

ب/ تضيع طاقتها بفعل إشعاعي.

ج/ تبقى طاقتها للدارة التي ربطت بها.

الحل

1/ أ/ صحيح لأن $u_R = Ri$ و i لا يصيبه انقطاع.

ب/ خطأ.

ج/ صحيح.

د/ صحيح.

2/ أ/ صحيح.

ب/ صحيح.

ج/ خطأ، والصحيح هو أنه ينقص بزيادة R.

د/ صحيح.

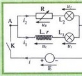
3/ أ/ خطأ.

ب/ خطأ.

ج/ صحيح، إذ تخزن الوشيعة طاقة كلما أغلقنا الدارة، فعندما تفتح الدارة تبقي الوشيعة طاقتها.

التمرين 3

نحقق تركيب الدارة الممثلة بالشكل المرفق.



L_1 ، L_2 مصباحان مقاومة كل منهما $r_L = 2{,}0\Omega$ يحملان الدلالتين $(6V ; 0{,}3A)$ ومعدلة تضبط مقاومتها على القيمة $R = 10\Omega$ ووشيعة $(L ; r = 1\Omega)$ وقاطعة K ومولد مثالي لتيار مستمر $E = 6V$.

1/ في اللحظة $t = 0s$ نغلق القاطعة K. صف ما يحدث واعط النتائج.

2/ ما قيمة الشدتين i_1 و i_2 في اللحظة $t = 0^+$ ؟

3/ احسب في اللحظة $t = 0^+$ قيمة التوتر الكهربائي بين طرفي كل من :

أ/ المصباح L_1 والمصباح L_2. ب/ الوشيعة. ج/ المعدلة.

4/ عين شدة التيار التي تمر في الوشيعة عندما تكون في حالة النظام الدائم.

5/ في النظام الدائم، هل المصباحان L_1 و L_2 يتوهجان بنفس الشدة ؟ برر.

الحل

1/ وصف الظواهر الحادثة لحظة غلق القاطعة

- المصباح L_2 : يتوهج لحظيا، فالتيار الكهربائي i_2 في الفرع الذي يحتوي على L_2 يظهر لحظيا ، إذ تقفز قيمته من 0 إلى i_2.
- المصباح L_1 : يشتعل متأخرا عن المصباح L_2 (بحوالي 1 ثانية)، فنقول إن ظهور التيار في الفرع الذي يحتوي الوشيعة تزداد قيمته باستمرار من $0A$ إلى i_1، وهذا ما يعرف بالنظام الانتقالي.

* النتائج

- النواقل الأومية (مصابيح، معدلات) تسمح بمرور التيار لحظيا من خلالها.
- الوشيعة تعاكس مرور التيار من خلالها، وعليه فالتيار المار فيها لا يصيبه أي انقطاع، بل تتغير قيمته من $0A$ إلى أعظم قيمة ممكنة، مرورا بجميع القيم الأخرى (فهناك استمرارية في التيار).

2/ قيمة الشدة i_1

إن في اللحظة $t = 0^+$ أي اللحظة الموالية مباشرة للحظة غلق القاطعة K (ألا وهي اللحظة $t = 0s$) تكون $\boxed{i_1 = 0A}$ لأنه، كما أسلفنا في النتائج، التيار المار في الوشيعة لا يصيبه أي انقطاع، وقيمته تبدأ من $0A$.

قيمة الشدة i_2

إن الفرع الثاني من الدارة الكهربائية لا يحتوي إلا على نواقل أومية، فيمكن لحظيا أن تتغير قيمته من $0A$ إلى i_2، أي يحدث له انقطاع.

بتطبيق قانون أوم نجد : $u_{AB} = Ri_2 + r_Li_2 = (R + r_L)i_2$

وبالتالي : $i_2 = \dfrac{u_{AB}}{R + r_L}$

لكن : $u_{AB} = E$ ، إذن : $\boxed{i_2 = \dfrac{E}{R + r_L}}$

نعوض فنجد : $i_2 = \dfrac{6}{10+2}$ ، أي : $\boxed{i_2 = 0{,}5A}$

3/ حساب التوترات في اللحظة $t = 0^+$

أ/ بين طرفي المصباح L_1

$u_{L1} = r_Li_1 = 2 \times 0 = 0V$ ، ومنه : $\boxed{u_{L1} = 0V}$

• بين طرفي المصباح L_2

$u_{L2} = r_L i_2 = 2\times 0,5 = 1V$ ، ومنه $\boxed{u_{L2} = 1V}$

ب/ بين طرفي الوشيعة (u)

$u = ri_1 + L\dfrac{di_1}{dt}$ وبما ان $i_1 = 0A$ إذن ، $\boxed{u = 0V}$

ج/ بين طرفي المعدلة

$$\boxed{u_R = Ri_2 = 10\times 0,5 = 5V}$$

4/ تعيين شدة التيار المار في الوشيعة في حالة النظام الدائم

النظام الدائم معناه ثبوت شدة التيار (ثابت $= i$) وبالتالي ، ثابت $= i_1$ و ثابت $= i_2$ ، وهذه الثوابت تختلف فيما بينها في الحالة العامة :

• بالنسبة للوشيعة ، $u = ri_1 + L\dfrac{di_1}{dt}$ وبما أن ثابت $= i_1$ فإن $\dfrac{di_1}{dt} = 0$ إذن $u = ri_1$

فالوشيعة تؤدي دور ناقل أومي في النظام الدائم.

• في الفرع الأول يمكن كتابة ، $u_{AB} = u + u_{L1} = ri_1 + r_L i_1 = i_1(r + r_L)\ ;\ i_1 = \dfrac{u_{AB}}{r + r_L}$

مع $u_{AB} = E = 6V$

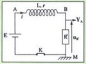
$i_1 = \dfrac{6}{1+2} = 2A\ ;\ \boxed{i_1 = 2A}$

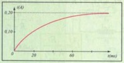
• بينما في الفرع الثاني، لا تتغير شدة التيار i_2 ، $\boxed{i_2 = 0,5A}$ لأن النواقل الأومية ليس لها نظام دائم او نظام انتقالي.

5/ في النظام الدائم، المصباح L_1 يجتازه تيار ذو شدة $i_1 = 2A$ اكبر من الشدة $i_2 = 0,5A$ للتيار الذي يجتاز المصباح L_2 . وعليه، فالمصباح L_1 يكون أكثر توهجا من المصباح L_2 .

التمرين 4

نحقق تركيب الدارة الممثلة بالشكل المرفق ، $E = 10V\ ;\ R' = 35\Omega\ ;\ r = 15\Omega$.





نضع ، $R = R' + r$

نهدف إلى دراسة تطور شدة التيار الكهربائي $i(t)$ في الدارة (R', L). عند غلق القاطعة K تحليليا.

1/ استخرج المعادلة التفاضلية لشدة التيار $i(t)$ عند غلق القاطعة.

2/ تحقق من ان حل هذه المعادلة هو $i = I_0(1 - e^{-t/\tau})$ حيث $I_0 = \dfrac{E}{R}$ و $\tau = \dfrac{L}{R}$.

ماذا نسمي كلا من I_0 و τ ؟

3/ احسب قيمة i في اللحظات الزمنية $0s$ ، τ ، 5τ . قيّم النتائج.

4/ نهدف الآن إلى دراسة تطور $i(t)$ في الدارة (R', L) تجريبيا. من اجل ذلك نقوم بوصل الدارة السابقة براسم الاهتزازات، كما يوضحه الشكل.

أ/ بين أن المدخل y_A لراسم الاهتزاز المهبطي هو الذي سمح بمشاهدة $i(t)$.

ب/ تم تسجيل تطور $i(t)$ كما هو موضح بالوثيقة المرفقة.

هل الحل المعطى في السؤال 2 يحقق بيان $i(t)$ ؟

ج/ استنتج بيانيا قيمة I_0 وتحقق من قيمة E المعطاة عدديا.

د/ استنتج بيانيا قيمة τ واحسب قيمة الذاتية L .

الحل

1/ استخراج المعادلة التفاضلية لتطور $i(t)$

عند غلق القاطعة K يمر تيار انتقالي في الدارة (R', L) الموضحة بالشكل المرفق.

حسب خاصية جمع التوترات لدينا ، $E = u_L + u_{R'}$

وعبارة التوتر الكهربائي بين طرفي الوشيعة هي ، $u_L = ri + L\dfrac{di}{dt}$

كما أن عبارة التوتر الكهربائي $u_{R'}$ بين طرفي الناقل الأومي R' هي ، $u_{R'} = R'i$

إذن ، $E = ri + L\dfrac{di}{dt} + R'i = (R'+r)i + L\dfrac{di}{dt}$

بوضع $R'+r = R$ نكتب ، $\boxed{\dfrac{di}{dt} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{E}{L}}\ ;\ E = Ri + L\dfrac{di}{dt}$

وهذه هي المعادلة التفاضلية التي تعطي تطور $i(t)$.

▪ تنبيه ، سمّيت معادلة تفاضلية لأن فيها المتغير i ومشتقه بالنسبة إلى الزمن $\dfrac{di}{dt}$.

2/ التحقق من أن حل المعادلة التفاضلية هو $i = I_0(1 - e^{-t/\tau})$

نعوض عن هذا الحل في المعادلة التفاضلية.

في البداية نعين $\dfrac{di}{dt}$ ، $\dfrac{di}{dt} = I_0\left(0 - (-\tfrac{1}{\tau})e^{-t/\tau}\right) = \dfrac{I_0}{\tau}e^{-t/\tau}$

نعوض في المعادلة التفاضلية ، $E \overset{?}{=} RI_0(1 - e^{-t/\tau}) + L\dfrac{I_0}{\tau}e^{-t/\tau}$

$$E \overset{?}{=} RI_0 - RI_0 e^{-t/\tau} + L\dfrac{I_0}{\tau}e^{-t/\tau}$$

لكن $\tau = \dfrac{L}{R}$ نعوض فنجد ، $E \overset{?}{=} RI_0 - RI_0 e^{-t/\tau} + \dfrac{LI_0}{\dfrac{L}{R}} e^{-t/\tau}$

$$E \overset{?}{=} RI_0 - RI_0 e^{-t/\tau} + RI_0 e^{-t/\tau}$$

ومنه ، $E \overset{?}{=} RI_0$

وبما ان $I_0 = \dfrac{E}{R}$ فعندما نعوض نجد ، $E \overset{?}{=} R\dfrac{E}{R}$

بالفعل ، $\boxed{E = E}$ فالمعادلة محققة.

نسمي I_0 بالشدة العظمى للتيار الانتقالي، أو شدة تيار النظام الدائم.

3/ حساب قيم i في اللحظات 5τ ، τ ، $0s$

لدينا ، $i(t) = I_0(1 - e^{-t/\tau})$

• في اللحظة $t = 0s$

$$i = i(0) = I_0(1 - e^{-0/\tau}) = I_0(1 - e^{0}) = I_0(1 - 1) \ ; \ \boxed{i = i(0) = 0A}$$

• في اللحظة $t = \tau$

$$i = i(\tau) = I_0(1 - e^{-\tau/\tau}) = I_0(1 - e^{-1}) = I_0(1 - \frac{1}{e}) = I_0(1 - \frac{1}{2,718}); \ \boxed{i = 0,632 I_0}$$

• في اللحظة $t = 5\tau$

$$i = i(5\tau) = I_0(1 - e^{-5\tau/\tau}) = I_0(1 - \frac{1}{e^5}) \ ; \ \boxed{i = 0,993 I_0 \approx I_0}$$

*** تقييم النتائج**

• التيار الكهربائي الذي يجتاز الوشيعة تتغير قيمته من لحظة إلى أخرى، فهو مستمر، لا يصيبه أي انقطاع.

• يعين ثابت الزمن τ بتعيين النقطة من المنحني ذات الترتيبة $i = 0,63 I_0$.

• في اللحظة 5τ نلاحظ ان $i \approx 0,993 I_0$ لذا نعتبر عمليا ان النظام الدائم نحصل عليه ابتداء من 5τ .

4/ ا/ تبيان أن المدخل y_A هو الذي يسمح بمشاهدة $i(t)$

لدينا ، $u_{R'} = Ri$ ومنه نجد ، $\boxed{i = \dfrac{u_{R'}}{R}}$

في الواقع، المدخل y_A يسمح بمشاهدة التوتر الكهربائي $u_{R'}$، لكن الفرق بين i و $u_{R'}$ هو العدد R . لذلك يعتبر دوما أن مشاهدة $u_{R'}$ هي بمثابة مشاهدة i .

ب/ بالفعل، لو رسمنا الدالة $i(t) = I_0(1 - e^{-t/\tau})$ بالقيم التي حسبناها وهي $i(0)$، $i(\tau)$ و $i(5\tau)$ لوجدنا منحنيا يشبه تماما بيان $i(t)$ الملاحظ على شاشة راسم الاهتزاز.

ج/ استنتاج قيمة I_0

من البيان نجد ان $\boxed{I_0 = 0,2A}$

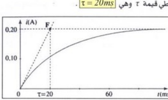
لكي نتحقق من قيمة $(E = 10V)$ نحسبها من العلاقة $I_0 = \dfrac{E}{R}$

ومنه ، $\boxed{E = I_0 R}$ مع $R = r + R' = 50\Omega$

فنجد ، $E = 0,2 \times 50 \ ; \ \boxed{E = 10V}$

د/ استنتاج τ من البيان

نرسم مماس المنحني في اللحظة $t = 0s$ ليتقاطع مع الخط المقارب الأفقي $I_0 = 0,2A$ في نقطة F . فاصلة النقطة F تعطي قيمة τ وهي $\boxed{\tau = 20ms}$.



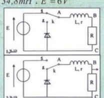
حساب ذاتية الوشيعة L

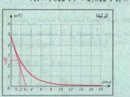
نعلم أن $\tau = \dfrac{L}{R}$ ومنه $\boxed{L = R\tau}$ ، نعوض فنجد ، $L = 50 \times 20.10^{-3} \ ; \ \boxed{L = 1H}$

التمرين 5

نعتبر الدارة (R, L) الموضحة بالشكل 1 المرفق مع ،

$R = 10\Omega$ ، $r = 2,0\Omega$ ، $L = 34,8mH$ ، $E = 6V$.





1/ احسب شدة التيار I_0 في حالة النظام الدائم. نعتبر ان القاطعة K جعلت في الوضعية 1 منذ مدة كافية.

2/ في اللحظة $t = 0s$ نغير ربط القاطعة فنجعلها في الوضع 2.

أ/ استخرج المعادلة التفاضلية لتطور التيار الكهربائي $i(t)$ في الدارة (R,L).

ب/ إذا علمت أن حل هذه المعادلة التفاضلية هو $i(t) = Ae^{-t/\tau}$، عين A واحسب ثابت الزمن τ.

ج/ حدد شدة التيار في اللحظة $t_{1/2}$ وكذا التوتر الكهربائي u_R.

3/ من أجل مشاهدة تطور التيار $i(t)$ (القاطعة في الوضع 2) نقوم بربط راسم الاهتزاز المهبطي كما هو موضح بالشكل 2 أعلاه، فنحصل على الوثيقة أعلاه.

أ/ ماذا تمثل الثوابت u_0، t_1 و t_2 ؟

عين قيمها. هل هي متوافقة مع القيم النظرية المحسوبة سابقا ؟

ب/ استنتج شكل المنحني البياني $i(t)$ انطلاقا من بيان $u_R(t)$.

ج/ هل بيان $i(t)$ متوافق مع الحل التحليلي $i = Ae^{-t/\tau}$ ؟ برر.

د/ أعط المعادلة $u_R(t)$ التي تحقق البيان المعطى في الوثيقة المرفقة.

الحل

1/ حساب شدة التيار I_0

في حالة النظام الدائم تصبح شدة التيار ثابتة ، ثابت $= i = I_0$.

وعليه $\frac{di}{dt} = 0$ وبالتالي الوشيعة التي تتميز بـ $u_L = ri + L\frac{di}{dt}$ تتحول معادلتها إلى $u_L = ri$ فتؤدي دور ناقل أومي. والدارة التي نحن بصدد حساب شدة التيار فيها هي الدارة الممثلة بالشكل المرفق.

حسب قانون جمع التوترات لدينا : $E = u_L + u_R$ مع $u_R = Ri$ و $u_L = ri$

إذن ، $E = Ri + ri$ ومنه ، $\boxed{i = I_0 = \frac{E}{R+r}}$

نعوض فنجد ، $\boxed{I_0 = 0,5A}$; $I_0 = \frac{6}{10+2}$

2/ أ/ استخراج المعادلة التفاضلية لتطور التيار الكهربائي $i(t)$

عند جعل القاطعة K في الوضع 2 نحصل على الدارة المرفقة.

$$0 = u_L + u_R$$

$$ri + L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + (R+r)i = 0$$

$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R+r}{L}i = 0}$ وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة.

ب/ تعيين الثابت A

نعلم أن $i(t)$ يعطى بالمعادلة $i = Ae^{-t/\tau}$

ففي اللحظة $t = 0s$ نجد $i(0) = Ae^{-0/\tau}$ ومنه ، $\boxed{i(0) = A = I_0}$

تعيين الثابت τ

باعتبار أن حل المعادلة التفاضلية السابقة هو $i = Ae^{-t/\tau}$ نعوض عنه في المعادلة التفاضلية،

لكن، قبل ذلك، نعين المشتق $\frac{di}{dt}$ ، $\frac{di}{dt} = -\frac{A}{\tau}e^{-t/\tau}$

نعوض الآن في المعادلة التفاضلية ، $-\frac{A}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{R+r}{L}Ae^{-t/\tau} = 0$

$$Ae^{-t/\tau}\left(\frac{R+r}{L} - \frac{1}{\tau}\right) = 0$$

الحد الأول لا يساوي الصفر إلا في حالة $t \to \infty$ إذن فالحد الثاني يساوي الصفر.

$$\frac{R+r}{L} - \frac{1}{\tau} = 0 \ ; \ \boxed{\tau = \frac{L}{R+r}}$$

$$\tau = \frac{0,0348}{10+2} = 0,0029s \ ; \ \boxed{\tau = 2,9ms}$$

ج/ تحديد شدة التيار في اللحظة $t_{1/2}$

اللحظة $t_{1/2}$ توافق $i = \frac{I_0}{2}$ أي $i = \frac{0,5}{2}$ ، $\boxed{i = 0,25A}$

أما التوتر الكهربائي u_R فنحسبه كالتالي :

$$u_R = Ri = 10 \times 0,25 \ ; \ \boxed{u_R = 2,5V}$$

3/ أ/ الثوابت u_0 ، t_1 ، t_2

• التوتر u_0

يمثل أعظم قيمة للتوتر الكهربائي بين طرفي المقاومة لحظة عزل المولد عن الدارة ، $\boxed{u_0 = 5V}$.

• اللحظة t_1

هي فاصلة نقطة تقاطع المماس مع المنحني في اللحظة $t = 0s$ فهي تمثل الثابت الزمني τ ومن البيان نجد أن ، $t_1 = \tau = 2,9ms$.

• اللحظة t_2

تمثل اللحظة التي تكون فيها قيمة التوتر $\frac{u_0}{2}$ وهي اللحظة $t_{1/2}$ فمن البيان نجد أن $\boxed{t_2 = t_{1/2}}$

هذه القيم هي ذاتها تقريبا القيم المحسوبة نظريا.

ب/ استنتاج شكل المنحنى البياني $i(t)$

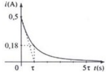
بما أن $u_R = Ri$ أي $u_R = 10i$ إذن، $\boxed{i = \frac{u_R}{10}}$

لذا نتوقع أن بيان $i(t)$ يشبه بيان $u_R(t)$ بفارق ثابت هو الضرب بالعدد 10.

ندون بعض النتائج في الجدول التالي:

$t(s)$	0	$t_{1/2}$	$\tau = 0,0029$	∞
$u_R(v)$	5	$2,5$	$1,9$	0
$i(A)$	$0,5$	$0,25$	$0,18$	0

ولذا يأتي بيان $i(t)$ كالتالي:



ج/ إن بيان $i(t)$ أعلاه يعبر عن تناقص أسي أي من الشكل: $i = I_0 e^{-t/\tau}$

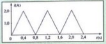
د/ المعادلة $u_R(t)$

نلاحظ أيضا أن المنحنى $u_R(t)$ المعطى بالوثيقة يعبر عن تناقص أسي، لذا نكتب:

$$u_R(t) = u_0\, e^{-t/\tau}\ ;\ \boxed{u_R(t) = 5e^{-\frac{t}{0,0029}}}$$

التمرين 6

وشيعة مثالية (مقاومتها r مهملة) ذاتيتها $L = 100mH$ يجتازها تيار تعطى شدته بالبيان المرفق.



1/ حدد قيمة الدور T والتواتر f للتيار.

2/ اكتب عبارة التوتر الكهربائي u_L بين طرفي الوشيعة بدلالة شدة التيار i.

3/ اعط عبارة u_L في المجالين الزمنيين التاليين، ثم عمم.

أ/ $0 < t < 0,4s$

ب/ $0,4s < t < 0,8s$

4/ مثل بيان $u_L(t)$ وحدد نوعه.

5/ احسب الطاقة المغناطيسية المخزنة في الوشيعة في اللحظتين $t_1 = 0,4s$ و $t_2 = 0,8s$.

الحل

1/ تحديد قيمتي T و f

يتضح من البيان أن $\boxed{T = 0,8s}$

نطبق العلاقة $f = \frac{1}{T}$ فيكون $f = \frac{1}{0,8}$ ومنه، $\boxed{f = 1,25Hz}$

2/ عبارة u_L

نعلم أن عبارة التوتر الكهربائي u_L بين طرفي الوشيعة هي: $u_L = ri + L\frac{di}{dt}$

وبما أن الوشيعة مثالية فإن مقاومتها r مهملة ($r = 0\Omega$) لذا نكتب من جديد: $u_L = L\frac{di}{dt}$

لكن $L = 100mH$ أي $L = 0,1H$ ومنه، $\boxed{u_L = 0,1\frac{di}{dt}}$.

3/ عبارة u_L

أ/ في المجال الزمني $0 < t < 0,4s$

في هذا المجال، التيار i ممثل بخط مستقيم ميله موجب يمر من المبدأ معامل توجيهه هو:

$\frac{di}{dt}$ = ميل المستقيم.

إذن: $\frac{di}{dt} = \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{2-0}{0,4-0}$ ومنه، $\frac{di}{dt} = 5$ فلما نعوض في عبارة u_L نجد:

$$u_L = 0,1\frac{di}{dt} = 0,1\times 5\ ;\ \boxed{u_L = 0,5V}$$

ب/ في المجال الزمني $0,4s < t < 0,8s$

في هذا المجال، التيار i ممثل بخط مستقيم ميله سالب لا يمر من المبدأ معامل توجيهه $\frac{di}{dt}$

نحسبه من الميل، الميل $= \frac{di}{dt} = \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{0-2}{0,8-0,4} = -5$

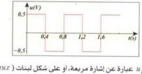
نعوض في عبارة $u_L = 0,1\frac{di}{dt}$ فنجد، $\boxed{u_L = -0,5V}$.

التعميم

- في المجال الأول وجدنا $u_L = +0,5V$
- وفي المجال الثاني وجدنا $u_L = -0,5V$
- وهكذا نجد في المجال الثالث ($0,8s < t < 1,2s$) أن $u_L = +0,5V$
- وفي المجال الرابع ($1,2s < t < 1,6s$) أن $u_L = -0,5V$
- وتتكرر العملية في ما بقي من المجالات...

4/ بيان $u_L(t)$

نستغل نتائج السؤال السابق ونرسم البيان فياتي كالتالي،



نوع البيان، البيان $u_L(t)$ عبارة عن إشارة مربعة، أو على شكل لبنات (*en créneaux*).

5/ الطاقة المغناطيسية E_m المخزنة في الوشيعة

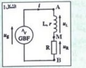
تعطى بالعبارة $E_m = \frac{1}{2}Li^2$

- في اللحظة $t_1 = 0,4s$ لدينا $i = 2A$ إذن $E_m = \frac{1}{2}(0,1)(2)^2$ ومنه، $\boxed{E_m = 2\times10^{-1} J}$
- وفي اللحظة $t_2 = 0,8s$ لدينا $i = 0\,A$ إذن $\boxed{E_m = 0\,J}$

التمرين 7

مولد تيار متغير يغذي وشيعة مثالية ذاتيتها L ومقاومة ($R = 10\Omega$). نستعمل راسم الاهتزاز، لمشاهدة التوتر الكهربائي u_L بين طرفي الوشيعة، وكذا الشدة i للتيار المار فيها (الشكل 1).

1/ أعط طريقة الربط اللازمة لدارة الشكل 1 حتى نشاهد كلا من u_L و i.



2/ بيّن لماذا ينصح باستعمال مولد GBF مربطه الأرضي (أو كتلته *sa masse*) يجب أن يكون معزولا عن الأرض. ماذا يسمى هذا المولد ؟

3/ أ/ هل u_{BM} يساوي Ri أو $-Ri$ ؟

ب/ مثل بسهم التوتر الذي نستطيع به مشاهدة التيار i.

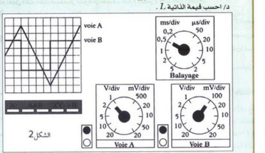
4/ إن طريقة ضبط راسم الاهتزاز تمت كما هو موضح بالشكل 2، وبذلك حصلنا على منحنيي نفس الشكل.

أ/ ارفق كل منحن بمقداره الفيزيائي المناسب، مع التعليل.

ب/ أعط الدور T وكذا التواتر f للتيار الذي يعطيه المولد.

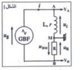
ج/ استخرج علاقة بين u_L و u_{BM}.

د/ احسب قيمة الذاتية L.



الحل

1/ طريقة ربط الدارة لمشاهدة u_L و i



- لمشاهدة التوتر الكهربائي بين طرفي الوشيعة u_L في راسم الاهتزاز يجب احترام القطبية، ومن ثم ربط طرفي الوشيعة بأحد المدخلين y_A أو y_B لراسم الاهتزاز.
- كيف ذلك ؟
- بما أن التيار الكهربائي i يدخل من A ويخرج من M فإن $u_{AM} > 0$

• وبما أن $u_L = u_{AM}$ إذن u_L موجب.

• وبناء عليه، تربط النقطة A بأحد مدخلي راسم الاهتزاز وليكن y_A . أما النقطة M فتربط بالربط الأرضي (الكتلة $la\ masse$) لراسم الاهتزاز، كما هو موضح بالشكل أعلاه.

• ولكي نشاهد الشدة i للتيار المار في الدارة، ننتبه إلى أن التوتر الكهربائي u_R بين طرفي الناقل الأومي عبارته $u_R = Ri$ مع $u_R = u_{MB}$ وبالتالي، $i = \frac{u_{MB}}{R}$.

• وعليه، فمشاهدة التوتر u_{MB} معناها مشاهدة التيار i .

• لكن، كيف نظهر التوتر u_{MB} على شاشة راسم الاهتزاز ؟

• نلاحظ أن النقطة M موصولة بالربط الأرضي للراسم، لذا يجب ربط النقطة B بالمدخل y_B كما يوضحه الشكل السابق، وفي هذه الحالة ننتبه إلى أن u_{BM} سالب لأن $u_{BM} = -u_R$.

• لذلك وجب استعمال الدلالة "عكس ($Inversion$)" الموجودة في راسم الاهتزاز حتى يظهر المنحني الممثل لـ i بشكل صحيح.

/2 لاحظ أن المربطين A و B للمولد GBF غير موصولين بالأرض (أي بالربط الأرضي ذي الرمز ⏚). ونلاحظ في هذه الحالة أن المربط الأرضي للمولد أو ما يسمى الكتلة ($la\ masse$) يجب أن يكون معزولا عن الأرض. يقال حينئذ إن المولد في حالة كتلة طافية ($GBF\ en\ masse\ flottante$). فإذا لم نفعل ذلك حدث استقصار للدارة أي حصلت الدارة القصيرة ($court\ circuit$).

/3 أ/ كما أسلفنا، فإن $u_R = u_{MB} = Ri$ لكن $u_{BM} = -u_{MB}$ إذن ، $\boxed{u_{BM} = -Ri}$

ب/ انظر الشكل السابق.

/4 أ/ إرفاق بكل منحن مقداره الفيزيائي المناسب

• الإشارة المثلثية تعبر عن شدة التيار i .

• الإشارة المربعة تعبر عن منحني التوتر الكهربائي u_L .

التعليل

• نعلم أن $u_L = L\frac{di}{dt}$ فلو افترضنا أن الإشارة المربعة تمثل i فإن i يكون ثابتا أي ثابت $= i$ وبالتالي $\frac{di}{dt} = 0$ ومنه ، $\boxed{u_L = 0V}$ وهذا مرفوض.

• أما لو افترضنا أن الشدة i للتيار ممثلة بالخط المائل الذي معادلته من الشكل $i = at + b$ فإن $\frac{di}{dt} = a =$ ثابت ومنه ، $\boxed{u_L = \text{ثابت}}$ وهذا مقبول، ويدل على الإشارة المربعة.

ب/ حساب قيمة الدور T للتيار وتواتره f

• حسب الشكل 2 المعطى، قاعدة الزمن (أو المسح $balayage$) هي $5ms / div$

• ومن أحد المنحنيين نجد أن $T = 8div$ إذن ، $\boxed{T = 0{,}04s}$; $T = 8 \times 5 = 40ms$

• أما التواتر f فيعطى بالعبارة ، $\boxed{f = 25Hz}$; $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}04}$

ج/ استخراج العلاقة بين u_L و u_{BM}

• بما أن الوشيعة مثالية فإن مقاومتها مهملة، لذلك نكتب ، $u_L = L\frac{di}{dt}$

• أما التوتر الكهربائي u_{BM} بين طرفي الناقل الأومي فهو $u_{MB} = Ri$

• إذن $i = \frac{u_{MB}}{R}$ وبالتعويض في u_L نجد ، $u_L = L\frac{d}{dt}(\frac{u_{MB}}{R})$

(R ثابت يمكن إخراجه من مؤثر الاشتقاق $\frac{d}{dt}$)

$$\boxed{u_L = \frac{L}{R}\frac{d(u_{MB})}{dt}}$$

• لاحظ أن $\frac{d(u_{MB})}{dt}$ هو ميل المستقيم u_{BM} .

د/ حساب قيمة الذاتية L

من العلاقة السابقة نجد ، $\boxed{L = \frac{u_L.R}{\frac{du_{MB}}{dt}}}$

لنحسب u_L

من منحني u_L الذي يظهر على شكل لبنات نلاحظ أن u_L ممثل بـ 2 تدريجتين.

وبما أن الحساسية الشاقولية لـ u_L هي $2V / div$ إذن، $\boxed{u_L = 4V}$; $u_L = 2 \times 2$

• لنحسب $\frac{d(u_{MB})}{dt}$

ميل المستقيم الممثل للتيار أو لـ u_{BM} ، $\frac{du_{MB}}{dt} = \frac{\Delta u_{MB}}{\Delta t}$

مع ملاحظة أن u_{MB} من القمة إلى التجويف ممثل بـ 8 تدريجات. وحسب الحساسية الشاقولية المثلة له ($500\ mV / div$)، نكتب ،

$$\Delta u_{MB} = 8 \times 500mV = 4000mV = 4V$$

أما Δt فهو $\Delta t = 4div$ والمسح هو $5ms / div$

إذن ، $\Delta t = 5 \times 4ms = 20ms = 0{,}02s$

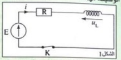
ومنه نجد الميل ، $\frac{\Delta u_{MB}}{\Delta t} = \frac{4}{0{,}02} = 200\ V.\ s^{-1}$

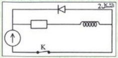
وأخيرا نكتب ، $L = \frac{u_L.R}{\frac{\Delta u_{MB}}{\Delta t}} = \frac{4 \times 10}{200}$

$$\boxed{L = 0{,}2H}$$

التمرين 8

في لحظة نعتبرها بدء الزمن، نغلق القاطعة K في الدارة (R,L) (الشكل 1) علما بان مقاومة الوشيعة مهملة.





1/ استخرج المعادلة التفاضلية لشدة التيار i.

2/أ/ تأكد من ان حلها هو $i = I_0(1-e^{-t/\tau})$

ب/ احسب قيمة كل من I_0 و τ.

$L = 1H ; R = 5\Omega ; E = 10V$

3/ عند الحصول على النظام الدائم،

أ/ احسب قيمة التوتر u_L بين طرفي الوشيعة.

ب/ تأكد من أن الوشيعة تؤدي دور سلك ناقل.

4/أ/ نفترض أننا فتحنا القاطعة K في زمن صغير استغرق $20ms$. احسب حينئذ قيمة التوتر u_L واشرح الظاهرة الحادثة.

ب/ لحماية الوشيعة من التوترات u_L الفجائية ذات القيم الكبيرة أثناء فتح القاطعة، عادة ما يربط بين طرفي الوشيعة صمام ثنائي كما هو موضح بالشكل 2. فسر ذلك.

الحل

1/ استخراج المعادلة التفاضلية

لدينا من خاصية جمع التوترات: $E = u_L + u_R$ مع $u_R = Ri$ و $u_L = L\frac{di}{dt}$

وباعتبار r مهملة ينتج مباشرة: $E = L\frac{di}{dt} + Ri$

$\boxed{\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E}{L}}$ وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة.

2/ أ/ لنتأكد من ان $i = I_0(1-e^{-t/\tau})$ هو حل للمعادلة التفاضلية

يكفي أن نعوض به في المعادلة التفاضلية: $I_0(+\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}) + \frac{RI_0}{L}(1-e^{-t/\tau}) \stackrel{?}{=} \frac{E}{L}$

$$\frac{I_0}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{RI_0}{L} - \frac{RI_0}{L}e^{-t/\tau} \stackrel{?}{=} \frac{E}{L}$$

مع الانتباه إلى كون $\tau = \frac{L}{R}$ نعوض فنجد: $\frac{I_0}{\frac{L}{R}}e^{-t/\tau} + RI_0 - RI_0e^{-t/\tau} \stackrel{?}{=} \frac{E}{L}$

$$\frac{I_0R}{L}e^{-t/\tau}+\frac{I_0R}{L}-\frac{I_0R}{L}e^{-t/\tau}\stackrel{?}{=}\frac{E}{L}$$

$$\frac{I_0R}{L}\stackrel{?}{=}\frac{E}{L}$$

لكن $E = RI_0$ إذن $\frac{E}{L}=\frac{E}{L}$ فالعادلة محققة.

ب/ حساب I_0

$$I_0 = \frac{E}{R} = \frac{10}{5} = 2A \; ; \; \boxed{I_0 = 2A}$$

حساب τ

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{5} = 0,2 \; ; \; \boxed{\tau = 0,2s}$$

3/ أ/ حساب قيمة u_L

في حالة النظام الدائم: $i = I_0 = 2A =$ ثابت

إذن $\frac{di}{dt}=0$ ومنه $u_L = L\frac{di}{dt} = 1\times 0$، اي $\boxed{u_L = 0V}$

أي التوتر الكهربائي بين طرفي الوشيعة منعدم.

ب/ عمليا، نعتبر أن فرق الكمون الكهربائي بين اي نقطتين من سلك ناقل منعدم، $u = 0V$.
وبناء عليه، يمكن اعتبار الوشيعة ذات المقاومة المهملة كأنها سلك ناقل في حالة النظام الدائم (حالة التيار ثابت).

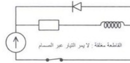
4/ أ/ إن فتح القاطعة في مدة زمنية $\Delta t = 20ms$ يجعل شدة التيار تتغير من القيمة $I_0 = 2A$ إلى القيمة $0A$، وعلى هذا نكتب: $u_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{\Delta i}{\Delta t}$

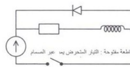
إذن $u_L = 1\times\frac{2-0}{20\times10^{-3}}$، وأخيرا: $\boxed{u_L = 200V}$

ومعنى هذا أن في فترة فتح القاطعة K تتغير قيمة u_L من $0V$ إلى $200V$.

هذا التغير الكبير المفاجئ يحدث تفريغا كهربائيا بين نقطتي تلامس القاطعة (يظهر على شكل شرارة كهربائية)، الأمر الذي يسبب مرور تيار كهربائي متحرض ذي شدة كبيرة في الوشيعة، وبالتالي تلفها (حرق الوشيعة). فمن اجل حماية الوشيعة، يربط بين طرفيها صمام ثنائي ($diode$).

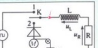
ب/ إذا كانت القاطعة K مغلقة فإن التيار الذي يعطيه المولد لا يمر في فرع الصمام ، لأنه مربوط ربطا عكسيا، وبالتالي لا يسبب الصمام اي شيء يذكر بالنسبة إلى سير التيار في الدارة الرئيسية. اما لو فتحت القاطعة فإن التيار المتحرض الذي تنشئه الوشيعة "يتفرغ" عبر الصمام في الاتجاه المباشر.





التمرين 9 (وضعية إدماجية)

في حصة الأعمال التطبيقية عمد الأستاذ إلى تحقيق تركيب دارة كهربائية على التسلسل مؤلفة من :



- وشيعة ذاتيتها L ومقاومتها مهملة ،
- ناقل أومي مقاومته $R=5\Omega$ ،
- قاطعة K ،
- صمام D مثالي ،
- مولد لتوتر مربع (على شكل لبنات) ،
- محرك مزود بتجهيز بسيط يسمح برفع جسم كتلته m .

وضع الأستاذ بعض الأهداف وهي :

1- إظهار التوتر المربع للمولد على شاشة راسم اهتزاز ذي مدخلين y_A و y_b وإظهار شدة التيار المار في الدارة.

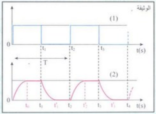
2- إثبات تجريبيا أن الوشيعة تعاكس مرور التيار الكهربائي فيها، وحساب L

3- دراسة تطور شدة التيار الكهربائي $i(t)$ في ثنائي القطب (R,L) .

4- الدراسة الطاقوية للطاقة المخزنة في وشيعة.

1/ ذل على التركيب المناسب لكي يتحقق الهدف الأول مع التعليل.

2/ بعد تحقيق الهدف 1 ، ظهرت على شاشة راسم الاهتزاز الوثيقة.



أ/ اي المنحنيين يمثل توتر المولد، وايهما يمثل التيار i ؟ علل.

بناء على أحد المنحنيين، كيف يمكنك إثبات الهدف 2 ؟

ب/ إذا علمت انه قد تم ضبط راسم الاهتزاز على ما يلي :

المسح الزمني ، $0,1s/div$

المسح الشاقولي للمدخل y_A : $3V/div$

المسح الشاقولي للمدخل y_B : $6V/div$.

حدد المدخل الذي حصلنا منه على كل منحن، واستنتج كلا من الدور الزمني T والتواتر f للتيار الكهربائي المار في الدارة، وكذا قيمة E للمولد.

3/أ/ استخرج المعادلة التفاضلية التي تعطي تطور $i(t)$ في الحالتين $u_{AM}=E$ و $u_{AM}=0V$.

ب/ إذا علمت أن حل المعادلة التفاضلية يعطى بالمعادلتين $i=I_0\, e^{-t/\tau}$ و $i=I_0\,(1-e^{-t/\tau})$ بحسب كل حالة، وهذا دون ترتيب، فأعط لكل حالة حلها المناسب.

ج/ ارفق بكل جزء من المنحني الممثل بالوثيقة حله المناسب.

د/ حدد قيمتي الثابتين I_0 و τ ، واستنتج قيمة L .

4/ غيّر الأستاذ وضع القاطعة K فجعلها في الوضع 2 وهذا في لحظة t_1 تكون فيها شدة التيار أعظمية.

أ/ برايك، لماذا استعمل الأستاذ الصمام D ؟

ب/ احسب الطاقة المغناطيسية للوشيعة في اللحظة t_1 .

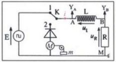
5/ لاحظ الأستاذ ارتفاع الجسم m مسافة $h=20cm$ ثم يتوقف.

أ/ فسر ارتفاع الجسم m .

ب/ أعط الحصيلة الطاقوية للجسم m واحسب مردود هذه العملية. قيّم النتيجة.

يعطى ، $m=50g$ ، $g=9,8N/kg$.

الحل



1/ تحقيق الهدف الأول وهو إظهار التوتر المربع للمولد على شاشة راسم الاهتزاز وشدة التيار $i(t)$

• يتم إظهار التوتر u_{AM} بين طرفي المولد بربط قطبيه A و M باحد المدخلين، وليكن المدخل y_A كما هو موضح بالشكل المرفق.

• كما أن إظهار شدة التيار $i(t)$ المار في الدارة يتم بربط الناقل الأومي بالمدخل الآخر y_B لراسم الاهتزاز، ذلك لأن ، $i=\dfrac{u_R}{R}=\dfrac{u_{BM}}{R}$

في الواقع لا يمكن ملاحظة $i(t)$ بل $u_{BM}(t)$ لكن حسب العلاقة السابقة، $i(t)$ و $u_{BM}(t)$ متناسبان وثابت التناسب بينهما هو R ، وعليه فإن رؤية $u_{BM}(t)$ على الشاشة هي نفسها رؤية $i(t)$.

• بالطبع، يجب وصل القاطعة K بالمربط 1.

2/أ/ المنحني 1 هو الذي يمثل التوتر المربع $u_{AM}(t)$ بين طرفي المولد GBF ، فهو على شكل إشارة مربعة (لبنات)، والمنحني 2 هو الذي يمثل تطور شدة التيار $i(t)$.

إثبات الهدف 2 وهو إظهار ان الوشيعة تعاكس مرور التيار الكهربائي فيها

• لاحظ ان المنحني 1 فيه انقطاع، إذ انه في خلال دور زمني واحد تتغير قيمته بشكل متقطع ليس فيه استمرار ، ففي نصف الدور الأول $u_{AM}=E$ ، وفي نصف الدور الثاني $u_{AM}=0V$
وتتكرر العملية في بقية الأدوار.

• اما المنحني 2 فهو يظهر ان التيار i تبدا قيمته تتزايد باستمرار من $0A$ إلى قيمة اعظمية I_0 ، وتستغرق العملية مدة زمنية، وهذا يدل على أن الوشيعة تعاكس مرور التيار عبرها. فلو كانت الدارة فيها ناقل اومي فقط لقفزت شدة التيار لحظيا من القيمة $0A$ إلى I_0 .

ب / المنحني 1 : حصلنا عليه من المدخل y_A

المنحني 2 : حصلنا عليه من المدخل y_B

حساب الدور T للتيار

من المنحني 1 او من المنحني 2 نلاحظ أن T ممثل بـ 5 تدريجات

وحسب قيمة المسح المعطاة ($0,1s/div$) نجد ، $T=50\times10^{-2}=0,5s$

حساب التواتر f

لدينا $f=\dfrac{1}{T}$ إذن $f=\dfrac{1}{5\times10^{-1}}$ ومنه $\boxed{f=2Hz}$

حساب قيمة E للمولد

من المنحني 1 نلاحظ ان $u_{AM_{max}}$ ممثل بـ $1,5div$ وباستعمال الحساسية الشاقولية على المدخل y_A نجد ان $u_{AM\,max}=6V\times1,5$ ومنه $\boxed{u_{AM\,max}=9V}$

ومن المعلوم أن $u_{AM_{max}}=E$ إذن $\boxed{E=9V}$

3/أ/ استخراج المعادلة التفاضلية لـ $i(t)$

حسب قانون جمع التوترات ، $u_{AM}=u_{AB}+u_{BM}\,......(1)$

مع $u_{AM}=E$ او $u_{AM}=0V$ و $u_{BM}=u_R=Ri$ و $u_{AB}=ri+L\dfrac{di}{dt}$

لكن الوشيعة مثالية بمعنى أن مقاومتها r مهملة أي $r\approx0\Omega$

إذن ، $u_{AB}=u_L=L\dfrac{di}{dt}$

نعوض في عبارة u_{AM} فنجد ، $u_{AB}=L\dfrac{di}{dt}+Ri$

بالقسمة على L نجد ، $\boxed{\dfrac{di}{dt}+\dfrac{R}{L}i=\dfrac{u_{AM}}{L}}$ وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة.

• في حالة $u_{AM}=E$ نجد ، $\boxed{\dfrac{di}{dt}+\dfrac{R}{L}i=\dfrac{E}{L}}$ ...... (1)

• في حالة $u_{AM} = 0V$ نجد ، $\boxed{\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=0}$ ...... (2)

ب/ تحديد حل المعادلة التفاضلية لكلّ حالة

ناخذ مثلا الحل $i = I_0(1-e^{-t/\tau})$

ففي اللحظة $t = 0s$ نجد $i = I_0(1-e^{-0/\tau}) = I_0(1-1) = 0A$

وهو ما يوافق لحظة بدء مرور التيار في الدارة (R,L) عندما يطبق المولد توترا E .

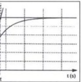
فالحل $i = I_0(1-e^{-t/\tau})$ يناسب المعادلة التفاضلية 1.

والحل $i = I_0\, e^{-t/\tau}$ يناسب المعادلة التفاضلية 2.

ج/ الجزء الأول من المنحني 2 الممثل بالوثيقة يوافق الحل الأول.

أما الجزء الثاني من المنحني 2 فهو يوافق الحل الثاني.

د/ تحديد الثابتين I_0 و τ



من الوثيقة 2 نجد ان I_0 ممثل بـ $2div$

وباستعمال الحساسية للمدخل y_B نجد ،

$I_0 = \frac{u_{0R}}{R}$ لكن $u_{0R} = 3\times 2 = 6V$

اي $I_0 = \frac{6}{5}$ ومنه $\boxed{I_0 = 1,2A}$

أما الثابت الزمني τ فيمكن تعيينه بيانيا بطريقتين ،

• الطريقة الأولى ، نرسم مماس المنحني 2 في بدء الزمن $t = 0s$ ثم نعين فاصلة نقطة تقاطع المماس مع الخط المقارب الأفقي $I = I_0$ فنجد $\boxed{\tau = 0,07s}$

• الطريقة الثانية ، اللحظة $t = \tau$ هي فاصلة النقطة H التي ترتيبها $i = 0,63I_0$ كما هو موضح بالشكل المقابل. نجد أيضا $\boxed{\tau = 0,07s}$

استنتاج قيمة L

نعلم أن $\tau = \frac{L}{R}$ وبالتالي $L = R\tau$ اي $L = 5\times 0,07$ إذن $\boxed{L = 0,35H}$

4/ أ/ استعمل الأستاذ الصمام الثنائي المثالي D لتجنب نشوء قوة محركة كهربائية تحريضية ذاتية عظيمة لحظة تغير القاطعة من الوضع 1 إلى الوضع 2، نتيجة لتغير التدفق المغناطيسي عبر الدارة، مما يسبب حدوث شرارة كهربائية لحظة لمس K الوضع 2 قد يسبب حرق الوشيعة وإتلاف عناصر الدارة الكهربائية. فالتيار لا يستطيع المرور في الاتجاه العكسي للصمام الثنائي لحظة غلق القاطعة، مما يجعله يمر في الاتجاه المباشر للصمام.

ب/ الطاقة المغناطيسية للوشيعة في اللحظة t_0

تعطى بالعبارة $E_m = \frac{1}{2}Li^2$ لكن في اللحظة t_0 لدينا ، $i = I_0 = 1,2A$

نعوض فنجد $E_m = \frac{1}{2}0,35(1,2)^2$ إذن $\boxed{E_m = 0,252J}$

5/ أ/ سبب رفع المحرك للجسم m هو تحويل الطاقة المغناطيسية للوشيعة إلى طاقة كهربائية جعلت المحرك يشتغل فيرفع الجسم.

ب/ الحصيلة الطاقوية

مردود العملية η

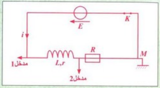
$$\eta = \frac{E_{pp}}{E_m} = \frac{mgh}{\frac{1}{2}LI_0^2} = \frac{2mgh}{LI_0^2} = \frac{2\times 0,05\times 9,8\times 0,20}{0,35\times (1,2)^2} = 0,3888$$

$$\boxed{\eta \approx 38,9\%}$$

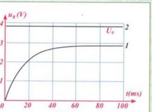
والطاقة المغناطيسية الضائعة تبددت في الدارة الكهربائية بفعل جول.

التمرين 10

دارة على التسلسل تتألف من : بطارية (حاشدة) قوتها المحرّكة الكهربائية $E = 3{,}8V$ ومقاومتها الداخلية مهملة، قاطعة k، وشيعة ذاتيتها L ومقاومتها r وناقل اومي مقاومته $R = 50\Omega$.



تسمح برمجة خاصّة (بواسطة حاسوب مربوط بالدارة الكهربائية) بتسجيل تطوّر التوترين الكهربائيين بين طرفي المولد والناقل الأومي. في اللحظة $t = 0s$ تغلق القاطعة ويبدأ التسجيل. الوثيقة المرفقة تحدّد التوترين المذكورين.



الوثيقة

1/ ما هما المقداران الفيزيائيان الشاهدان في المدخلين 1 و 2 ؟ ميّز بينهما في الوثيقة.

2/أ/ استنتج المعادلة التفاضلية التي تعطي تطوّر شدّة التيار $i(t)$ في الدارة (R,L).

ب/ إذا علمت أن حلها هو $i(t) = I_P(1-e^{-Kt})$ ، فاعط عبارة كلّ من الثابتين K و I_P.

ج/ ماذا يمثل كلّ من الثابتين السابقين ؟

د/ استنتج قيمة كلّ منهما .

هـ/ احسب قيمة كلّ من L و r.

3/ كيف يتغيّر شكل الوثيقة السابقة إذا لم نهمل المقاومة الداخلية r' للبطارية ؟
أعط التمثيل بشكل كيفي لكلّ من $U_R(t)$ و $U_G(t)$.

الحل

1/ المقداران الفيزيائيان الشاهدان

المدخل 1 : يظهر التوتر الكهربائي بين طرفي المولد ثابت $U_G = E =$ وهو المنحنى 2 من الوثيقة.

المدخل 2 : يظهر التوتر الكهربائي بين طرفي الناقل الأومي ، $U_R = Ri$ وهو المنحنى 1 من الوثيقة.
كما يمكن اعتبار أن المدخل 2 يظهر شدّة التيار الكهربائي i المار في الدارة.

2/أ/ المعادلة التفاضلية لتطوّر $i(t)$ في الدارة (R,L)

حسب قانون جمع التوترات : $E = U_R + U_L$ ، لكن : $U_R = Ri$ و $U_L = L\dfrac{di}{dt} + ri$

نعوّض في العبارة الأولى فنجد : $E = Ri + L\dfrac{di}{dt} + ri$ ، $E = L\dfrac{di}{dt} + (R+r)i$

بالقسمة على L نجد : $\boxed{\dfrac{E}{L} = \dfrac{di}{dt} + \dfrac{R+r}{L}i}$ وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة.

ب/ باعتبار أن حل المعادلة التفاضلية السابقة هو $i(t) = I_P(1-e^{-Kt})$ ، فلإيجاد عبارة كلّ من K و I_P ، نعوّض عبارة $i(t)$ في المعادلة التفاضلية :

• في البداية نجد عبارة المشتق ، $\dfrac{di}{dt}$

$$\frac{di}{dt} = I_p(+Ke^{-Kt})$$

$$\frac{E}{L} = I_pKe^{-Kt} + \left(\frac{R+r}{L}\right)I_p(1-e^{-Kt})$$

$$\frac{E}{L} = I_pKe^{-Kt} - I_p\frac{R+r}{L}e^{-Kt} + \frac{(R+r)}{L}I_p$$

$$\frac{E}{L} = I_pe^{-Kt}\left(K - \frac{R+r}{L}\right) + \frac{R+r}{L}I_p$$

حتى تكون المعادلة محقّقة يجب أن ينعدم الحد الأول للطرف الأيمن، لينتج ، $\dfrac{E}{L} = \dfrac{R+r}{L}I_p$

وهذا يؤدي إلى ، $\boxed{I_p = \dfrac{E}{R+r}}$ وحتى ينعدم الحد الأول، أي ، $I_pe^{-Kt}\left(K - \dfrac{R+r}{L}\right) = 0$

لكن I_pe^{-Kt} لا يمكن أن ينعدم (ما عدا لما $t \to \infty$)

إذن، $K-\frac{R+r}{L}=0$ ، ومنه $\boxed{K=\frac{R+r}{L}}$

طريقة ثانية

يمكن إيجاد الثابتين I_p و K بطريقة سريعة، على اعتبار أن حل المعادلة التفاضلية السابقة هو :

$i(t)=\frac{E}{R+r}(1-e^{-t/\tau})$ مع $\tau=\frac{L}{R+r}$.

وبمقارنة هذه العبارة لـ $i(t)$ بالعبارة المعطاة $i(t)=I_p(1-e^{Kt})$ نستنتج أن، $\boxed{I_p=\frac{E}{R+r}}$

وأن $K=\frac{1}{\tau}$ أي $K=\frac{1}{\frac{L}{R+r}}$

إذن $\boxed{K=\frac{R+r}{L}}$ وهذا ما حصلنا عليه من الطريقة الأولى.

ج/ الثابت I_p يمثل أعظم قيمة لشدة التيار، وهي $I_p=I_0=\frac{E}{R+r}$

الثابت K يمثل مقلوب ثابت الزمن أي $K=\frac{1}{\tau}=\frac{R+r}{L}$

د/ استنتاج قيمة الثابتين

من المنحنى البياني 1 نرى أن أعظم قيمة لـ U_R هي $U_{0R}=2,9V$

لكن $U_R=Ri$

وعندما تكون U_R أعظمية أي $U_R=U_{0R}$ ، فإن i تكون أعظمية، أي $i=I_p$

ولذا نكتب $U_{0R}=RI_p$ ، إذن $\boxed{I_p=\frac{U_{0R}}{R}}$

نعوض فنجد، $I_p=\frac{2,9}{50}$ إذن $\boxed{I_p=58\times10^{-3}A=58mA}$

كما أن τ يمكن حسابه من النقطة التي ترتيبتها تساوي $0,63U_{0R}$

أي $0,63\times2,9\approx1,8V$ ، ننقل القيمة $1,8V$ في البيان 1 كما هو موضح في الوثيقة المرفقة فنجد قيمة t التي هي τ . إذن، $t=\tau\approx17ms$

لكن $K=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{17\times10^{-3}}$ إذن $\boxed{K=58,8s^{-1}}$

هـ/ حساب قيمة r و L

• لدينا $I_p=\frac{E}{R+r}$ إذ $\boxed{r=\frac{E}{I_p}-R}$

نعوض نجد $r=\frac{3,8}{58\times10^{-3}}-50$ إذن $\boxed{r=15,5\Omega}$

• كما أن $K=\frac{R+r}{K}$ إذن $\boxed{L=\frac{R+r}{k}}$

نعوض فنجد، $K=\frac{50+15,5}{58,8}=1,14$ إذن $\boxed{L=1,1H}$

3/ عندما لا نهمل المقاومة الداخلية r' للبطارية فإن $U_G\neq E$ بل $U_G=E-r'i$

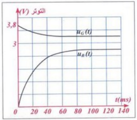
بمعنى الدالة تتناقص مع الزمن لأن $i(t)$ تتزايد مع الزمن، ثم تثبت قيمتها.

كما أن المعادلة التفاضلية يتغير شكلها إلى: $E-r'i=Ri+L\frac{di}{dt}+ri$

ومنه نجد، $\boxed{\frac{E}{L}=\frac{di}{dt}+\frac{R+r+r'}{L}i}$ وحلها هو $i'(t)=I'_p(1-e^{-K't})$

وهنا $I'_p=\frac{E}{R+r+r'}$

أي قيمتها تنقص عن القيمة السابقة، لذا يأتي المنحنيان $U_G(t)$ و $U_R(t)$ بشكل كيفي كما يلي:



الوحدة 5

◄ تطور جملة كيميائية خلال تحول كيميائي نحو حالة التوازن
◄ الأحماض والأسس

1- المكتسبات القبلية

1-1- تعريف برونستد

الحمض هو كلّ فرد كيميائي يمكنه التخلّي عن بروتون H^+ أو أكثر أثناء تفاعل كيميائي، والأساس هو الذي يكتسب هذا البروتون.

1-2- رمز الحمض هو HA ، $\boxed{HA = H^+ + A^-}$

مثال

$$\underset{\text{حمض الإيثانويك}}{HCOOH} = \underset{\text{شاردة الإيثانوات}}{HCOO^-} + \underset{\text{بروتون (شاردة الهيدروجين)}}{H^+}$$

رمز الأساس B : $\boxed{B + H^+ = BH^+}$

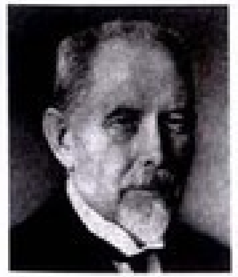
مثال

$$\underset{\text{النشادر (أساس)}}{NH_3} + \underset{\text{بروتون}}{H^+} = \underset{\text{شاردة الأمونيوم}}{BH^+}$$

1-3- الثنائية (أساس/ حمض) : (HA / A^-)

(HA / A^-) ⇐ HA : هو الحمض ، A^- : أساسه المرافق — مثال ⇐ $HCOOH / HCOO^-$

(BH^+ / B) ⇐ BH^+ : هو الحمض ، B : أساسه المرافق — مثال ⇐ NH_4^+ / NH_3



2- pH المحلول المائي

للتمييز بين الأحماض فيما بينها والأسس فيما بينها اقترح العالم الدانمركي سورنسن مفهوما هو مفهوم الـ pH .

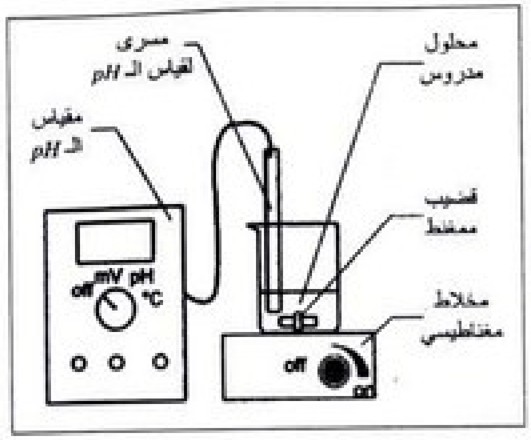
2-1- تعريف

يعرف pH محلول مائي بالعلاقة : $pH = -Log[H_3O^+]$. هذه العلاقة تصلح للمحاليل المخففة والتي يتحقق فيها : $[H_3O^+] \leq 5.10^{-1}\ mol.L^{-1}$.

$$\boxed{[H_3O^+] = 10^{-pH}}$$

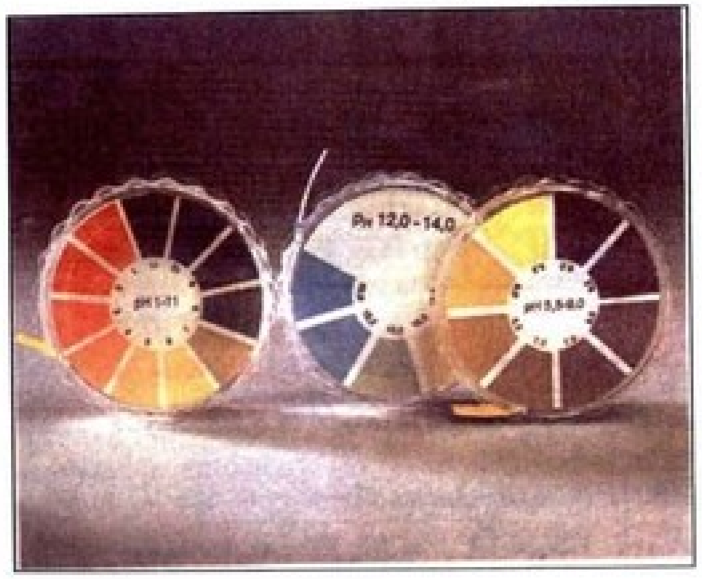
2-2- قياس pH محلول مائي

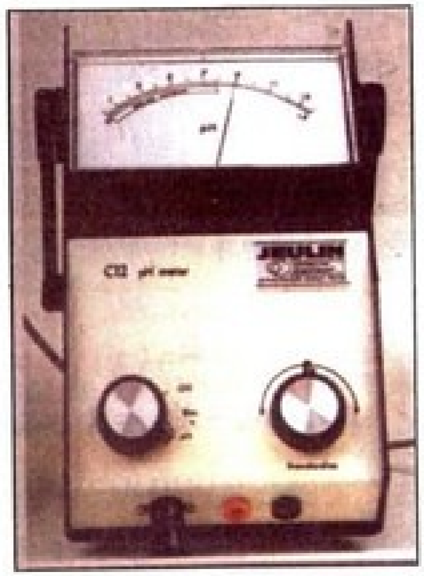
◄ **جهاز الـ pH متر :** يعين بشكل دقيق pH المحلول المائي.



◄ **ورق الـ pH :** يعين بصفة تقريبية قيمة pH المحلول المائي.

◄ **الكواشف الملوّنة :** لا تحدّد قيمة واحدة لـ pH بل مجالا لقيمه.





3- محلول حمضي ومحلول أساسي

3-1- الحمض القوي والحمض الضعيف

الحمض القوي : هو الحمض الذي يتفكّك كليا في الماء، ولا يبقى على شكل جزيئات، وبالتالي يكون تفاعله تاما $(\rightarrow)$: $HA_{(aq)} + H_2O_{(l)} \rightarrow H_3O^+_{(aq)} + A^-_{(aq)}$

أمثلة: HCl ، HNO_3 ، H_2SO_4 ...

الحمض الضعيف : هو الحمض الذي يكون تفككه جزئيا في الماء، ويبقى على شكل جزيئات، وبالتالي يكون تفاعله غير تام $(=)$ ، $HA_{(aq)} + H_2O_{(l)} \rightarrow H_3O^+_{(aq)} + A^-_{(aq)}$

أمثلة: $HCOOH$ ، CH_3COOH ، NH_4^+ ...

2-3- الأساس القوي والأساس الضعيف

الأساس القوي هو الأساس الذي يتفكك كليا في الماء، ولا يبقى على شكل جزيئات، ويكون تفاعله تاما $(\rightarrow)$: $B_{(aq)} + H_2O_{(l)} \rightarrow BH^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)}$

أمثلة: $NaOH$ ، KOH ...

الأساس الضعيف هو الأساس الذي يتفكك جزئيا في الماء، ويكون تفاعله غير تام $(\rightleftharpoons)$: $B_{(aq)} + H_2O_{(l)} = BH^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)}$

أمثلة: NH_3 ، CH_3-NH_2 ، $(CH_3-COO^- + Na^+)$ ...

4- تطور جملة كيميائية نحو حالة التوازن

4-1- مقارنة التقدم النهائي X_f والتقدم الأعظمي X_{max}

ننشئ جدول تقدم التفاعل التالي: $HA_{(aq)} + H_2O_{(l)} = H_3O^+_{(aq)} + A^-_{(aq)}$

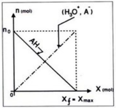
معادلة التفاعل	التقدم	$HA_{(aq)}$	$H_2O_{(l)}$	$H_3O^+_{(aq)}$	$A^-_{(aq)}$
الحالة الابتدائية	0	n_0	بزيادة	$0\ mol$	$0\ mol$
الحالة الانتقالية	X	$n_0 - X$	بزيادة	X	X
الحالة النهائية	X_f	$n_0 - X_f$	بزيادة	X_f	X_f

نميّز حالتين:

1/ حالة تفاعل تام

كل الحمض AH يتفاعل، وبالتالي يختفي تماما، لذا يكون $n_0 - X_f = 0$

ومنه: $\boxed{X_f = X_{max} = n_0}$ حيث: n_0: هو كمية مادة المتفاعل المحد، X_f: التقدم النهائي للتفاعل، X_{max}: التقدم الأعظمي للتفاعل.



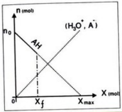
إذن، كل كمية المتفاعل المحد تستهلك، ويكون تطوّر التفاعلات والنواتج كما يلي:

يكون التقدم النهائي مساويا للتقدم الأعظمي: $\boxed{X_f = X_{max}}$

2/ حالة تفاعل غير تام

لا يتفاعل كل الحمض AH ، تبقى كمية منه، ولذا فإن $\boxed{n_0 - X_f \neq 0}$ وعليه فإن المتفاعل المحد لا يختفي كلية، لذا نكتب: $X_f < X_{max}$

ويكون تطوّره كما يلي:



يكون التقدم النهائي أصغر من التقدم الأعظمي: $\boxed{X_f < X_{max}}$

4-2- نسبة التقدّم (τ) (Taux d'avancement)

تعريف

نسبة تقدم تفاعل كيميائي في لحظة زمنية تعطى بالعبارة: $\boxed{\tau = \frac{X}{X_{max}}}$.

وعند بلوغ التفاعل حالته النهائية يكون $X = X_f$ ومنه تكون نسبة التقدم النهائي للتفاعل هي: $\tau_f = \frac{X_f}{X_{max}}$.

- إذا كان التفاعل تاما فإن $X_f = X_{max}$ ومنه $\tau_f = 1 = 100\%$
- إذا كان التفاعل غير تام فإن $X_f < X_{max}$ وبالتالي $\tau_f < 1$
- ملاحظة: $\boxed{0 < \tau \le 1}$

3-4- مفهوم حالة التوازن

- كلّ تحوّل كيميائي لجملة منمذج بتفاعل كيميائي عكوس، فإنّ الحالة النهائية للجملة الكيميائية تكون في توازن كيميائي ديناميكي (التوازن غير مستقر) يميز بمقدار ثابت ندعوه ثابت التوازن K .
- إذا تواجدت المتفاعلات مع النواتج في نفس المحلول، فإن التفاعل المنمذج لهذا التحوّل يعبر عنه بإشارة $(=)$.

1-3-4- كسر التفاعل Q_r

- قيمته تحدّد مدى تقدّم التفاعل بين الحالتين الابتدائية والنهائية.
- من أجل تفاعل كيميائي متوازن $aA + bB = cC + dD$ نعرّف كسر التفاعل في وسط متجانس بـ :

$$\boxed{Q_r = \frac{[C]^c.[D]^d}{[A]^a.[B]^b}}$$

مع : $[A]$ ، $[B]$ ، $[C]$ ، $[D]$ التراكيز المولية الحجمية للنواتج والمتفاعلات في نفس اللحظة وهذا بـ (mol / L) ، Q_r عدد ليس له بعد (وحدة).

مثال : أعط عبارة كسر التفاعل التالي : $I_{2(aq)} + 2S_2O^{2-}_{3(aq)} = 2I^-_{(aq)} + S_4O^{2-}_{6(aq)}$

$$\boxed{Q_r = \frac{[C]^c.[D]^d}{[A]^a.[B]^b}}$$

$$Q_r = \frac{[I^-]^2.[S_4O_6^{2-}]^1}{[I_2]^1.[S_2O_3^{2-}]^2}$$

ملاحظات

1/ في حالة التفاعل العكسي $cC + dD = aA + bB$ كسر تفاعله Q'_r هو $Q'_r = \frac{1}{Q_r}$.

2/ إذا كان أحد النواتج أو المتفاعلات هي مادة مذيبة (كالماء) فإنه يعطى لتركيزها القيمة (1) في عبارة الكسر Q_r أي $[H_2O] = 1$.

مثال : التفاعل $CH_3COOH_{(aq)} + H_2O_{(l)} = CH_3COO^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$

له كسر تفاعل $Q_r = \frac{[CH_3COO^-_{(aq)}][H_3O^+_{(aq)}]}{[CH_3COOH_{(aq)}].1}$.

3/ إذا كان أحد النواتج أو المتفاعلات مادة صلبة (S) ، فإن الوسط يكون غير متجانس، لذا يعطى لتركيز هذا الجسم الصلب العدد (1) .

مثال : ليكن التفاعل $2Cu^{2+}_{(aq)} + S^{2-}_{(aq)} = Cu_2S_{(s)}$

$$Q_r = \frac{[Cu_2S_{(s)}]^1}{[Cu^{2+}_{(aq)}]^2[S^{2-}_{(aq)}]^1} = \frac{1}{[Cu^{2+}_{(aq)}]^2[S^{2-}_{(aq)}]}$$

2-3-4- علاقة كسر التفاعل Q_r بتقدم التفاعل X

إذا نظرنا إلى جدول تقدّم التفاعل في البند 4-1 ، ففي الحالة الانتقالية يمكن أن نكتب :

$$Q_r = \frac{[H_3O^+][A^-]}{[HA][H_2O]}$$

لدينا $[HA] = \frac{n_0 - X}{V}$ حيث V حجم المحلول الذي تتواجد فيه كل الأفراد الكيميائية.

$$[A^-] = \frac{X}{V} \quad , \quad [H_3O^+] = \frac{X}{V} \quad , \quad [H_2O] = 1$$

نعوّض في عبارة Q فنجد ، $Q_r = \frac{\frac{X}{V} \times \frac{X}{V}}{\frac{n_0 - X}{V} \times 1}$ ومنه ، $\boxed{Q = \frac{X^2}{V(n_0 - X)}}$

3-3-4- ثابت التوازن K

عندما تبلغ جملة كيميائية حالة التوازن فإنّ كسر التفاعل النهائي Q_{rf} تصبح قيمته ثابتة لأن كميات المادة للمتفاعلات والنواتج تصبح قيمها ثابتة، وعندها نكتب :

$$\boxed{K = Q_{rf} = \frac{[C]_f^c.[D]_f^d}{[A]_f^a.[B]_f^b}}$$

ثابت التوازن K لا يتعلق بكيفية الحصول على التوازن، ولا بكميات المادة للمتفاعلات.

4-4- النسبة النهائية لتقدّم التفاعل τ_f والناقليتان σ و λ

سؤال: ليكن محلول حمضي S تركيزه المولي الابتدائي C . كيف يمكن تعيين تراكيز أفراده الكيميائية دون قياس pH مستعملين فقط جهاز قياس الناقلية لقياس الناقليتين σ و λ لشوارده ؟ ومن ثم كيف يمكن تعيين τ_f ؟

جواب: نتبع الطريقة التالية :

1/ نكتب معادلة انحلال الحمض (HA) في الماء : $HA_{(aq)} + H_2O_{(l)} = H_3O^+_{(aq)} + A^-_{(aq)}$

2/ نعيّن الأنواع الكيميائية المتواجدة في المحلول وهي : A^- ، H_3O^+ ، HA ، نستثني الماء H_2O ونضيف HO^- .

3/ نستعمل عبارة الناقلية النوعية σ لهذا المحلول بدلالة الناقلية النوعية المولية λ لمختلف شوارده :

$$\sigma = \lambda_{H_3O^+}.[H_3O^+] + \lambda_{A^-}.[A^-] + \lambda_{HO^-}.[HO^-]$$

يهمل $[HO^-]$ أمام $[H_3O^+]$ لذا نكتب من جديد :

$$\sigma = \lambda_{H_3O^+}.[H_3O^+] + \lambda_{A^-}.[A^-] ......(1)$$

4/ نستعمل قانون انحفاظ الشحنة : مجموع تراكيز الشوارد الموجبة = مجموع تراكيز الشوارد السالبة : $[H_3O^+] = [A^-] + [HO^-]$

بإهمال $[HO^-]$ امام $[H_3O^+]$ فنكتب : $[H_3O^+] = [A^-]$

نعوّض في المعادلة (1) السابقة نجد : $\sigma = (\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{A^-})[H_3O^+]$

إذن : $\boxed{[H_3O^+] = [A^-] = \dfrac{\sigma}{\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{A^-}}}$

5/ بقي تعيين تركيز النوع الكيميائي $[HA]$ عند التوازن اي $[HA]_f$

لذا نستعمل قانون انحفاظ الكتلة : $C = [HA]_f + [H_3O^+]_f$

إذن : $[HA]_f = C - [H_3O^+]_f$ ، اي : $\boxed{[HA]_f = C - \dfrac{\sigma}{\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{A^-}}}$

وهكذا نكون قد عيّنا تراكيز الأنواع الكيميائية المتواجدة في المحلول دون استعمال pH .

◄ تعيين τ_f

نعلم ان $\tau_f = \dfrac{X_f}{X_{\max}}$

لكن $X_f = n_{H_3O^+} = [H_3O^+]_f . V$ ، كما ان $X_{max} = n_0 = C.V$

نعوّض فنجد : $\tau_f = \dfrac{[H_3O^+]_f . V}{C.V}$ ومنه : $\boxed{\tau_f = \dfrac{[H_3O^+]_f}{C}}$

اي : $\boxed{\tau_f = \dfrac{\sigma}{C(\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{A^-})}}$

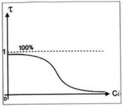
مع التذكير بان C هو التركيز الابتدائي للمحلول، لذا نرمز له بـ C_i .

◄ بيان $\tau = f(C_i)$

من العلاقة $\tau_f = \dfrac{[H_3O^+]_f}{C_i}$ نلاحظ ان τ_f يتغير بتغير التركيز الابتدائي للمحلول C_i مع الانتباه ان $[H_3O^+]_f$ لها قيمة ثابتة، ولذا نستنتج ما يلي :

النسبة النهائية τ_f لتقدّم التفاعل تتعلّق بالحالة الابتدائية للجملة الكيميائية

ويأتي المنحني البياني كما يلي :



* نتيجة

كلما كان التركيز الابتدائي τ_f للمحلول ضعيفا، زاد انحلال الحمض في الماء.

5-4- النسبة النهائية لتقدم التفاعل τ_f وثابت التوازن K

نعلم أن ثابت التوازن $K = \dfrac{[H_3O^+]_f [A^-]_f}{[HA]_f}$

لكن $[H_3O^+]_f = [A^-]_f = C\tau_f$ و $[HA] = C - C\tau_f$

ومنه : $K = \dfrac{C\tau_f^2}{C - C\tau_f}$ ، $\boxed{K = \dfrac{C\tau_f^2}{1 - \tau_f}}$

* نتيجة

النسبة النهائية لتقدم التفاعل تتعلق بثابت التوازن.

5- التحولات حمض / أساس

5-1- المحاليل المائية

5-1-1- التفكك الذاتي للماء

الماء المقطر يتفكك ذاتيا إلى شوارد H_3O^+ و HO^- وفق التفاعل الكيميائي التالي :

$$\boxed{H_2O_{(l)} + H_2O_{(l)} = H_3O^+_{(aq)} + OH^-_{(aq)}}$$

$$[H_3O^+] = [OH^-] = \frac{\sigma}{\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{HO^-}} = \frac{5,5 \times 10^{-3}\, ms.m^{-1}}{(35+20)\, ms.m^{-1}}$$

$\boxed{[H_3O^+] = [OH^-] = 10^{-7}\, mol.L^{-1}}$ عند الدرجة $25\,°C$.

5-1-2- الجداء الشاردي للماء

لنعين ثابت التوازن الكيميائي لمعادلة التفكك الذاتي للماء :

$$K = \frac{[H_3O^+][OH^-]}{[H_2O][H_2O]} = \frac{[H_3O^+][OH^-]}{1 \times 1}$$

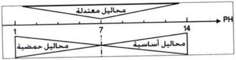
إذن ، $K = [H_3O^+][OH^+]$ ندعوه الجداء الشاردي للماء K_e .

$\boxed{K_e = [H_3O^+_{(aq)}][OH^-_{(aq)}]}$ عند الدرجة $25\,°C$ ، $K_e = 10^{-14}$.

$\boxed{pK_e = 14 \ ، \ pK_e = -\log Ke \ ; \ Ke = 10^{-PKe}}$

5-1-3- سلم الـ pH

- المحاليل الحمضية تتميز بان $[H_3O^+]_{eq} > [HO^-]_{eq}$ ، وهذا يؤدي إلى $pH < 7$.
- المحاليل المعتدلة تتميز بان $[H_3O^+]_{eq} = [HO^-]_{eq}$ ، إذن $pH = 7$.
- المحاليل الأساسية تتميز بان $[H_3O^+]_{eq} < [HO^-]_{eq}$ ، إذن $pH > 7$.



5-2-1- ثابت الحموضة K_a و pK_a للثنائية (اساس / حمض)

للتمييز بين الأحماض الضعيفة فيما بينها، وكذا الأسس الضعيفة، نعرف مقدارا كيميائيا ندعوه ثابت الحموضة K_a .

ليكن التفاعل المتوازن : $HA_{(aq)} + H_2O_{(l)} = H_3O^+_{(aq)} + A^-_{(aq)}$

- ثابت الحموضة للثنائية HA / A^-

$$\boxed{K_a = K = \frac{[H_3O^+]_f[A^-]_f}{[HA]_f}}$$

نعرف الـ pK_a للثنائية HA / A^- كما يلي : $\boxed{K_a = 10^{-pKa} \ ; \ pK_a = -\log K_a}$

- كلما كان K_a اكبر كان الحمض (HA) اقوى، وأساسه المرافق (A^-) اضعف.
- إذا كان K_a اكبر كان pK_a كان أصغر.

5-2-2- العلاقة بين pH و pK_a

نعلم ان $K_a = \frac{[H_3O^+]_f[A^-]_f}{[HA]_f}$ إذن :

$$\log K_a = \log [H_3O^+]_f + \log \frac{[OH^-]_f}{[HA]_f}$$

$$-pK_a = -pH + \log \frac{[A^-]_f}{[HA]_f} \quad ، \quad \boxed{PH = PKa + \log \frac{[A^-]_f}{[HA]_f}}$$

ونكتبه باسلوب اخر : $pH = pK_a + \log \frac{[\text{الأساس}]_f}{[\text{الحمض}]_f}$

مجالات تغلب الصنفتين الحمضية والأساسية على بعضهما للثنائية (أساس/ حمض)

لدينا : $pK_a - pH = -\text{Log}\frac{[\text{الأساس}]_f}{[\text{الحمض}]_f}$

الحالة 1

إذا كان $pH = pK_a$ فإن $[\text{الحمض}]_f = [\text{الأساس}]_f$ ، إذن فلا توجد صفة غالبة.

الحالة 2

إذا كان $pH < pK_a$ فإن $[\text{الحمض}]_f > [\text{الأساس}]_f$ ، إذن فالصفة الحمضية غالبة.

الحالة 3

إذا كان $pH > pK_a$ فإن $[\text{الحمض}]_f < [\text{الأساس}]_f$ ، إذن فالصفة الأساسية غالبة.

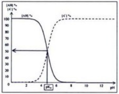
مخطط الصفة الغالبة

لدراسة الصفة الغالبة، يستعمل مخطط الصفة الغالبة الذي يبرز تطوّر النسبتين المئويتن للصفة الحمضية (% للحمض) وللصفة الأساسية (% للأساس) وهذا بدلالة pH .

يعطى :

$$\text{الحمض}\% = \frac{[\text{الحمض}]_f}{[\text{الأساس}]_f + [\text{الحمض}]_f} \times 100$$

$$\text{الأساس}\% = \frac{[\text{الأساس}]_f}{[\text{الأساس}]_f + [\text{الحمض}]_f} \times 100$$



5-3- تطبيق على الكاشف الملوّن

- الكاشف الملوّن هو ثنائية (أساس / حمض) يتغيّر لونه حسب مقدار pH المحلول الذي يوضع فيه. ذلك لأنّ صفتيه الحمضية والأساسية يأخذان لونين مختلفين في المحلول.

◄ يرمز للثنائية (أساس/ حمض) للكاشف الملوّن بالرّمز (HI_n / I_n^-).

◄ يتفكّك الكاشف الملوّن في الماء حسب التفاعل : $\boxed{HI_{n(aq)} + H_2O_{(l)} = H_3O^+_{(aq)} + I^-_{n(aq)}}$

مثال: بالنسبة لأزرق البروموتيمول : لون حمضه (HI_n) : أصفر إذا كان $pH < 7$.

لون أساسه (I_n^-) : أزرق إذا كان $pH > 7$.

إذا كان $pH = 7$ فإن اللون يكون أخضر.

ثابت الحموضة للثنائية (HI_n / I_n^-)

$$\boxed{K_i = \frac{[H_3O^+]_f [I_n^-]_f}{[HI_n]_f}}$$

$$\boxed{pH = pK_i + log \frac{[I_n^-]_f}{[HI_n]_f}}$$

لون المحلول الذي يوضع فيه الكاشف يعتمد على نسبة التركيز بين الحمض والأساس :

$R = \dfrac{[I_n^-]_f}{[HI_n]_f}$.

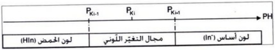
نقبل بالنسبة للعين المجرّدة ذات الرّؤية المتوسّطة أنّ المحلول :

◄ يأخذ لون الأساس (I_n^-) إذا كان $R > 10$ ، وبالتالي نجد $PH > pK_i + 1$.

◄ يأخذ لون الحمض (HI_n) إذا كان $R < \dfrac{1}{10}$ ، وبالتالي نجد $pH < pK_i - 1$.

◄ يأخذ لونا ناتجا من مزيج لوني الحمض والأساس إذا كان $\dfrac{1}{10} < R < 10$.

وبالتالي فإن $\boxed{PK_i - 1 < pH < PK_i + 1}$ **ويسمّى مجال التغيّر اللّوني.**

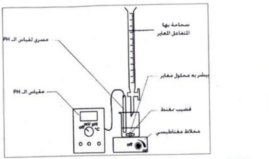


4-5- المعايرة الـ pH - مترية

◄ نسمي تفاعل حمض بأساس بالمعايرة، ودراسة التفاعل تسمى المعايرة الـ pH - مترية.

◄ تهدف المعايرة إلى تحديد كمية المادة (n) أو التركيز المولي الحمضي (C) للمحلولين (حمض أو أساس) المعايرة *(Titrant)* أو المعايرة *(Titré)* .

◄ عند التكافؤ، المتفاعل المعاير والتفاعل المعاير يخضعان للشروط الستوكيومترية.



المعايرة

التركيبة التجريبية لتحقيق المعايرة موضحة في الشكل المقابل، وتتألف من :

◄ سحاحة : تملأ بالمحلول المعاير.

◄ بيشر : يملأ بالمحلول المعاير.

◄ قضيب مغناطيسي، مخلط.

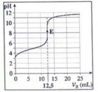
◄ جهاز pH - متر.

التجربة

نجري على سبيل المثال تفاعل معايرة بين حمضا (A) وأساسا هو الصود $\left(Na^+ + HO^-\right)$.

ندرس تطوّر pH المزيج بدلالة المتفاعل المعاير V_b أي

$$\frac{dPH}{dV_b} = g(V_b) \text{ او } PH = f(V_b)$$



◄ عند التكافؤ (E) يتحقق :

$$\boxed{\begin{array}{l} n(\text{حمض}) = n_E(\text{أساس}) \\ C_a V_a = C_b V_{b_E} \end{array}}$$

Ca : تركيز المحلول الحمض ، V_a : حجم المحلول الحمض ،

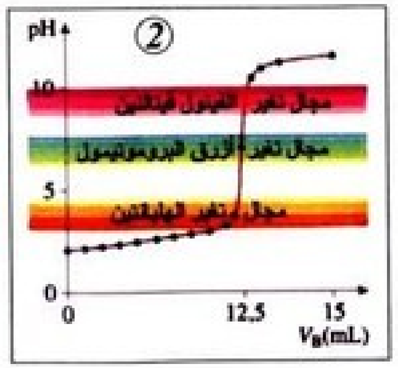
C_b : تركيز المحلول الأساسي، V_{b_E} : المحلول الأساسي عند التكافؤ.

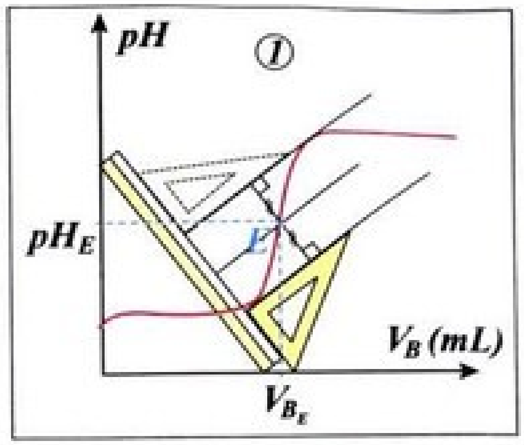
طريقة تعيين نقطة التكافؤ

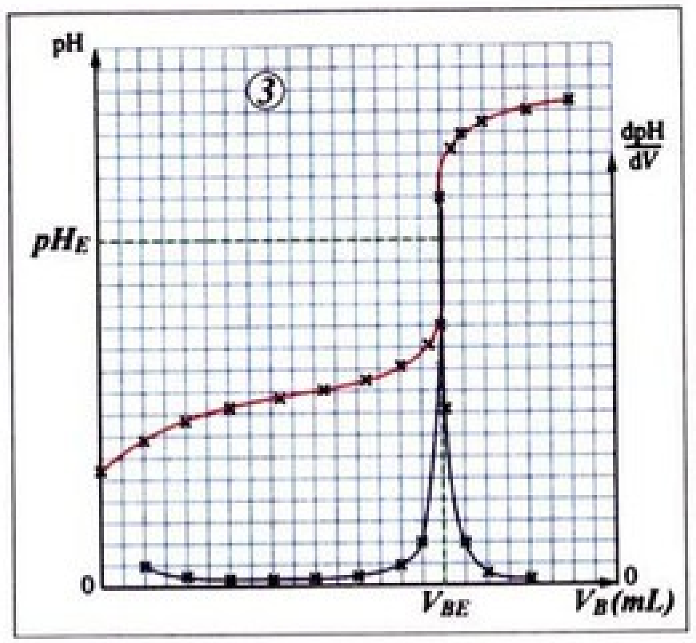
◄ طريقة المماسين المتوازيين (انظر الشكل 1).

◄ طريقة تغيير لون الكاشف (انظر الشكل 2).

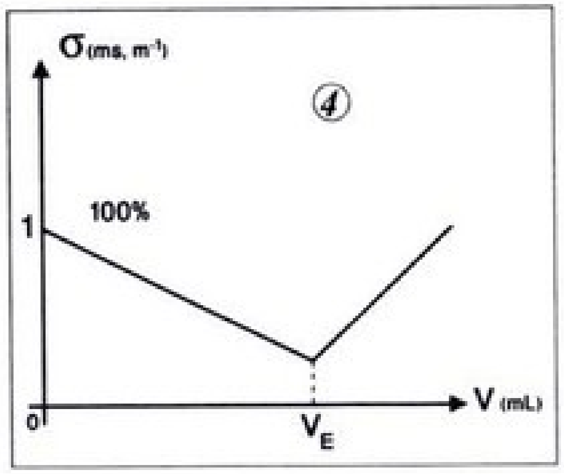
◄ الطريقة المعلوماتية بتعيين إحداثيات نقطة النهاية العظمى للمنحني $\dfrac{dpH}{dV_b} = g(V_b)$ (الشكل 3).







◄ طريقة قياس الناقلية، ورسم المنحني البياني $\sigma = f\ (V\ )$ (الشكل 4).



الوحدة 5

تطور جملة كيميائية خلال تحول كيميائي نحو حالة التوازن

• تعريف برونستد

الحمض هو كلّ فرد كيميائي يمكنه فقد بروتون أو أكثر اثناء تفاعل كيميائي.
والأساس هو الذي يكتسب هذا البروتون.

• نسبة التقدّم النّهائي للتفاعل τ_f

$$\tau_f = \frac{X_f}{X_{max}}$$

* إذا كان $\tau_f = 100\%$ ، فالتفاعل تام.

* إذا كان $\tau_f < 1$ ، فالتفاعل غير تام.

كسر التفاعل Q_r

ليكن التفاعل : $aA + Bb = cC + dD$

$$Q_r = \frac{[C]^c.[D]^d}{[A]^a.[B]^b}$$

علاقة كسر التفاعل Q_r بالتّقدّم X

$$Q_r = \frac{X^2}{V(n_0 - X)}$$

ثابت التوازن الكيميائي

* إذا كان $Q_r < k$ الجملة تتطوّر في الاتجاه المباشر.

* إذا كان $Q_r > k$ الجملة تتطوّر في الاتجاه المعاكس.

* إذا كان $Q_r = k$ الجملة في حالة توازن.

علاقة k بـ τ_f

$$k=\frac{C_i\,\tau_f^2}{1-\tau_f}$$

C_i: التركيز الابتدائي.

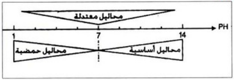
الجداء الشاردي للماء k_e: $k_e=[H_3O^+_{(aq)}][HO^-_{(aq)}]$

عند الدرجة $25C°$: $k_e=10^{-14}$

تعريف الـ pH

$[H_3O^+]=10^{-pH}$ ، ومنه $pH=-\log[H_3O^+]$

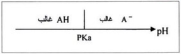
سلم الـ pH



ثابت الحموضة k_a و pk_a للثنائية (أساس/حمض) (HA/A^-)

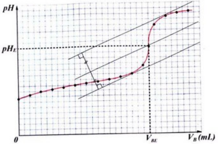
$k_a=10^{-pk_a}$ ، $pk_a=-\log k_a$ ، $k_a=\dfrac{[H_3O^+_{(aq)}]_f[A^-_{(aq)}]_f}{[HA_{(aq)}]_f}$

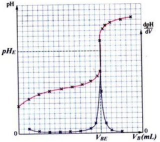
العلاقة بين pH و pk_a



المعايرة الـ pH - مترية

عند التكافؤ E بين حمض وأساس يتحقق: $C_aV_a=C_bV_b$





التمرين 1

من بين الأنواع حمض/أساس التالية ، $CH_3COO^-_{(aq)}$ ، $HCN_{(aq)}$ ، $HSO^-_{4(aq)}$ ، $NH^+_{4(aq)}$ ،
$SO^{2-}_{4(aq)}$ ، $CH_3COOH_{(aq)}$ ، $CN^-_{(aq)}$ ، $NH_{3(aq)}$ ،

1/ حدد لكل حمض أساسه المرافق، واعط الثنائية (أساس/حمض) لكل منها.

2/ اكتب المعادلة النصفية للحمض/أساس لكل منها.

3/ نفاعل $SO^{2-}_{4(aq)}$ مع $CH_3COOH_{(aq)}$.

ا/ اكتب المعادلة النمذجة للتحول الكيميائي.

ب/ بين لماذا هذا التحول هو تفاعل حمض/أساس ؟

الحل

1/ تحديد الحمض والأساس المرافق والثنائية (أساس/حمض)

الحمض	$NH^+_{4(aq)}$	$CH_3COOH_{(aq)}$	$HSO^-_{4(aq)}$	$HCN_{(aq)}$
الأساس المرافق	$NH_{3(aq)}$	$CH_3COO^-_{(aq)}$	$SO^{2-}_{4(aq)}$	$CN^-_{(aq)}$
الثنائية (أساس/ حمض)	$NH^+_{4(aq)} / NH_{3(aq)}$	$CH_3COOH_{(aq)} /$ $CH_3COO^-_{(aq)}$	$HSO^-_{4(aq)} / SO^{2-}_{4(aq)}$	$HCN_{(aq)} / CN^-_{(aq)}$

2/ كتابة المعادلة النصفية للحمض/أساس

$$HCN_{(aq)} = H^+_{(aq)} + CN^-_{(aq)}$$
$$HSO^-_{4(aq)} = H^+_{(aq)} + SO^-_{4(aq)}$$
$$CH_3COOH_{(aq)} = H^+_{(aq)} + CH_3COO^-_{(aq)}$$
$$NH^+_{4(aq)} = H^+_{(aq)} + NH_{3(aq)}$$

3/ا/ التفاعل النمذج للتحول الكيميائي ،

$$CH_3COOH_{(aq)} + SO^{2-}_{4(aq)} = CH_3COO^-_{(aq)} + HSO^-_{4(aq)}$$

ب/ هذا تفاعل حمض/أساس لأن الفرد الكيميائي $CH_3COOH_{(aq)}$ فقد بروتونا H^+ حسب التحول التالي، فهو إذن حمض ، $CH_3COOH_{(aq)} \rightarrow H^+_{(aq)} + CH_3COO^-_{(aq)}$

اما الفرد الكيميائي $SO^{2-}_{4(aq)}$ ، فقد اكتسب هذا البروتون حسب التحول التالي، فهو إذن أساس.

$$H^+_{(aq)} + SO^{2-}_{4(aq)} \rightarrow HSO^-_{4(aq)}$$

التمرين 2

املأ الجدول التالي.

الحمض	الأساس المرافق	الثنائية أساس/حمض
$C_2H_5COOH_{(aq)}$	...	$C_2H_5COOH_{(aq)} / ...$
...	$HO^-_{(aq)}$	$... HO^-_{(aq)}$
$NH^+_{4(aq)}$	...	...
CO_2 , H_2O	...	$CO_2 , H_2O / ...$
...	H_2O	...

الحل

الحمض	الأساس المرافق	الثنائية أساس/حمض
$C_2H_5COOH_{(aq)}$	$C_2H_5CO^-_{2(aq)}$	$C_2H_5COOH_{(aq)} / C_2H_5CO^-_{2(aq)}$
$H_2O_{(l)}$	$HO^-_{(aq)}$	$H_2O_{(l)} / HO^-_{(aq)}$
$NH^+_{4(aq)}$	$NH_{3(aq)}$	$NH^+_{4(aq)} / NH_{3(aq)}$
CO_2 , H_2O	$HCO^-_{3(aq)}$	$CO_2 , H_2O / HCO^-_{3(aq)}$
$H_3O^+_{(aq)}$	$H_2O_{(l)}$	$H_3O^+_{(aq)} / H_2O_{(l)}$

التمرين 3

التفاعلات التالية، هل هي تفاعلات أحماض وأسس، برر إجابتك.

ا/ $Cu^{2+}_{(aq)} + 2HO^-_{(aq)} = Cu(OH)_{2(s)}$

ب/ $CH_3NH_{2(aq)} + CH_3CO_2H_{(aq)} = CH_3NH^+_{3(aq)} + CH_3CO^-_{2(aq)}$

ج/ $CH_3CO_2H_{(aq)} + CH_3OH_{(aq)} = CH_3CO_2CH_{3(aq)} + H_2O_{(l)}$

د/ $HCl_{(g)} + NH_{3(g)} = NH^{+}_{4(aq)} + Cl^{-}_{(aq)}$

هـ/ $C_6H_5CO_2H_{(aq)} + H_2O_{(l)} = C_6H_5CO^{-}_{2(aq)} + H_3O^{+}_{(aq)}$

الحل

- التفاعل أ : ليس تفاعل حمض/أساس، لأنه لم يتم فيه فقد بروتون H^+ أو اكتسابه.
- التفاعل ب : هو تفاعل حمض/أساس، لأن النوع الكيميائي $CH_3NH_{2(aq)}$ هو أساس اكتسب بروتونا H^+ فتحول إلى النوع $CH_3NH^{+}_{3(aq)}$، أما النوع الكيميائي $CH_3CO_2H_{(aq)}$ فهو حمض لأنه فقد H^+ وتحول إلى النوع الكيميائي $CH_3CO^{-}_{2(aq)}$.
- التفاعل ج : ليس تفاعل حمض/أساس، لأنه لم يتم فيه فقد بروتون H^+ أو اكتسابه (في الواقع يسمى تفاعل أسترة).
- التفاعل د : هو تفاعل حمض/أساس، لأن $HCl_{(aq)}$ فقد H^+ و $NH_{3(aq)}$ اكتسبه.
- التفاعل هـ : هو تفاعل حمض/أساس، لأن $C_6H_5CO_{2(aq)}$ فقد بروتونا H^+، فهو حمض، والماء H_2O اكتسب بروتونا، فقد لعب دور أساس.

التمرين 4

املأ الجدول التالي، باعتبار أن درجة حرارة وسط التفاعل هي $25°$.

pH	$2,0$	...	$4,5$	...
$[H_3O^{+}_{(aq)}](mol.L^{-1})$	...	$1,5\times10^{-3}$	...	...
$[HO^{-}_{(aq)}](mol.L^{-1})$	...	...	...	10^{-2}

الحل

يعطي الجداء الشاردي للماء k_e بالعبارة : $k_e = [H_3O^{+}_{(aq)}][HO^{-}_{(aq)}]$

وعند الدرجة $25°C$ فإن $k_e = 10^{-14}$

كما أن $pH = -Log[H_3O^{+}_{(aq)}]$ و $[H_3O^{+}_{(aq)}] = 10^{-pH}$

- في حالة $pH=2,0$ فإن : $[H_3O^{+}_{(aq)}] = 10^{-2}\,mol.L^{-1}$

لحساب $[HO^{-}_{(aq)}]$ نستعمل الجداء الشاردي للماء، فنجد :

$$[HO^{-}_{(aq)}] = \frac{10^{-14}}{[H_3O^{+}_{(aq)}]} = \frac{10^{-14}}{10^{-2}} = 10^{-12}$$

$$[HO^{-}_{(aq)}] = 10^{-12}\,mol.L^{-1}$$

- إذا كان $[H_3O^{+}_{(aq)}] = 1,5\times10^{-3}\,mol.L^{-1}$ فإن : $pH = -Log[H_3O^{+}_{(aq)}]$

ومنه : $pH = -Log\,1,5\times10^{-3}$ ، إذن : $pH = 2,82$

كذلك : $[HO^{-}_{(aq)}] = \frac{10^{-14}}{[H_3O^{+}]}$

إذن : $[HO^{-}_{(aq)}] = \frac{10^{-14}}{1,5\times10^{-3}}$ ، $[HO^{-}_{(aq)}] = 6,7\times10^{-12}\,mol.L^{-1}$

وهكذا، بالنسبة لبقية القيم، ندونها في الجدول كما يلي :

pH	$2,0$	$2,82$	$4,5$	12
$[H_3O^{+}_{(aq)}](mol.L^{-1})$	10^{-2}	$1,5\times10^{-3}$	$3,16\times10^{-5}$	10^{-2}
$[HO^{-}_{(aq)}](mol.L^{-1})$	10^{-2}	$6,7\times10^{-12}$	$3,16\times10^{-10}$	10^{-2}

التمرين 5

تعطى : $pH = 5,1$ لمحلول مائي لكلور الأمونيوم $(NH^{+}_{4(aq)} + Cl^{-}_{(aq)})$، تركيزه $C = 1,0\times10^{-1}\,mol.L^{-1}$

1/ أعط تعريف الحمض حسب برونستد.

2/ ماذا تقول عن النوع $NH_{3(aq)}$ ؟

3/ اكتب معادلة تفاعل شاردة الأمونيوم مع الماء.

4/ أنجز جدول تقدم التفاعل.

5/ بين أن الأمونيوم لا يتفاعل كلية مع الماء.

6/ عين التركيب المولي الحجمي للمحلول المدروس في الحالة النهائية للتفاعل.

الحل

1/ تعريف الحمض حسب برونستد

الحمض هو كل فرد كيميائي يفقد بروتونا H^+ أو أكثر أثناء تفاعل كيميائي. والأساس هو الذي يكتسب هذا البروتون.

2/ النوع الكيميائي $NH_{3(aq)}$ هو أساس.

3/ معادلة تفاعل شاردة الأمونيوم مع الماء : $NH^{+}_{4(aq)} + H_2O_{(l)} = NH_{3(aq)} + H_3O^{+}_{(aq)}$

4/ جدول التقدم

	$NH^+_{4(aq)}$ +	$H_2O_{(l)}$ =	$NH_{3(aq)}$ +	$H_3O^+_{(aq)}$
الحالة الابتدائية	$n_0 = CV_{محلول}$	بزيادة	$0\,mol$	$0\,mol$
الحالة النهائية	$n_0 - X_f$	بزيادة	X_f	X_f

5/ تبيان أن الأمونيوم لا يتفاعل كلية مع الماء

نعين نسبة التقدم النهائي للتفاعل. لدينا $\tau_f = \dfrac{X_f}{X_{max}}$

لكن: $x_{max} = n_0 = CV_{محلول}$

كما أن: $X_f = n_{H_3O^+} = [H_3O^+] \times V_{محلول}$

مع $[H_3O^+] = 10^{-pH}$ اي $[H_3O^+] = 10^{-5,1} = 7,9 \times 10^{-6}\, mol.L^{-1}$

نعوض فنجد $\tau_f = \dfrac{[H_3O^+].V_{محلول}}{C\,V_{محلول}}$

$$\tau_f = \frac{[H_3O^+]}{C} = \frac{7,9 \times 10^{-6}}{1,0 \times 10^{-1}} \text{ ، } \tau_f = 7,9 \times 10^{-5} << 1$$

وهذا يعني أن تفاعل الأمونيوم مع الماء ضعيف جدا، ولا يمكن أن يكون تاما.

6/ التركيب المولي الحجمي في الحالة النهائية للتفاعل

حساب $[NH_4^+]$

$$[NH_4^+] = \frac{n_0 - x_f}{V_{محلول}} = \frac{C\,V_{محلول} - [H_3O^+].V_{محلول}}{V_{محلول}}$$

$[NH_4^+] = 10^{-1} - 7,9.10^{-6} \approx 10^{-1} mol/L$ إذن $[NH_4^+] = 10^{-1} mol.L^{-1}$

حساب $[NH_3]$ و $[H_3O^+]$

$$[NH_3] = [H_3O^+] = -10^{-pH} = 10^{-5,1} = 7,9.10^{-6} mol.L^{-1}$$

حساب $[Cl^-]$

لاحظ أننا لم نسجل Cl^- في التفاعل، ولا في جدول التقدم، لأنها شوارد غير فعالة، غير أنها موجودة.

ونحسب تركيزها كما يلي: $[cl^-] = \dfrac{n_0}{V_{محلول}} = \dfrac{C\,V_{محلول}}{V_{محلول}} = C = 10^{-1} mol.L^{-1}$

$$\boxed{[Cl^-] = 10^{-1}\, mol.L^{-1}}$$

التمرين 6

إن فيتامين C هو في الأصل حمض الأسكوربيك النقي $C_6H_8O_6$ الذي نرمز له بـ AH في التمرين.
إن انحلال قرص كتلته $m = 0,35g$ من فيتامين C في كاس به $200mL$ ماء، يعطى محلولا يتميز بـ $pH = 3,0$.

1/ اعط تعريف الحمض حسب برونستد.

2/ ماذا يمثل النوع الكيميائي $C_6H_7O_6^-$ ؟

3/ اكتب معادلة تفاعل حمض الأسكوربيك مع الماء.

4/أ/ اعط عبارة نسبة تقدم التفاعل τ .

ب/ احسب قيمة نسبة التقدم النهائي τ_f لهذا التفاعل. ماذا تستنتج ؟

الحل

2/ $C_6H_7O_6^-$ هو الأساس المرافق للحمض $C_6H_8O_6$.

3/ $C_6H_8O_{6(aq)} + H_2O_{(l)} = C_6H_7O^-_{6(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$.

4/أ/ $\tau = \dfrac{x}{x_{max}}$

ب/ $\tau_f = \dfrac{x_f}{x_{max}} = 10\%$

التمرين 7

محلول S_1 من الأمونياك $NH_{3(aq)}$ تركيزه $C = 0,10 mol.L^{-1}$ وقيمة pH له $11,1$.

1/ اكتب معادلة تفاعل النشادر مع الماء.

2/ بين أن النشادر لا يتفاعل كلية مع الماء.

3/ احسب الكسر النهائي للتفاعل $Q_{r,eq}$ عند التوازن الكيميائي.

4/ احسب ثابت الحموضة k_A للثنائية.

تعطى الثنائية أساس/حمض $NH_{3(aq)} / NH^+_{4(aq)}$ و $k_e = 10^{-14}$ عند الدرجة $25°C$.

5/ بين أن $Q_{r,eq} = \dfrac{k_e}{k_A}$.

الحل

1/ معادلة تفاعل النشادر مع الماء

$$NH_{3(aq)} + H_2O_{(l)} = NH^+_{4(aq)} + HO^-_{(aq)}$$

2/ لإظهار أن النشادر لا يتفاعل كلية مع الماء، ننشئ جدول التقدم، ومن ثم نحسب τ_f .

$$NH_{3(aq)} + H_2O_{(l)} = NH^+_{4(aq)} + HO^-_{(aq)}$$

	$NH_{3(aq)}$	$+\ H_2O_{(l)}$	$=\ NH^+_{4(aq)}$	$+\ HO^-_{(aq)}$
الحالة الابتدائية	$n_0 = CV$	بزيادة	$0mol$	$0mol$
الحالة النهائية	$n_0 - X_f$	بزيادة	X_f	X_f

لدينا $\tau_f = \dfrac{X_f}{X_{max}}$

نعين قيمة كل من X_{max} و X_f

لدينا $X_{max} = n_0 = CV$

اما X_f فنعينه من تركيز HO^- الذي نحسبه من الجداء الشاردي للماء $k_e = [H_3O^+][HO^-]$

$$[HO^-] = \frac{k_e}{[H_3O^+]} = \frac{10^{-14}}{10^{-pH}} = 10^{-14+pH}$$

$$[HO^-] = 10^{-14+11,1} \;\; ; \;\; [HO^-] = 10^{-2,9}\,mol.L^{-1}$$

$$[HO^-] = 1,3\times 10^{-3}\,mol.L^{-1}$$

من جدول التقدم نكتب، $[HO^-] = \dfrac{X_f}{V}$ حيث V حجم محلول النشادر، وقيمته مجهولة.

إذن، $V_f = [HO^-]\times V$ وفي الأخير، $\tau_f = \dfrac{X_f}{X_{max}} = \dfrac{[HO^-]V}{CV}$ اي، $\tau_f = \dfrac{[HO^-]_f}{C_1}$

نعوض، $\tau_f = \dfrac{1,3\times 10^{-3}}{0,1}$ فنجد، $\boxed{\tau_f = 1,3\times 10^{-2} = 1,3\%}$

فنسبة تقدم التفاعل النهائي هي $1,3\%$، وهي نسبة تدل على أن النشادر لم يتفاعل كلية في الماء.

3/ حساب كسر التفاعل عند التوازن $Q_{r,eq}$

نعلم ان $Q_{r,eq} = \dfrac{[NH_4^+]_{eq}[HO^-]_{eq}}{[NH_3]_{eq}[H_2O]_{eq}}$

لكن الماء يعتبر مذيبا، لذا ناخذ $[H_2O] = 1$ ومنه $Q_{r,eq} = \dfrac{[NH_4^+]_{eq}[HO^-]_{eq}}{[NH_3]_{eq}}$

من جدول التقدم لدينا $[HO^-]_{eq} = \dfrac{X_f}{V}$ و $[NH_4^+]_{eq} = \dfrac{X_f}{V}$

$$[NH_3]_{eq} = \frac{n_0 - X_f}{V} = \frac{CV - X_f}{V}$$

نعوض في عبارة $Q_{r,eq}$ فنجد، $Q_{r,eq} = \dfrac{\frac{X_f}{V}\times\frac{X_f}{V}}{\frac{n_0 - X_f}{V}} = \dfrac{(\frac{X_f}{V})^2}{\frac{n_0 - X_f}{V}}$

لكن $\tau_f = \dfrac{X_f}{X_{max}}$ وبالتالي $X_f = \tau_f \times X_{max}$ اي $X_f = \tau_f CV$

نعوض، $Q_{r,eq} = \dfrac{(\frac{\tau_f CV}{V})^2}{\frac{CV - \tau_f CV}{V}}$ إذن $Q_{r,eq} = \dfrac{\tau_f^2 C^2}{C(1-\tau_f)} = \dfrac{\tau_f^2 C}{1-\tau_f}$

$Q_{r,eq} = \dfrac{1,69\times 10^{-4}\times 0,1}{1-1,3\times 10^{-2}}$ ، $Q_{r,eq} = \dfrac{(1,3\times 10^{-2})}{9,87\times 10^{-1}}$ ، $\boxed{Q_{r,eq} \approx 1,7\times 10^{-5}}$

4/ حساب ثابت الحموضة k_A للثنائية أساس/حمض $NH^+_{4(aq)} / NH_{3(aq)}$

لدينا، $k_A = \dfrac{[H_3O^+]_{eq}[NH_3]_{eq}}{[NH_4^+]_{eq}}$ ، $k_A = \dfrac{10^{-11,1}\times\frac{n_0 - X_f}{V}}{\frac{X_f}{V}}$

$$k_A = \frac{10^{-pH}(\frac{CV - \tau_f CV}{V})}{\frac{\tau_f CV}{V}} = 10^{-pH}(\frac{1-\tau_f}{\tau_f}) \quad , \quad k_A = 10^{-pH}(\frac{1}{\tau_f} - 1)$$

نعوض فنجد، $k_A = 10^{-11,1}(\dfrac{1}{1,3\times 10^{-2}} - 1)$ ومنه، $\boxed{k_A = 6,03\times 10^{-10}}$

5/ تبيان أن $Q_{r,eq} = \dfrac{k_e}{k_A}$

نعلم أن $Q_{r,eq} = \dfrac{[NH^+_{4(aq)}][HO^-_{aq}]_{eq}}{[NH_{3(aq)}]_{eq}}$

لكي نظهر k_A و k_e في هذه المساواة نضرب البسط والمقام في $[H_3O^+_{aq}]_{eq}$

إذن $Q_{r,eq} = \dfrac{[NH^+_{4(aq)}]_{eq}[HO^-_{aq}]_{eq}[H_3O^+_{aq}]_{eq}}{[NH_{3(aq)}]_{eq}[H_3O^+_{aq}]_{eq}}$

$$Q_{r,eq} = \frac{[NH^+_{4(aq)}]_{eq}}{[NH_{3(aq)}]_{eq}[H_3O^+_{aq}]_{eq}}[HO^-_{aq}]_{eq}[H_3O^+_{aq}]_{eq}$$

حيث $\frac{[NH^{+}_{4(aq)}]_{eq}}{[NH_{3(aq)}]_{eq}[H_3O^{+}_{aq}]_{eq}} = \frac{1}{k_A}$ و $[HO^{-}_{aq}]_{eq}[H_3O^{+}_{aq}]_{eq} = k_e$

إذن $\boxed{Q_{r,eq} = \frac{k_e}{k_A}}$

التمرين 8

محلول مائي لهيدروكسيد الصوديوم ($Na^{+}_{(aq)} + HO^{-}_{(aq)}$) تركيزه المولي الحجمي $C_b = 5,0\times10^{-2}\,mol.L^{-1}$ ، ناخذ منه حجما $V_b = 10mL$ ونسكبه في بيشر يحتوي على حجم $V_a = 30mL$ من محلول مائي لحمض الإيثانويك $CH_3COOH_{(aq)}$ تركيزه المولي الحجمي $C_a = 1,0\times10^{-3}\,mol.L^{-1}$ ، نقوم برج المزيج ونقيس قيمة pH له.

1/ اكتب المعادلة المنمذجة للتفاعل حمض/أساس الحادث.

2/ أعط جدول التقدم لهذا التحول الكيميائي باعتباره تاما.

3/ حدد المتفاعل المحد، واستنتج قيمة التقدم النهائي لهذا التفاعل.

4/ احسب قيمة كسر التفاعل عند التوازن ($Q_{r,eq}$).

5/ احسب قيمة pH للمزيج الناتج علما بان :

$Pk_a(CH_3COOH_{aq} / CH_3COO^{-}_{aq}) = 4,75$ ، $Pk_e = 14$.

الحل

1/ كتابة المعادلة المنمذجة للتفاعل حمض/أساس

$$CH_3COOH_{(aq)} + (Na^{+}_{(aq)} + HO^{-}_{(aq)}) = CH_3COO^{-}_{(aq)} + Na^{+}_{(aq)} + H_2O_{(l)}$$

2/ جدول التقدم

بما أن $Na^{+}_{(aq)}$ شاردة غير فعالة، لذا يمكن عدم إظهارها في معادلة التفاعل، وهنا في جدول التقدم.

$$CH_3COOH_{(aq)} + HO^{-}_{(aq)} = CH_3COO^{-}_{(aq)} + H_2O_{(l)}$$

الحالة الابتدائية	التقدم $X=0$	$n_{0a} = C_aV_a$	$n_{0b} = C_bV_b$	$0mol$	بزيادة
الحالة النهائية	X_f	$C_aV_a - X_f$	$C_bV_b - X_f$	X_f	بزيادة

3/ تحديد المتفاعل المحد

نقارن بين n_{0a} و n_{0b} لأن المعاملات الستيكيومترية متساوية.

لدينا $n_{0a} = C_aV_a = 10^{-3}\times30\times10^{-3}$ إذن $\boxed{n_{0a} = 3\times10^{-5}\,mol}$

كما ان $n_{0b} = C_bV_b = 5\times10^{-2}\times10\times10^{-3}$ إذن $\boxed{n_{0b} = 5\times10^{-4}\,mol}$

نلاحظ ان $n_{0b} > n_{0a}$ ، فالمتفاعل المحد هو الذي كمية مادته اصغر، الا وهو الحمض الكربوكسيلي $CH_3COOH_{(aq)}$.

استنتاج قيمة التقدم النهائي X_f

نضع $C_aV_a - X_f = 0$ إذن $X_f = C_aV_a$ اي $\boxed{X_f = n_{0a} = 3\times10^{-5}\,mol}$

قيمة Tf

4/ قيمة كسر التفاعل عند التوازن $Q_{r,éq}$

لدينا $$Q_{r,éq} = \frac{[CH_3COO^{-}_{(aq)}]_{éq}}{[CH_3COOH_{(aq)}][HO^{-}_{(aq)}]_{éq}}$$

نضرب البسط والمقام لهذا الكسر بـ $[H_3O^{+}_{(aq)}]_{éq}$ حتى نظهر k_A و k_e

إذن $$Q_{r,éq} = \frac{[CH_3COO^{-}_{(aq)}]_{éq}\times[H_3O^{+}_{(aq)}]_{eq}}{[CH_3COOH_{(aq)}][HO^{-}_{(aq)}]_{éq}} \times \frac{1}{[HO^{-}_{(aq)}]_{éq}[H_3O^{+}_{(aq)}]_{éq}}$$

$$Q_{r,éq} = k_A \times \frac{1}{k_e} = \frac{k_A}{k_e} = \frac{10^{-Pk_A}}{10^{-14}}$$

نعوض بـ $Pk_A = 4,75$ فنجد $Q_{r,éq} = \frac{10^{-4,75}}{10^{-14}}$ إذن $\boxed{Q_{r,éq} = 10^{+9,25} = 1,78\times10^{+9}}$

5/ حساب قيمة pH المزيج عند التوازن

نعلم أن $pH = -Log[H_3O^{+}]$ لذا يجب حساب $[H_3O^{+}]$ ، وقبل ذلك نحسب $[HO^{-}]$ ،

فمن جدول التقدم لدينا ، كمية المادة لـ HO^{-} عند التوازن هي $n_{HO^-} = C_bV_b - X_f$

ومن المعلوم أن تركيز HO^{-} هو $$[HO^{-}] = \frac{n_{HO^-}}{V_{\text{المحلول}}} = \frac{C_bV_b - x_f}{V_a + V_b}$$

نعوض فنجد $[HO^{-}] = \frac{5\times10^{-4} - 3\times10^{-5}}{(30+10)10^{-3}}$ ومنه $\boxed{[HO^{-}] \approx 1,18\times10^{-2}\,mol.L^{-1}}$

نحسب الآن $[H_3O^{+}]$ عن طريق الجداء الشاردي للماء :

$$[H_3O^{+}] = \frac{k_e}{[HO^{-}]} = \frac{10^{-14}}{1,18\times10^{-2}} = 8,5\times10^{-13}\,mol.L^{-1}$$

إذن $pH = -Log[H_3O^{+}] = -Log 8,5\times10^{-13}$ $\boxed{pH = 12}$

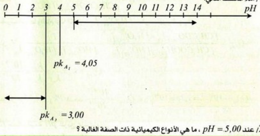
التمرين 9

ينحل في بيشر به ماء قرص من فيتامين C وهو عبارة عن حمض الأسكوربيك $C_6H_8O_6$ رمزه A_1H ونضيف قرصا من الأسبرين الذي يحتوي على حمض الأسيتيساليسيك $C_6H_4OHCOOH$ رمزه A_2H .

يقاس pH المحلول الناتج فنجد $pH = 5,00$.

يعطى: $pk_{A_1}(A_1H_{(aq)} / A^-_{1(aq)}) = 4,05$ ، $pk_{A_2}(A_2H_{(aq)} / A^-_{2(aq)}) = 3,00$

1/ املأ المخطط التالي.



2/ عند $pH = 5,00$ ، ما هي الأنواع الكيميائية ذات الصفة الغالبة ؟

الحل

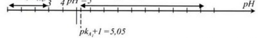
تذكرة

في المجال $pH < Pk_A - 1$ يكون الحمض $AH_{(aq)}$ له الصفة الغالبة.

أما في المجال $pH > Pk_A + 1$ فالأساس المرافق $A^-_{(aq)}$ هو الذي له الصفة الغالبة.

حمض الأسكوربيك $C_6H_8O_6$ رمزه $A_1H_{(aq)}$ وأساسه المرافق A_1^-

لدينا: $Pk_{A_1} + 1 = 4,05 + 1 = 5,05$ ، إذن، في المجال $pH > 5,05$ تكون $A^-_{1(aq)}$ له الصفة الغالبة.



لدينا $Pk_A - 1 = 4,05 - 1 = 3,05$

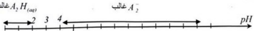
ونلاحظ ان في المجال $pH < 3,05$ الحمض $(A_1H)_{aq}$ هو الغالب.

الأسبيرين الذي نرمز له بـ A_2H

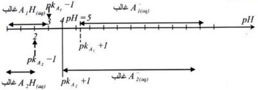
لدينا $Pk_{A_2} = 3,00$ إذن $Pk_{A_2} + 1 = 4$

ابتداء من القيمة $pH > 4$ في سلم الـ pH يكون A_2^- هو الغالب.

$Pk_{A_2} - 1 = 2$ فابتداء من قيم أصغر من القيمة 2 في سلم الـ pH يكون الحمض $(AH)_{aq}$ هو الغالب.



المخطط الكامل



2/ عند القيمة $pH = 5,00$ يكون $A^-_{1(aq)}$ غالبا و $A^-_{2(aq)}$ غالبا.

التمرين 10

نمزج محلول كلور الإيثانويك $CH_2ClCOOH_{(aq)}$ ومحلول النشادر NH_3 . يعطى:

$pk_{A_1}(CH_2ClCOOH_{(aq)} / CH_2ClCOO^-_{(aq)}) = 2,9$ ،

$pk_{A_2}(NH^+_{4(aq)} / NH_{3(aq)}) = 9,2$

املأ العبارات التالية :

أ/ معادلة التفاعل تكتب ......

ب/ ثابت التوازن الكيميائي k للتفاعل يساوي ......

ج/ التفاعل ......

د/ قيمة τ_f هي ......

الحل

أ/ معادلة التفاعل: $CH_2ClCOOH_{(aq)} + NH_{3(aq)} = CH_2ClCOO^-_{(aq)} + NH^+_{4(aq)}$

لاحظ ان NH_3 يلعب دور أساس فيكتسب H^+ من الحمض $CH_2ClCOOH$.

ب/ ثابت التوازن الكيميائي

$$k = Q_{r,eq} = \frac{[NH^+_{4(aq)}]_{eq}[CH_2clCOO^-_{(aq)}]_{eq}}{[NH_{3(aq)}]_{eq}[CH_2clOOH_{(aq)}]_{(eq)}}$$

بالضرب في $[H_3O^+]$ في البسط والمقام نجد :

$$k = \frac{[NH^+_{4(aq)}]_{eq}}{[NH_{3(aq)}]_{eq}[H_3O^+_{(aq)}]_{eq}} \times \frac{[CH_2ClCOO^-_{(aq)}]_{eq}[H_3O^+_{(aq)}]_{eq}}{[CH_2ClCOOH_{(aq)}]_{eq}}$$

لدينا $\frac{[NH^+_{4(aq)}]_{eq}}{[NH_{3(aq)}]_{eq}[H_3O^+_{(aq)}]_{eq}} = \frac{1}{k_{A_2}}$ و $\frac{[CH_2clCOO^-_{(aq)}]_{eq}[H_3O^+_{(aq)}]_{eq}}{[CH_2clCOOH_{(aq)}]_{eq}} = k_{A_1}$

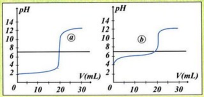
إذن $k = \frac{1}{k_{A_2}} k_{A_1}$ ، $\boxed{k = \frac{k_{A_1}}{k_{A_2}} = \frac{10^{-pk_{A_1}}}{10^{-pk_{A_2}}}}$ ، نعوض فنجد : $k = \frac{10^{-2,9}}{10^{-9,2}}$ إذن $\boxed{k = 2\times10^6}$

ج/ التفاعل شبه تام لأن $k > 10^4$.

د/ قيمة τ_f : بما أن التفاعل شبه تام إذن $\tau_f \approx 1$.

التمرين 11

محلول S_1 لحمض قوي $A_1H_{(aq)}$ تركيزه $C_1 = 10^{-2} mol.L^{-1}$. محلول S_2 لحمض ضعيف $A_2H_{(aq)}$ تركيزه $C_2 = C_1$. بالمعايرة الـ pH – مترية نعاير نفس الحجم V من المحلولين كلاً على حدة بمحلول الصود تركيزه $C_B = 1{,}0 \times 10^{-3} ml.L^{-1}$ ، فنحصل على المنحنيين :



املأ الجمل التالية.

1/ $A_1H_{(aq)}$ حمض قوي معناه ......

$A_2H_{(aq)}$ حمض ضعيف معناه ......

2/ نعين الـ pH_E عند التكافؤ بطريقة ......

عند التكافؤ لدينا : $(pH_E)_a =$ ......

$(pH_E)_b =$ ......

3/ منحني معايرة الحمض $A_1H_{(aq)}$ هو ......

منحنى معايرة الحمض $A_2H_{(aq)}$ هو ......

4/ الحمض القوي يتميز بان ...... $= pH$.

نستنج أن ...... $= C$ ومنه : ...... $= C_1$.

5/ قيمة Pk_A للحمض الضعيف تتعين من ......

ونستنتج أن قيمته ...... $= Pk_A$.

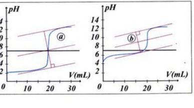
الحل

1/ $A_1H_{(aq)}$ حمض قوي معناه يتفكك كلية في الماء.

$A_2H_{(aq)}$ حمض ضعيف معناه يتفكك جزئيا في الماء.

2/ نعين الـ pH_E عند التكافؤ بطريقة المماسات.

عند التكافؤ لدينا : $(pH_E)_a = 7$ ، $(pH_E)_b = 9$



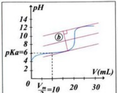
3/ منحني معايرة الحمض $A_1H_{(aq)}$ هو المنحني a ، لأنه حمض قوي، ونعلم أنه عند معايرة حمض قوي بأساس قوي كما هو الحال هنا مثل محلول الصود تكون $pH_E = 7$.

منحني معايرة الحمض $A_2H_{(aq)}$ هو المنحني b ، لأنه حمض ضعيف، ونعلم أنه عند معايرة حمض ضعيف بأساس قوي يكون $pH_E > 7$ ، كما هو الحال في المنحني b الذي وجدنا فيه $pH_E = 9$.

4/ الحمض القوي يتميز بان $pH = -Log\, C$

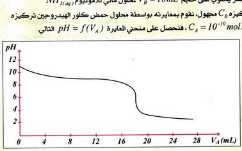
نستنج أن : $C = 10^{-pH}$ ومنه نجد : $C_1 = 10^{-2} mol.L^{-1}$

5/ قيمة Pk_A للحمض الضعيف تتعين من نصف حجم التكافؤ أي $V_{E_{1/2}}$ ، $V_{E_{1/2}} = \frac{20}{2} = 10mL$ ، وعندما ننقل هذه القيمة كما هو موضح في الشكل المقابل نجد أن $Pk_A = 6$.



التمرين 12

في بيشر يحتوي على حجم $V_B = 10mL$ لمحلول مائي للأمونيوم $NH_{3(aq)}$ تركيزه C_B مجهول، نقوم بمعايرته بواسطة محلول حمض كلور الهيدروجين تركيزه $C_A = 10^{-10} mol.L^{-1}$ ، فنحصل على منحنى المعايرة $pH = f(V_A)$ التالي.



1/ اكتب معادلة التفاعل الكيميائي.

2/ احسب الثابت k لهذا التفاعل عند التوازن.

3/ عين بيانيا V_E و PH_E عند نقطة التكافؤ.

4/ تأكد من أن الأساس ضعيف.

5/ ما هي الأنواع الكيميائية ذات الصفة الغالبة في الحالات ، $pH = 2$ ، $pH = 5,2$ ، $pH = 9,2$ ؟

6/ تأكد بيانيا من قيمة Pk_{A_1} المعطاة في نهاية التمرين.

المعطيات ، $Pk_{A_2}(H_3O^+_{(aq)} / H_2O) = 0$ ، $Pk_{A_1}(NH^+_{4(aq)} / NH_{3(aq)}) = 9,2$

$Pk_{A_3}(H_2O / HO^-_{(aq)}) = 14$

الحل

1/ معادلة التفاعل الكيميائي

محلول حمض كلور الهيدروجين هو $(H_3O^+_{(aq)} + Cl^-_{(aq)})$.

محلول النشادر هو $NH_{3(aq)}$.

$$(H_3O^+_{(aq)} + Cl^-_{(aq)}) + NH_{3(aq)} = NH^+_{4(aq)} + H_2O_{(aq)} + Cl^-_{(aq)}$$

ملاحظة : بما أن $Cl^-_{(aq)}$ هي شاردة غير فعالة، لذا يجوز لنا عدم إظهارها في المعادلة، فنكتب من جديد ،

$$H_3O^+_{(aq)} + NH_{3(aq)} = NH^+_{4(aq)} + H_2O_{(l)}$$

2/ حساب ثابت التوازن الكيميائي k للتفاعل

$$k = \frac{[NH^+_{4(aq)}]_{eq} \times [H_2O]_{eq}}{[NH_{3(aq)}]_{eq} \times [H_3O^+_{(aq)}]_{eq}}$$ ونضع $[H_2O]_{eq} = 1$

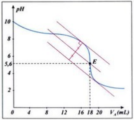
فينتج $$k = \frac{[NH^+_{4(aq)}]_{eq}}{[NH_{3(aq)}]_{eq}[H_3O^+_{(aq)}]_{eq}} = \frac{1}{k_{A_1}}$$

نعوض فنجد ، $k = \frac{1}{k_{A_1}} = \frac{1}{10^{-Pk_{A_1}}}$; $k = 10^{Pk_{A_1}}$; $\boxed{k = 10^{9,2} = 1,58 \times 10^9}$

3/ تعيين إحداثيي نقطة التكافؤ E ، وهما V_E و pH_E

باستعمال طريقة المماسات كما هو موضح في الشكل المقابل نجد ،

$E(pH_E = 5,6 \; ; V_E = 18mL)$



4/ بما أن $pH_E < 7$ فهذا يعني أن التفاعل تم بين حمض قوي وأساس ضعيف.

5/ الأنواع الكيميائية ذات الصفة الغالبة

• نعلم أنه إذا كان $pH < Pk_A - 1$ فإن الصفة الغالبة تكون للحمض $AH_{(aq)}$ لا لأساسه المرافق $A^-_{(aq)}$ ، من الثنائية $AH_{(aq)} / A^-_{(aq)}$.

• أما إذا كان $pH > Pk_A + 1$ فإن الصفة الغالبة تكون لـ $A^-_{(aq)}$.

وفي حالة التساوي $pH = Pk_A$ يكون $[AH_{(aq)}] = [A^-_{(aq)}]$.

• في حالة $pH = 2$ ندرس الصفة الغالبة للثنائية $NH^+_{4(aq)} / NH_{3(aq)}$

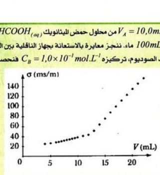
نلاحظ ان $Pk_{A_1} - 1 = 9,2 - 1$ إذن $Pk_{A_1} - 1 = 8,2$ ومنه $pH < Pk_{A_1} - 1$ فالصفة الغالبة تكون للحمض $NH^+_{4(aq)}$ بمعنى $[NH_{3(aq)}] > [NH^+_{4(aq)}]$.

- في حالة $pH = 5,2$ نلاحظ ايضا ان $pH = 5,2 < Pk_{A_1} - 1 = 4,2$ فالصفة الغالبة تكون للحمض $NH^+_{4(aq)}$.
- في حالة $pH = 9,2$ نلاحظ ان $pH = Pk_{A_1}$، إذن $[NH_{3(aq)}] = [H_3O^+_{(aq)}]$.

6/ من نصف حجم التكافؤ، $V_{E_{1/2}} = \frac{18}{2} = 9mL$، ننقله في البيان لنجد، $\boxed{pH = Pk_{A_1} = 9,2}$

التمرين 13

يوضع في بيشر حجم $V_A = 10,0mL$ من محلول حمض الميثانويك $HCOOH_{(aq)}$ تركيزه C_A. نضيف لمحتوى البيشر $100mL$ ماء. ننجز معايرة بالاستعانة بجهاز الناقلية بين الحمض المذكور ومحلول هيدروكسيد الصوديوم، تركيزه $C_B = 1,0 \times 10^{-1} mol.L^{-1}$ فنحصل على البيان:



معطيات: $Pk_{A_1}(HCOOH_{(aq)} / HCOO^-_{(aq)}) = 3,8$، $Pk_{A_2}(H_2O / HO^-_{(aq)}) = 14$.

الشاردة	$H_3O^+_{(aq)}$	$HO^-_{(aq)}$	$HCOO^-_{(aq)}$	$Na^+_{(aq)}$
$\lambda (ms.m^2.mol^{-1})$	35,0	19,9	5,46	5,01

1/ اكتب معادلة التفاعل الحادث في المعايرة.

2/أ/ احسب ثابت التوازن k للتفاعل.
ب/ ماذا تقول عن هذا التفاعل؟

3/ لماذا اجرينا تفاعل المعايرة بالناقلية؟

4/ اعط عبارة الناقلية النوعية σ اثناء المعايرة.

5/ أنشئ جدول التقدم.

6/ عرف التكافؤ، واستنتج عبارة الناقلية σ_E عند التكافؤ.

7/ حدد بيانيا إحداثيي نقطة التكافؤ (V_{BE}, σ_E).

8/ احسب التركيز C_A للمحلول الحمضي.

9/ بالاستعانة بعبارة σ_E، جد حسابيا قيمة σ_E.

الحل

1/ معادلة التفاعل الحادث

$$HCOOH_{(aq)} + (Na^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)}) = HCOO^-_{(aq)} + Na^+_{(aq)} + H_2O_{(l)}$$

2/أ/ ثابت التوازن k

شاردة $Na^+_{(aq)}$ لم تتفاعل لذا يمكن حذفها من طرفي المعادلة فلا ندخلها في ثابت التوازن الكيميائي k.

وحسب التعريف لدينا، $k = \frac{[HCOO^-_{(aq)}]_{eq}}{[HCOOH_{(aq)}]_{eq}[HO^-_{(aq)}]_{eq}}$

لكي نظهر k_{A_1}، k_{A_2} ويجب الضرب في البسط والمقام بـ $[H_3O^+]$

إذن، $k = \frac{[HCOO^-_{(aq)}]_{eq}[H_3O^+_{(aq)}]_{eq}}{[HCOOH_{(aq)}]_{eq}} \times \frac{1}{[H_3O^+_{(aq)}][HO^-_{(aq)}]_{eq}}$

$\frac{[HCOO^-_{(aq)}]_{eq}[H_3O^+_{(aq)}]_{eq}}{[HCOOH_{(aq)}]_{eq}} = k_{A_1}$ ومنه، $\frac{1}{[H_3O^+_{(aq)}][HO^-_{(aq)}]_{eq}} = \frac{1}{k_{A_2}}$

إذن، $k = \frac{k_{A_1}}{k_{A_2}} = \frac{10^{-Pk_{A_1}}}{10^{-Pk_{A_2}}} = 10^{(Pk_{A_2} - Pk_{A_1})} = 10^{14-3,8}$ $\boxed{k = 10^{10,2} = 1,6 \times 10^{10}}$

ب/ هذا التفاعل شبه تام لأن $k > 10^4$

3/ نجري تفاعل المعايرة بالناقلية لأن المتفاعلات والنواتج بها شوارد يمكن بواسطة جهاز الناقلية قياس قيمة ناقليتها G، وبالتالي ناقليتها النوعية σ.

4/ عبارة الناقلية النوعية σ

نستعمل قانون كولروش، $\sigma_i = \sum \lambda_i [x_i]$

إذن، $\sigma = \lambda_{HCOO^-}[HCOO^-] + \lambda_{Na^+}[Na^+] + \lambda_{HO^-}[HO^-]$

5/ جدول التقدم

المعادلة	$HCOOH_{(aq)}$	+	$HO^-_{(aq)}$	=	$HCOO^-_{(aq)}$	+	$H_2O_{(l)}$
الحالة الابتدائية	C_AV_A		C_BV_B		$0\,mol$		بزيادة
الحالة النهائية	$C_AV_A-X_f$		$C_BV_B-X_f$		X_f		بزيادة

6/ تعريف التكافؤ

التكافؤ هو حالة كيميائية يتم فيها استهلاك كل المتفاعلات من محاليل مُعايرة (*Titrant*) ومحاليل مُعايرة (*Titré*).

عبارة الناقلية σ_E عند التكافؤ

عند التكافؤ يستهلك كل من $HCOOH_{(aq)}$ و $HO^-_{(aq)}$

إذن $C_AV_A - X_f = 0$ اي $n(HCOOH_{(aq)}) = 0\,mol$

وكذلك $C_BV_B - X_f = 0$ إذن $n(HO^-_{(aq)}) = 0\,mol$

وهذا يؤدي إلى وضع $[OH^-] = 0\,mol$ في عبارة σ السابقة.

إذن نكتب $\sigma = \sigma_E = \lambda_{HCOO^-}[HCOO^-] + \lambda_{Na^+}[Na^+] + 0$

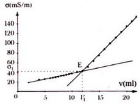
لكن $[HCOO^-] = \frac{X_f}{V}$ مع $V = V_A + V_{B(E)}$

وكذلك $X_f = C_AV_{A(E)}$ أو $X_f = C_BV_{B(E)}$

إذن $[HCOO^-] = \frac{C_BV_{B(E)}}{V_A + V_{B(E)}}$

نعوض في عبارة σ_E فنجد : $\boxed{\sigma_E = (\lambda_{HCOO^-} + \lambda_{Na^+})\frac{C_BV_{B(E)}}{V_A + V_{B(E)}}}$

7/ التحديد البياني لإحداثيي نقطة التكافؤ $(V_{B(E)}, \sigma_E)$



من نقطة التقاطع نجد $V_{B(E)} \approx 12,5\,mL$ و $\sigma_E \approx 44\,ms.m^{-1}$

8/ حساب التركيز C_A للمحلول الحمضي

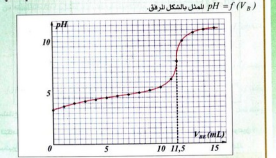
عند التكافؤ يتحقق $n(HCOOH_{(aq)}) = n(HO^-_{(aq)})$

إذن $C_AV_A - X_f = C_BV_B - X_f$ ومنه $C_AV_A = C_BV_{B(E)}$ إذن $\boxed{C_A = \frac{C_BV_{B(E)}}{V_A}}$

$C_A = \frac{1,0\times10^{-1}\times12,5\times10^{-3}}{10\times10^{-3}}$; $\boxed{C_A = 1,25\times10^{-1}\,mol.L^{-1}}$

التمرين 14

نضع في بيشر حجما $V_A = 10,0\,mL$ من محلول حمض الإيثانويك CH_3COOH تركيزه C_A مجهول. يفرغ في السحاحة محلول الصود $(Na^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)})$ تركيزه $C_B = 0,100\,mol.L^{-1}$. نبدأ عملية المعايرة الـ pH - مترية، فنحصل على المنحني البياني $pH = f(V_B)$ الممثل بالشكل المرفق.



1/ اكتب معادلة تفاعل المعايرة الحادث بين الحمض والأساس.

2/ عين إحداثيي نقطة التكافؤ، وبين أن حمض الإيثانويك هو حمض ضعيف.

3/ استنتج تركيز الحمض C_A.

4/ أنشئ جدول التقدم، وعين تقدم التفاعل الأعظمي X_{max} والنهائي X_f عند $pH = 5,5$.

5/ احسب نسبة التقدم τ_f، ماذا تستنتج ؟

6/ عين Pk_A الثنائية اساس/حمض $CH_3COOH_{(aq)} / CH_3COO^-_{(aq)}$.

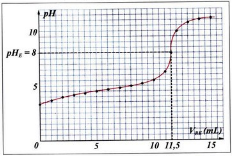
الحل

1/ معادلة تفاعل المعايرة

$$HCOOH_{(aq)} + (Na^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)}) = HCOO^-_{(aq)} + Na^+_{(aq)} + H_2O_{(l)}$$

2/ تعيين إحداثيي نقطة التكافؤ

باستعمال طريقة المماسات، كما هو موضح بالشكل المقابل، نعين نقطة التكافؤ E، ومن ثم نجد إحداثيها وهما $E\begin{pmatrix} V_{BE} = 11,5\ mL \\ pH_E = 8 \end{pmatrix}$. وبما أن $pH_E > 7$، فهذا يعني أن التفاعل تم بين حمض ضعيف وأساس قوي. فنستنتج عندئذ أن حمض الإيثانويك ضعيف.



3/ استنتاج تركيز الحمض C_A

عند التكافؤ يتحقق $\boxed{C_AV_A = C_BV_{B(E)}}$ بهذه العلاقة تكون بهذا الشكل في حالة أن النوعين الكيميائيين HO^- و CH_3COOH المتفاعلين لهما نفس العدد الستيكيومتري (انظر المعادلة الكيميائية لتجد أن العدد الستيكيومتري هو 1 لكلا النوعين الكيميائيين). إذن $\boxed{C_A = \dfrac{C_BV_{B(E)}}{V_A}}$ ،

نعوض فنجد ، $C_A = \dfrac{0,100 \times 11,5}{10}$; $C_A = 0,115\ mol.L^{-1}$

4/ جدول التقدم عند $pH = 5,5$

إذا نظرنا إلى البيان نجد أنه عند $pH = 5,5$ يكون $V_B = 10\ mL$.

لنحسب كميات المادة الابتدائية n_0 لكل من الحمض والأساس.

$$n_{0A} = C_AV_A = 0,115 \times 10^{-2} = 1,15 \times 10^{-3}\ mol$$

$$n_{0B} = C_BV_B = 0,100 \times 10^{-2} = 10^{-3}\ mol$$

ننشئ جدول التقدم :

المعادلة	$HCOOH_{(aq)}$	+ $HO^-_{(aq)}$ =	$HCOO^-_{(aq)}$	$+H_2O_{(l)}$
الحالة الابتدائية	$n_{0A} = 1,15 \times 10^{-3}\ mol$	$n_{0B} = 10^{-3}\ mol$	$0\ mol$	بزيادة
الحالة النهائية	$1,15 \times 10^{-3} - X_f$	$10^{-3} - X_f$	X_f	بزيادة

التقدم الأعظمي X_{max} للتفاعل

المتفاعل المحد هو HO^- وعليه نكتب، $X_{max} = n_0(HO^-) = n_{0B} = 10^{-3}\ mol$

$$\boxed{X_{max} = 10^{-3}\ mol}$$

التقدم النهائي X_f للتفاعل

لاحظ أن X_f موجود في جميع الخانات، وبما أننا نستطيع تعيين تركيز HO^-، لذا نعينه من التركيز $[HO^-]$ كما يلي، $[HO^-] = \dfrac{10^{-3} - X_f}{V}$ مع $V = V_A + V_B$

إذن، $10^{-3} - X_f = [HO^-](V_A + V_B)$ .....*

ونعلم أنه من الجداء الشاردي للماء يمكن أن نكتب، $[HO^-] = \dfrac{10^{-14}}{[H_3O^+]}$

كما أن $[H_3O^+] = 10^{-pH}$ ، إذن $[H_3O^+] = 10^{-5,5} = 3,2 \times 10^{-6}\ mol.L^{-1}$

ومنه نجد، $[HO^-] = \dfrac{10^{-14}}{3,2 \times 10^{-6}}$ إذن $[HO^-] = 3,2 \times 10^{-9}\ mol.L^{-1}$

في الأخير نحسب X_f من العبارة * ،

$$10^{-3} - X_f = 3,2 \times 10^{-9}(10 + 10) \times 10^{-3} = 6,4 \times 10^{-11}\ mol$$

ومنه نجد، $X_f = 10^{-3} - 6,4 \times 10^{-11}\ mol$ ، $\boxed{x_f = 10^{-3}\ mol.L^{-1}}$

لاحظ أن $X_f \approx X_{max} = 10^{-3}\ mol.L^{-1}$

5/ حساب نسبة التقدم النهائي للتفاعل

لدينا $\tau_f = \dfrac{X_f}{X_{max}}$، نعوض فنجد $\tau_f = \dfrac{10^{-3}}{10^{-3}} = 1$ أي $\boxed{\tau_f = 1}$

- نستنتج أن التحول الكيميائي تام.
- المتفاعل المحد هو المتفاعل المعاير حتى الوصول إلى نقطة التكافؤ E .

• تفاعل المعايرة يحدث بنسب ستكيومترية بين المتفاعلات.

6/ تعيين Pk_A للثنائية $CH_3COOH_{(aq)} / CH_3COO^-_{(aq)}$

Pk_A هي ترتيبة النقطة من البيان التي فاصلتها $\frac{V_{B(E)}}{2} = \frac{11,5}{2} = 5,75\ mL$

كما هو موضح في البيان السابق ، $\boxed{Pk_A = 4,7}$

التمرين 15

إن التحول الكيميائي الحادث عند تفاعل شوارد اليود $(I^-_{(aq)})$ المتواجدة في المركب KI مع الماء الأكسجيني H_2O_2 (بيروكسيد الهيدروجين) في وسط حمضي $(H^+_{(aq)})$ مثل حمض الكبريت $(2H^+ + SO_4^{2-})$ ، يؤدي إلى تشكيل ثنائي اليود I_2 ، الذي يتراوح تغيره اللوني من الأصفر إلى الأسمر، حسب تغير تركيزه.

ينمذج هذا التحول الكيميائي بمعادلة التفاعل :

$$H_2O_{2(aq)} + 2I^-_{(aq)} + 2H^+_{(aq)} = I_{2(aq)} + 2H_2O_{(l)}$$

1/ ما هي المصطلحات التي ذكرت، وتدل على أن هذا التفاعل بطيئ ؟

2/أ/ حدد الثنائيتين (مرجع/مؤكسد) الداخلتين في التفاعل.

ب/ اكتب المعادلة النصفية الإلكترونية لكل ثنائية.

3/ هذا التحول الكيميائي، يمكن متابعته عن طريق الناقلية. كيف ذلك ؟

4/أ/ هذا التحول الكيميائي يمكن أيضا متابعته عن طريق المعايرة الـ $pH-$ مترية. كيف ذلك ؟

ب/ بين فيما إذا نقصت قيمة الـ pH أو زادت بتطور التفاعل.

5/ نجري تجربة للتفاعل السابق بأخذ المقادير التالية :

الماء الأكسجيني : حجمه 10mL وتركيزه 0,10mol / L

يود البوتاسيوم : حجمه 10mL وتركيزه 0,30mol / L

حمض الكبريت $(2H^+_{(aq)} + SO^{2-}_{4(aq)})$: حجمه $5\ mL$ وتركيزه $1,0\ mol.L^{-1}$

أ/ أنشئ جدول التقدم.   ب/ ما هو المتفاعل المحد ؟   ج/ احسب التركيز النهائي لثنائي اليود.

الحل

1/ المصطلحات التي ذكرت وتدل على أن هذا التفاعل بطيئ هي :

حدوث تغير لوني لثنائي اليود (I_2) من الأصفر إلى الأسمر، حسب تركيزه وهذا يعني أنه لدينا الوقت الكافي لمراقبة هذا التغير، وبالتالي فالتفاعل بطئ.

2/أ/ الثنائيتان مر/مؤ (أو Ox / Red) هما ، H_2O_2 / H_2O , I_2 / I^-

ملاحظات هامة

يمكن تحديد الثنائية مر/مؤ باعتبارهما فردين كيميائيين متشابهين تقريبا في الصيغة الكيميائية،

فمثلا I_2 يشبه I^- فهما يشكلان نفس الثنائية.

أما H_2O_2 فهو يشبه H_2O لذا فهما يشكلان نفس الثنائية.

- المؤكسد : يكتب في الثنائية دوما على اليسار.
- المرجع : يكتب في الثنائية دوما على اليمين.
- إذا لم نستطع التمييز بين المؤكسد والمرجع، نكتب المعادلة النصفية الإلكترونية لكل منهما،

مع الانتباه إلى أن : المؤكسد $\xrightarrow{\text{يكتسب الإلكترونات}}$ والتفاعل الذي يقوم به تفاعل إرجاع.

المرجع $\xrightarrow{\text{يفقد الإلكترونات}}$ والتفاعل الذي يقوم به تفاعل أكسدة.

المعادلتان النصفيتان الإلكترونيتان للثنائيتين مر/مؤ

$$H_2O_{2(aq)} + 2H^+_{(aq)} + 2e^- = H_2O_{(l)} + H_2O_{(l)} + H_2O_{(l)}$$
$$2I^-_{aq} \qquad = I_{2_{(aq)}} + 2e^-$$

ملاحظة

لاحظ أن H_2O_2 اكتسب $2e^-$ فهو المؤكسد، وبالتالي H_2O يكون هو المرجع. أما I^- فهو المرجع لأنه فقد $2e^-$ وبالتالي (I_2) هو المؤكسد. ولو جمعنا المعادلتين السابقتين طرفا لطرف لحصلنا على معادلة الأكسدة الإرجاعية المعطاة في نص التمرين.

3/ يمكن متابعة تطور هذا التحول الكيميائي عن طريق قياس الناقلية G لشوارده فهو يحتوي على الشوارد $I^-_{(aq)}$ و $H^+_{(aq)}$ الداخلة في التفاعل بالإضافة إلى الشوارد غير الداخلة في التفاعل مثل $K^+_{(aq)}$ و $SO^{2-}_{4(aq)}$ ، ومن ثم نستطيع تعيين تركيز $[I_{2(aq)}]$.

4/أ/ هذا التحول الكيميائي يتم في وسط حمضي $(H^+_{(aq)})$ ، وهذه الشوارد تتناقص بتطور التفاعل في الزمن.

ب/ قيمة pH لهذا المحلول تزداد بمرور الزمن لأن الشوارد $H^+_{(aq)}$ تتناقص.

5/أ/ جدول التقدم

نعين في البداية التركيب الابتدائي للمزيج :

كمية مادة H_2O_2 ، $n_{H_2O_2} = C_1V_1 = 0,1 \times 10^{-2} = 10^{-3}\ mol$

$$n_{H_2O_2} = 10^{-3}\ mol$$

كمية مادة I^-

لدينا ، $n_{I^-} = [I^-_{(aq)}] \times V_2$

لاحظ أن تركيز يود البوتاسيوم $(K^+ + I^-_{(aq)})$ هو $C_2 = 0,30\,mol.L^{-1}$

وبما أن العدد الستيكيومتري لـ I^- في المركب $(K^+_{(aq)} + I^-_{(aq)})$ هو 1 ، إذن $[I^-_{aq}] = C_2$

ومنه $n_{I^-} = C_2V_2$ إذن $n_{I^-} = 3\times10^{-3}\,mol$

كمية مادة H^+

لدينا $n_{H^+} = [H^+_{(aq)}]V_3$.

لاحظ أن تركيز حمض الكبريت $(2H^+_{aq} + SO^{2-}_{4(aq)})$ هو $C_3 = 1,0\,mol.L^{-1}$

وبما أن العدد الستيكيومتري لـ H^+ في المركب هو 2 ، إذن $[H^+_{(aq)}] = 2C_3$

أما $[SO^{2-}_{4(aq)}] = 1\times C_3$ لأن العدد الستيكيومتري لـ SO_4^{2-} هو 1 .

ومنه نحسب $n_{H^+} = 2C_3V_3$ إذن $n_{H^+} = 2\times1,0\times5\times10^{-3}$ ومنه $\boxed{n_{H^+} = 10^{-2}\,mol}$

ننشئ جدول التقدم :

المعادلة	$H_2O_{2(aq)}$	$+2I^-_{(aq)}$	$+2H^+_{aq}$	$=2H_2O_{(l)}$	$+I_{2(aq)}$
الحالة الابتدائية	$n_1=10^{-3}\,mol$	$n_2=3\times10^{-3}\,mol$	$n_3=10^{-2}\,mol$	بزيادة	$0\,mol$
الحالة الانتقالية	$10^{-3}-2X$	$3\times10^{-3}-2X$	$10^{-2}-2X$	بزيادة	X
الحالة النهائية	$10^{-3}-X_f$	$3\times10^{-3}-X_f$	$10^{-2}-X_f$	بزيادة	X_f

ب/ المتفاعل المحد

هو الذي يستهلك تماما في التفاعل، اي يبقى منه $0\,mol$. فكيف نحصل عليه من جدول التقدم ؟

ننظر خانات الحالة النهائية من جدول التقدم ونبحث عن الفرد الكيميائي الذي يعطي أصغر قيمة لـ X_f .

• فإذا افترضنا على سبيل المثال أن $H^+_{(aq)}$ هو المتفاعل المحد، لوضعنا $10^{-2} - 2X_f = 0$ وبالتالي ، $X_f = 5\times10^{-3}\,mol$

• وإذا افترضنا أن $I^-_{(aq)}$ هو المتفاعل المحد لوضعنا $3\times10^{-3} - 2X_f = 0$ ، ومنه نجد ، $X_f = 1,5\times10^{-3}\,mol$

• وإذا افترضنا أن $H_2O_{2(aq)}$ هو المتفاعل المحد، لوضعنا $10^{-3} - 2X_f = 0$

ومنه نجد $\boxed{X_f = 10^{-3}\,mol}$ وهي أصغر قيمة وجدناها لـ X_f . فالمتفاعل المحد هو $H_2O_{2(aq)}$

ج/ حساب التركيز النهائي لثنائي اليود I_2

من جدول التقدم نكتب $[I_2]_f = \frac{X_f}{V}$ حيث V الحجم الكلي للمحلول ، $V = V_1 + V_2 + V_3$

إذن ، $[I_2]_f = \frac{10^{-3}}{(10+10+5)\times10^{-3}} = \frac{1}{25}$ وأخيرا ، $\boxed{[I_2]_f = 4\times10^{-2}\,mol.L^{-1}}$

التمرين 16 (تمرين تجريبي)

I/ إن الناقلية النوعية σ لـ $20mL$ من محلول حمض البنزويك C_6H_5COOH ، الذي تركيزه $C_A = 1,0\times10^{-2}\,mol.L^{-1}$ ، تعطى بالقيمة $\sigma = 3,0\times10^{-2}\,s.m^{-1}$.

1/ اكتب معادلة انحلال الحمض بالماء.

2/ انشئ جدول التقدم.

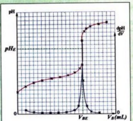
3/ احسب تراكيز الأنواع الكيميائية الناتجة، انطلاقا من σ .

4/ احسب التقدم النهائي للتفاعل τ_f عند التوازن.

يعطى ، $\lambda_{C_6H_5COO^-} = 3,23\times10^{-3}\,s.m^2.mol^{-1}$ ، $\lambda_{H_3O^+} = 34,9\times10^{-3}\,s.m^2.mol^{-1}$.

II/ نقوم بمعايرة $20mL$ من حمض البنزويك السابق بمحلول الصود $(Na^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)})$

الذي تركيزه C_B ، فنحصل على البيانين $pH = f(V_B)$ و $\frac{dpH}{dV_B} = g(V_B)$ الممثلين بالشكل المقابل.



1/ صف التركيب التجريبي المستعمل، وكذا البروتوكول التجريبي المتبع.

2/ اكتب معادلة تفاعل معايرة حمض البنزويك بالصود.

3/أ/ حدد إحداثيي نقطة التكافؤ E ، وبين أن حمض البنزويك ضعيف.

ب/ استنتج تركيز محلول الصود C_B ، وأيضا قيمة pKa للثنائية أساس/حمض ، $C_6H_5COOH_{(aq)} / C_6H_5COO^-_{(aq)}$.

4/ يمكن إجراء هذه المعايرة بالتغير اللوني، باستعمال الكواشف الملونة. من بين الكواشف التالية، حدد الكاشف المناسب للمعايرة.

هليانتين $3,1 \le pH \le 4,4$ ، احمر الفينول $6,8 \le pH \le 8,4$

أزرق البروموتيمول $6,0 \le pH \le 7,6$ ، الفينولفتالين $8,2 \le pH \le 10,0$.

5/ كيف نتأكد من أن $\frac{dpH}{dV_B} = g(V_B)$ هي دالة المشتق للدالة $pH = f(V_B)$ ؟

مساعدة : احسب ميل الدالة الأصلية $\frac{\Delta pH}{\Delta V_B}$ في بعض النقاط، ولتكن $V_1 = 15mL$ ، $V_2 = 16mL$ ، $V_3 = 20mL$ ، وقارنها بالقيم المساوية لها في منحنى دالة المشتق.

الحل

I/ 1/ معادلة انحلال حمض البنزويك بالماء

$$C_6H_5COOH_{(aq)} + H_2O_{(l)} = C_6H_5COO^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$$

2/ جدول التقدم

المعادلة	$C_6H_5COOH_{(aq)}$ +	$H_2O_{(l)}$ =	$C_6H_5COO^-_{(aq)}$ +	$H_3O^+_{(aq)}$
الحالة الابتدائية	$C_AV_A = 2\times10^{-4}\,mol$	بزيادة	$0mol$	$0mol$
الحالة النهائية	$C_AV_A - X_f$	بزيادة	X_f	X_f

3/ حساب تراكيز الأنواع الكيميائية الناتجة انطلاقا من σ

الأنواع الكيميائية الناتجة هي $C_6H_5COO^-_{(aq)}$ و $H_3O^+_{(aq)}$

ملاحظة هامة : إن وجود النوع $H_3O^+_{(aq)}$ يستلزم وجود النوع $HO^-_{(aq)}$، والعكس صحيح ولو لم يظهر أحدهما في معادلة التفاعل، غير أنه يمكن إهمال $[HO^-_{(aq)}]$ لأن النوع $HO^-_{(aq)}$ متواجد بأعداد مهملة أمام عدد النوعين الكيميائيين المتواجدين في المعادلة، وهما $C_6H_5COO^-_{(aq)}$ و $H_3O^+_{(aq)}$.

من قانون كولروش لدينا : $\sigma_i = \sum \lambda_i [x_i]$

$$\sigma = \lambda_{C_6H_5COO^-}[C_6H_5COO^-_{aq}]_{eq} + \lambda_{H_3O^+}[H_3O^+_{aq}]_{eq} ......(*)$$

من جدول التقدم لدينا : $[H_3O^+] = \dfrac{X_f}{V}$ وايضا : $[C_6H_5OO^-]_{eq} = \dfrac{X_f}{V}$

إذن : $[C_6H_5OO^-]_{eq} = [H_3O^+]_{eq}$

نعوض في العبارة (*) : $\sigma = [H_3O^+_{aq}]_{eq}(\lambda_{C_6H_5COO^-} + \lambda_{H_3O^+})$

ومنه نجد : $\boxed{[H_3O^+_{aq}]_{eq} = \dfrac{\sigma}{(\lambda_{C_6H_5COO^-} + \lambda_{H_3O^+})}}$

بالتعويض نجد : $[H_3O^+]_{eq} = \dfrac{3,0\times10^{-2}}{(34,9+3,23)\times10^{-3}} = 7,9\times10^{-1}\,mol.m^{-3}$

نحول : $[H_3O^+]_{eq} = [C_6H_5OO^-]_{eq} = 7,9\times10^{-4}\,mol.L^{-1}$

4/ حساب نسبة التقدم النهائي للتفاعل τ_f

نعلم أن $\tau_f = \dfrac{X_f}{X_{max}}$

نحسب X_f انطلاقا من $[H_3O^+]_{eq}$.

لدينا : $[H_3O^+]_{eq} = \dfrac{X_f}{V}$ ومنه : $X_f = [H_3O^+]_{eq}\times V$

نعوض : $X_f = 7,9\times10^{-4}\times20\times10^{-3}$ ، اي : $X_f = 1,58\times10^{-5}\,mol$

نحسب X_{max} ، لدينا $X_{max} = C_AV_A = 2\times10^{-4}\,mol$

وفي الأخير نعوض في عبارة τ_f فنجد : $\tau_f = \dfrac{1,58\times10^{-5}}{2\times10^{-4}} = 7,9\times10^{-2} \approx 8\times10^{-2}$

نلاحظ ان $\tau_f \approx 8\%$ ، وهذا معناه انه في كل مائة جزيء من حمض البنزويك تتفاعل 8 جزيئات فقط، مما يدل على أن التفاعل غير تام ($\tau_f < 1$).

II/ وصف التركيب التجريبي

- يوضع في بيشر الحجم $V_A = 20mL$ من محلول حمض البنزويك $C_6H_5COOH_{(aq)}$ الذي تركيزه $C_A = 1,0\times10^{-2}\,mol.L^{-1}$.
- يسكب في السحاحة محلول الصود ($Na^+_{aq} + HO^-_{(aq)}$) الذي تركيزه C_B .
- ندخل مسبر مقياس الـ pH في البيشر، ونضع داخل محلول البيشر مخلاطا مغناطيسيا.

وصف البروتوكول التجريبي

- يقاس pH المحلول الحمضي قبل بدا عملية التسحيح.
- تبدا عملية التسحيح، فيسكب حجم V_B من الصود في البيشر. ننتظر قليلا حتى يصبح المحلول متجانسا، ثم نقيس قيمة pH الموافقة.
- تكرر العملية من أجل حجوم لـ V_B مختلفة، وتقاس قيم الـ pH الموافقة لها.

2/ معادلة تفاعل المعايرة

$$C_5H_6COOH_{(aq)} + (Na^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)}) = C_5H_6COO^-_{(aq)} + Na^+_{(aq)} + H_2O_{(l)}$$

3/ أ/ تحديد إحداثيي نقطة التكافؤ E

باستعمال طريقة المماسات على المنحني $pH = f(V_B)$ نجد : $E\begin{pmatrix} V_{BE} = 16mL \\ pH_E = 8,0mL \end{pmatrix}$

$pH_E > 7$ معناه أن التفاعل حدث بين حمض ضعيف وأساس قوي، إذن : حمض البنزويك ضعيف.

ب/ استنتاج C_B

عند التكافؤ يتحقق : $C_AV_A = C_BV_{B(E)}$ إذن : $\boxed{C_B = \dfrac{C_AV_A}{V_{B(E)}}}$

بالتعويض نجد : $C_B = \dfrac{1,0\times10^{-2}\times20\times10^{-3}}{16\times10^{-3}}$ ، $C_B = 1,25\times10^{-2}\,mol.L^{-1}$.

استنتاج قيمة Pk_A للثنائية $C_6H_5COOH_{(aq)} / C_6H_5COO^-_{(aq)}$

من نصف حجم التكافؤ $\frac{V_{B(E)}}{2} = 8mL$ نعينها في البيان $pH = f(V)$ فنجد ترتيبتها

$\boxed{Pk_A \approx 4,2}$

4/ تحديد الكاشف المناسب لهذه المعايرة

إن pH_E هو الذي يحدد الكاشف المناسب لكل معايرة بحيث تكون قيمتها محتواة في مجال التغير اللوني للكاشف المناسب، ففي هذه المعايرة لدينا $pH_E = 8$ وهذه القيمة محتواة في مجال التغير اللوني لأحمر الفينول وهو $6,8 \leq pH \leq 8,4$. وعليه فإن أحمر الفينول هو الكاشف المناسب لهذه المعايرة.

5/أ/ التأكد من أن $\frac{dpH}{dV_B} = g(V_B)$ هي دالة المشتق للدالة $pH = f(V_B)$

لنحسب ميل الدالة الأصلية $\frac{\Delta pH}{\Delta V_B}$.

لدينا : $\frac{\Delta pH}{\Delta V_B} = f'(V_B)$

من أجل $V_1 = 15mL$ نرسم مماسا للدالة $pH = f(V_B)$ في النقطة حيث $V_1 = V_B = 15mL$.

ونحسب ميل هذا المماس، فنجد : $\frac{\Delta pH}{\Delta V_{B_1}} = \frac{5,7-5,1}{15,5-14} = \frac{0,6}{1,5} \approx 0,4mL^{-1}$

وبالنظر إلى بيان $\frac{dpH}{dV_B} = g(V_B)$ ، نجد أنه يأخذ القيمة $0,4mL^{-1}$ عند الحجم $V_1 = 15mL$.

- من أجل $V_2 = 16mL$ ، بنفس الطريقة السابقة، نجد أن : $\frac{\Delta pH}{\Delta V_{B_2}} \approx 4,5mL^{-1}$
- من أجل $V_3 = 20mL$ ، نجد أيضا $\frac{\Delta pH}{\Delta V_{B_3}} \approx 0,15mL^{-1}$

وهذه القيمة متوافقة مع قيمة البيان المناسب.

ب/ من دالة المشتق $\frac{dpH}{dV_B} = g(V_B)$ نستطيع تحديد V_{BE}.

وبالفعل من هذا البيان نجد : $\boxed{V_{BE} = 16mL}$.

كما يمكن تعيين Pk_A للثنائية أساس/حمض انطلاقا من حجم نصف التكافؤ $\frac{V_{B(E)}}{2}$.

الوحدة 4

تطور جملة ميكانيكية

1- مقاربة تاريخية لميكانيك نيوتن

أ- الحركة وأسرارها

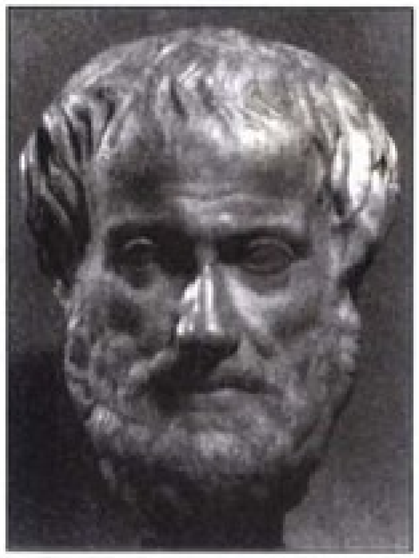
لقد شغلت الحركة بال الإنسانية، منذ فجر التاريخ. فقط ثلة من الفلاسفة والعلماء انبروا في محاولة لحل لغزها الكبير، ومن ثم تفسيرها، وخاضوا في ذلك كفاحا مضنيا شاقا، استغرق قرابة *2000* سنة، تميز بروعة الأداء، والصبر ومجابهة المعارضين والمشككين في دراساتهم.

نذكر من بين أولئك الذي تركوا بصماتهم واضحة في مجال الميكانيك الفيلسوف العظيم أرسطو (*384 – 322*ق.م) *ARISTOTE* والشيخ المعلم الرئيس ابن سينا (*970–1037* م) وغاليليه (*1567– 1642* م) *GALILLE* ونيوتن (*1642–1727* م) *NEWTON*، واينشتاين (*1879 – 1955* م) *EINSTEïN*.

2- تطور النماذج الكونية من أرسطو إلى نيوتن

استفاد الإنسان منذ بدء الخليقة من حاسة البصر، فاستعملها لمراقبة حركة النجوم والكواكب وأعطى بعض النماذج الكونية يرتب فيها الكواكب والنجوم ويسجل حركتها.

1 نموذج أرسطو (انظر الوثيقة المرفقة)



نموذج أرسطو للكون (384 - 322 ق.م)

تأريخ

أرسطو (*384– 322* ق.م)

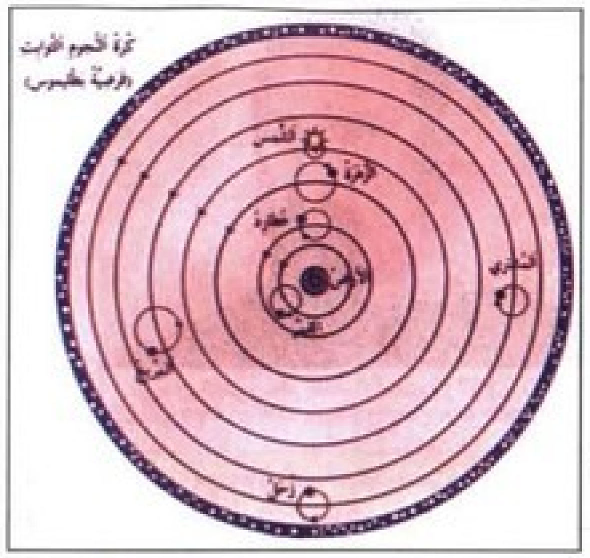
فيلسوف وفيزيائي يوناني تتلمذ على يد أفلاطون، اشتهر بنظريته للكون وللمادة. تبنى علماء ورجال الكنيسة في أوروبا أفكاره خلال القرون الوسطى إلى درجة تقديسها، ومزجوها بالعقائد المسيحية.

تعليق

- الكواكب السبعة المعروفة آنذاك هي : القمر، عطارد، الزهرة، الشمس، المريخ، المشتري وزحل.
- رتبها أرسطو من أسفل إلى أعلى.
- أخذ أرسطو بتصور امبيدوكل فقسم المادة في المجال ما تحت القمر المحيط بالأرض إلى أربعة عناصر أساسية هي : التراب، الماء، الهواء والنار.

2 النموذج الجيومركزي : نموذج بطليموس (انظر الوثيقة المرفقة).


صورة لاكلاديوس بطليموس.

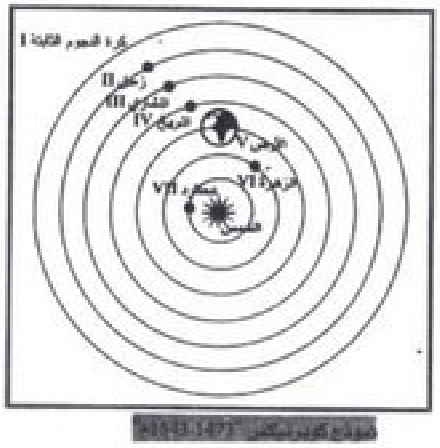


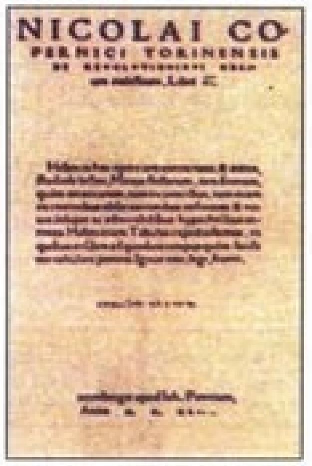
- الأرض هي مركز الكون.
- الكواكب السبعة حسب بطليموس لكل واحد منها حركتان دائريتان :
الأولى : هي حركة الكواكب في دائرة صغيرة تدعى (فلك التدوير).
الثانية : هي حركة الكواكب حول الأرض في فلك رئيسي يدعى (الفلك المركزي).

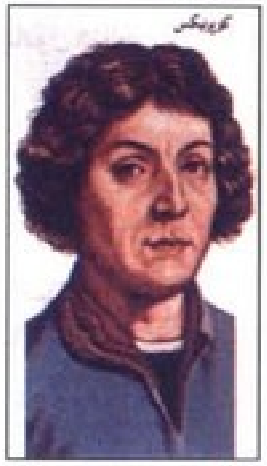
بطليموس : فلكي رياضي وجغرافي هيليني من مدرسة الإسكندرية في مصر، عاش في القرن الثاني للميلاد وهو صاحب (المجسطي) الذي وضع النظام الجيومركزي للكون بقرون عديدة إلى أن استبدل بالنظام الهيليومركزي (الكوبرنيكي).

3 النموذج الهيليومركزي

نموذج كوبرنيكس (*1473 – 1543* م) *COPERNICKS* (انظر الوثيقة المرفقة).







- الشمس هي مركز الكون، لا الأرض.
- الكواكب السبعة تدور حول الشمس في مسارات دائرية.

3. تطور الميكانيك عبر التاريخ من أرسطو إلى نيوتن

◄ ظهر مصطلح (الميكانيك) لأول مرة في مؤلفات أرسطو، وهو مشتق من الكلمة اليونانية ($\mu\eta\chi\alpha\nu\eta$) التي تقرأ بالعربية (ميكاني) ومعناها (آلة).

◄ الميكانيك هو أحد فروع الفيزياء ويحمل مظهرين.

المظهر الأول : نظري. يدرس القوانين العامة التي تتحكم في حركة الأجسام.

المظهر الثاني : تقني. يعنى بحل مشاكل الآلة، تصميمها، صناعتها، والسيطرة عليها.

◄ نقوم الآن بعرض أهم المبادئ التي وضعت في الميكانيك، بدءا من أرسطو، مرورا بغاليله وانتهاء بنيوتن.

1-3 ميكانيك أرسطو

وضع أرسطو نظرية في الميكانيك وقسمها إلى : ميكانيك سماوية (فلكية مثالية) وميكانيك أرضية.

1/ الميكانيك السماوية (الفلكية)

قد عرضناها في نموذج أرسطو للكون، وقد قال في هذا الصدد :

◄ إن الكون محدود، ولا يمكن أن يمتد إلى ما لا نهاية.

◄ الكون كروي الشكل.

◄ الكواكب السبعة (المعروفة آنذاك)، وهي الشمس، القمر، عطارد، الزهرة، المريخ، زحل والمشتري، تدور حول الأرض في حركة دائرية في مدارات (أفلاك) مثالية، والأرض مركز الكون والكواكب تدور حولها.

2/ الميكانيك الأرضية

فيها نوعان من الحركات، الحركات الطبيعية (كالسقوط الحر) والحركات العنيفة (كحركة القذائف).

فقال في هذا الصدد :

1 ◄ تسقط الأجسام والحجارة والماء (المطر) على الأرض (أي نحو الأسفل) لتأخذ مكانها الطبيعي وهو الأرض. أما الهواء والنار فإنهما يتصاعدان إلى السماء (نحو الأعلى) لأن مكانهما الطبيعي هو السماء.

2 ◄ تسقط الأجسام الثقيلة بسرعة أكبر من الأجسام الخفيفة.

3 ◄ الجسم المتحرك يتوقف عن الحركة عندما لا تعود القوة التي تدفعه قادرة على التأثير بشكل يدفعه.

تعليق

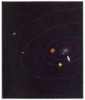
بناء على النتيجة 3 لأرسطو، السرعة دلالة على وجود قوى خارجية تؤثر على الجسم. والجسم يحتاج إلى قوة لكي يتابع حركته حتى ولو كانت سرعته ثابتة.

◄ لقد بقيت أفكار أرسطو سائدة في أوروبا منذ عهده (حوالي 300ق.م) إلى عهد غاليله حوالي القرن السادس عشر أي لمدة 19 قرنا، والمدهش أن الكنيسة تبنتها وأدخلتها في عقيدتها، وويل لمن خالف ذلك !

◄ إن أفكار أرسطو تبدو للوهلة الأولى صحيحة، غير أننا سنوضح في حينه كيف انبرى لها العالم العظيم غاليله في القرن السادس عشر وأثبت خطأها.

4 - تطور النموذج الهيليومركزي- نموذج كبلر (1571– 1630م) KEPLER

يوهان كبلر، عالم الفلك الألماني (1571 - 1630)



◄ الشمس هي مركز النظام الشمسي وليس مركز الكون.

◄ مدارات الكواكب ليست دائرية بل قطوع ناقصة والشمس تقع في إحدى بؤرتيها.

◄ بناء على إرصادات فلكية دقيقة، جمعت طيلة عشرات السنين، قام بها الفلكي الكبير (تيكو براهي *Tychobrahi* 1546–1601م) استفاد منها كبلر، واستنتج ثلاثة قوانين تعرف باسمه ما زالت تدرس لحد الآن لصحتها ودقتها.

* قوانين كبلر

القانون الأول

يدور كل كوكب حول الشمس في الاتجاه المباشر في مسار على شكل قطع ناقص تقع الشمس في أحد محرقيه (بؤرتيه).

القانون الثاني

يمسح الشعاع الواصل بين الشمس والكوكب مساحات متساوية في فترات زمنية متساوية.

القانون الثالث

يتناسب مربع الدور الزمني T للكواكب حول الشمس مع مكعب نصف طول المحور الأكبر a لمداراتها أي مقدار ثابت $= K = \dfrac{T^2}{a^3}$

* استنتاج

استطاع كوبرنيكس وكبلر أن يدحضا نموذج أرسطو للكون وبيّنا أن الأرض لم تعد هي مركز الكون بل هي كوكب من الكواكب التي تدور حول الشمس.

* استدراك

نشر كبلر القانون الأول والثاني له في كتابه (علم الفلك الجديد *Astronomia nova*) الذي نشره سنة 1609م، أما القانون الثالث، فنشره في عمل متأخر، في كتابه الشهير (تناغم الكون *Armonies Mundi*) الذي نشره سنة 1619م.

◂ لقد بنى أرسطو أفكاره على الحدس والمناقشات العقلية والاستقراء، وأنكر صلاحية التجارب في المساعدة على وضع أسس العلم لأن الحواس — حسب أرسطو — هي التي تتكفل بنقل نتائج التجريب، والحواس غشاشة. لذا أتت أفكاره تلك وتفسيراته بعيدة عن المنهج العلمي الحديث.

◂ ورغم كل هذا فإن النموذج الكوني الميكانيكي لأرسطو — الذي وضعه في كتابه (السماء) — هو نموذج رائع ومتماسك وأنيق، استهوى العلماء وشغل بالهم، وبهرهم مدة 19 قرنا، وقد تأثر به حتى العلماء المسلمون.

وقد لا نستغرب عندما نجد الآن عوام الناس، يعتقدون بدوران الشمس حول الأرض وسقوط الأجسام الثقيلة بسرعة أكبر من سرعة الأجسام الخفيفة في الهواء، وكذا شرط وجود قوة لبقاء الجسم في حركة أفقية (لوجود الاحتكاك). وللأمانة العملية — وليس دفاعا عن أرسطو — فإن فكرة السقوط في الهواء، والحركة في المستوي الأفقي الذي به احتكاك، توافقان بعض الشيء أفكار أرسطو، فهو كان يتكلم عن السقوط في الهواء، كما كان يتكلم عن حركة الأجسام فوق الأرض، أين يوجد احتكاك.

2-3 ميكانيك ابن سينا

يقول ابن سينا في كتابه (نجاة) :

(... ليس شيء من الأجسام الموجودة يتحرك أو يسكن بنفسه، أو يتشكل أو يفعل شيئا غير ذلك، وليس ذلك له عن جسم آخر، أو قوة فائضة عن جسم...).

3-3 ميكانيك غاليله

◂ كيف يمكن لشخص أن يقنع كل علماء أوروبا، كل قساوستها، كل الناس العاديين، ببطلان فكر أرسطو في الميكانيك ؟ فالحدس يؤيد أرسطو .... ما هي إذن الوسيلة التي يستعملها ؟ ... اهتدى أخيرا إليها، إنها التجربة. نعم، بالتجربة وحدها تمكن العالم الفذ العبقري (غاليله غاليليو) من مناقضة ودحض أفكار أرسطو في الميكانيك، وفي هذا الصدد يقول اينشتاين في كتابه (تطور الأفكار في الفيزياء) :
إن التجربة هي لب اكتشاف غاليله.

◂ يقول غاليله في كتابه (علمان جديدان) ما يلي :

إن أية سرعة تنخفض تماما، طالما بقيت الأسباب الخارجية للتسارع أو التباطؤ غائبة، وهو شرط لا يتحقق، إلا في المستوي الأفقي، لأنه في المستوي اللاأفقي سبب للتسارع باتجاه النزول، وسبب للتباطؤ باتجاه الصعود. ومن هذا ينتج أن الحركة على المستوي الأفقي متواصلة، والسرعة ثابتة لعدم وجود سبب يضعفها أو يعدمها.

تعليق

◂ حسب غاليله، الصلة موجودة بين القوة أو القوى الخارجية المؤثرة، وتغير السرعة، لا بين القوة والسرعة كما نادى أرسطو، أي أن $\vec{F} \propto \overrightarrow{\Delta v}$ وليس $\vec{F} \propto \vec{v}$.

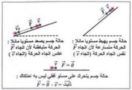
◂ القوة الخارجية تزيد من سرعة الجسم إذا كانت في اتجاه الحركة، وتنقص منها إذا كانت عكس اتجاه الحركة. وتكون منعدمة إذا كان الجسم في حركة مستقيمة منتظمة.

مثال لحركة مستقيمة متغيرة

◂ حالة جسم يهبط مستوى مائلا : الحركة متسارعة لأن لـ $\vec{F}$ نفس اتجاه الحركة (اتجاه $\vec{v}$).

مثال لحركة مستقيمة منتظمة

◂ حالة جسم يتحرك في مستو أفقي ليس به احتكاك، $\vec{v} = \overline{Cte}$ و $\vec{F} = \vec{0}$
وهذه الدراسة جعلت غاليله يستنبط مبدأ العطالة الشهير. وفي هذا الصدد يقول اينشتاين في كتابه (تطور الأفكار في الفيزياء) : (إن النتيجة الصحيحة التي استنبطها غاليله، صاغها نيوتن بعد جيل من الزمان بالنص المعروف باسم مبدأ العطالة).



4/ نص مبدأ العطالة

يحافظ كل جسم على سكونه أو حركته المستقيمة المنتظمة، إذا لم تتدخل قوة لتغير حالته الحركية.

رد غاليله على النتيجة 2 لأرسطو (الخاصة بسقوط الأجسام)

لكي يثبت غاليله للناس والكنيسة خطأ أرسطو في النتيجة 2، أحضر عدة كرات متساوية الحجوم تقريبا، لكنها مختلفة الأثقال، فهي مصنوعة من مواد مختلفة (خشب، حديد، رصاص، مرمر، ...) وتركها تسقط من قمة برج بيزا بإيطاليا (*la tour de Pize*)، فانبهر الناس، عندما رأوا أن هذه الكرات تترافق في حركاتها، على اختلافها وسقطت في أسفل البرج، في نفس الوقت.

بهذه التجربة دحض غاليله نظرية أرسطو في سقوط الأجسام، ووضع قانون السقوط الحر.

نص قانون السقوط الحر

تتحرك الأجسام الساقطة سقوطا حرا بحركات متطابقة.

- ما هي القوة التي تجعل الأجسام تسقط على الأرض ؟
- ما هي القوة التي تجعل الأرض والكواكب تدور حول الشمس ؟

تفسير أرسطو

بما أن أرسطو قسم الحركة إلى حركة طبيعية على سطح الأرض، وحركة فلكية تصف حركة الكواكب فإنه يعطي التفسير التالي :

- كل جسم له عطالة (كتلة) لا يتحرك على سطح الأرض إلا بدفع قوة مطبقة عليه، فإذا زالت هذه القوة يتوقف الجسم في الحين.
- الأجسام التي تسقط باتجاه الأرض لا تحتاج إلى قوة، لأن أصلها ومكانها الطبيعي هو الأرض.
- الكواكب تدور حول الأرض بفعل قوة الدفع، التي تؤثر بها الشمس على الكواكب، مثل الرياح القوية التي تدفع الأجسام.

تفسير كبلر

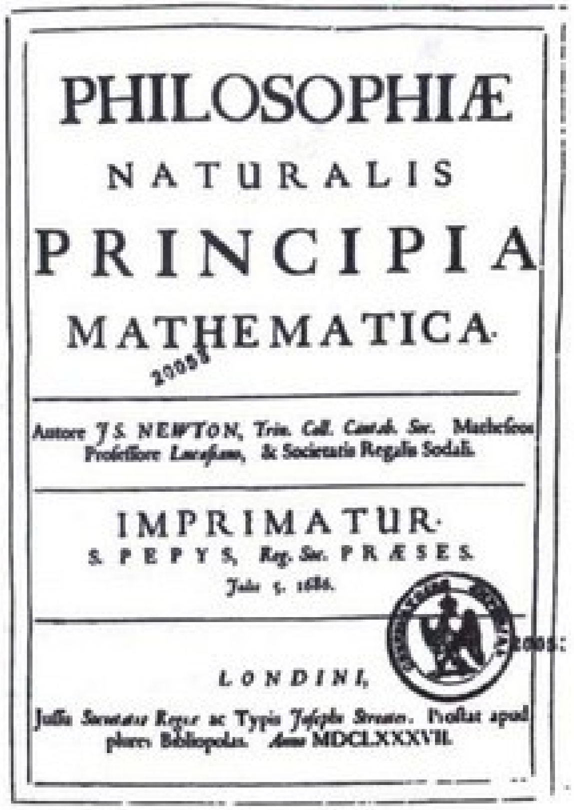
- لم يكن كبلر يسعى إلى معرفة هندسة الكون فحسب، بل كان يبحث حثيثا عن "القوة الحيوية" (*Animae motrix*) التي تحرك الكواكب في مداراتها. فقرر أن هذه القوة دافعة صادرة عن الشمس. وهنا يكون كبلر قد تبنى تفسير أرسطو.

غير أن فكرة كبلر كانت خاطئة إذ أن القوة التي تحرك الكواكب هي قوة جاذبة — كما بينها العالم نيوتن فيما بعد — وليست قوة دافعة كما افترضها كبلر ومن قبله أرسطو.

تفسير غاليله

- استطاع غاليله أن يفسر بشكل مدهش تأثير القوى على حركة الأجسام الأرضية، وقد رأينا ذلك في نص مبدأ العطالة، وأيضا من خلال الأمثلة التي أوردناها، التي تعطي العلاقة بين طبيعة الحركة والقوة، وبين غاليله أن القوة إما أن تكون قوة دافعة، أو قوة معيقة للحركة، أو قوة منعدمة.
- أما تفسيره لتأثير القوة في الحركات الفلكية، بما فيها حركة الكواكب حول الشمس، فكان خاطئا، إذ رفض رفضا قاطعا فكرة تأثير القوى عن بعد، فكان يرفض الفكرة القائلة بأن الشمس هي مصدر القوى التي تحرك الأرض، والكواكب في مداراتها، وكذا رفض بشكل قطعي فكرة أن القمر هو الذي يؤثر على الأرض بقوى فتحدث ظاهرة المدّ والجزر.

4-3- ميكانيك نيوتن أو توحيد الميكانيك الأرضية والميكانيك الفلكية

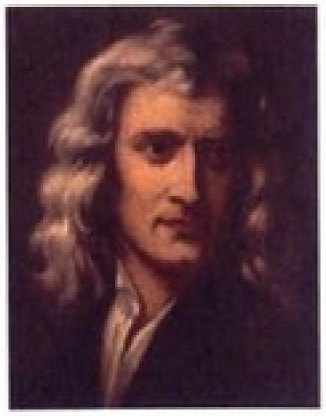


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.



الشكل 213 من كتاب المبادئ

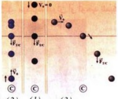
1/ قوة الجاذبية

رسم نيوتن في كتابه (المبادئ) شكلا يحمل رقم *213*، فهو من البساطة والوضوح إلى درجة يجعلنا نفهم العلاقة بين الميكانيك الأرضية والميكانيك الفلكية وقد جاء تحت الشكل المذكور :

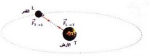
- إن الحجر المرمي ينحرف بتأثير الجاذبية عن طريقه المستقيم، ويتخذ مسارا منحنيا، ثم يسقط أخيرا على الأرض. وإذا رمي بسرعة كبيرة فسوف يسقط متوغلا إلى أبعد من ذلك...

وبالاستمرار في هذه المناقشة يتوصل نيوتن إلى نتيجة مفادها أنه لولا مقاومة الهواء وعند الوصول إلى سرعة كافية يتغير شكل المسار، بحيث يمكن أن لا يسقط الحجر على سطح الأرض بصورة نهائية، بل يبدأ بالدوران حول الأرض مثلما تدور الكواكب على مداراتها في الفضاء الكوني.

- هكذا نجد أن نيوتن قد أكد أن حركة الأحجار الساقطة تماما مثل حركة الكواكب حول الشمس، وأيضا حركة القمر حول الأرض، هي كلها عبارة عن سقوط. ولكنه سقوط مستمر إلى ما لا نهاية.
- وسبب كل هذا هو وجود قوة من نوع خاص، تخضع لها جميع هذه الأجسام ، إنها قوة الجاذبية الكونية.



(2) (1) (3)



(4)

أمثلة لأجسام ساقطة

1 ◄ جسم يسقط بدون سرعة ابتدائية.

2 ◄ جسم يقذف شاقوليا نحو الأعلى بسرعة ابتدائية $\vec{V}_0$.

3 ◄ جسم يقذف بزاوية ميل افقية.

4 ◄ القمر يدور حول الأرض.

◄ كل هذه الأجسام خاضعة لقوة الجاذبية $\vec{F}_{T/C}$. ويمكن أن تعمم هذه القوة على كل الأجسام الفلكية. فقوة الجاذبية هي قوة عامة تخضع لها جميع الأجسام، فهي إذن قوة كونية، لذا يطلق عليها اسم قوة الجذب العام أو قوة الجذب الكونية.

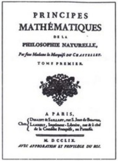
◄ وهكذا استطاع نيوتن أن يوحد الحركات الأرضية والحركات الفلكية بقوة الجاذبية.

◄ واستطاع أن يفسر كل الحركات الطبيعية (حركة السقوط، حركة الكواكب) انطلاقا من قوة الجاذبية، وكان نيوتن أول من استطاع أن يفهم بوضوح تام، أنه لأجل تفسير حركة الكواكب يجب أن نبحث عن القوى بالذات وليس عن غيرها وهذا ما يسمى حديثا بالتفسير الديناميكي. واستعمال قوة الجاذبية قادت نيوتن إلى وصف حركة الأجسام الأرضية والفلكية وصفا دقيقا، فأوجد مساراتها وسرعاتها وتسارعاتها في كل لحظة.

◄ **بقي سؤال نطرحه :** لماذا لم يستطع كبلر وضع قانون الجاذبية ؟ رغم أن كبلر كان سبّاقا في وصف حركة الكواكب وصفا حركيا دقيقا. وكذا غاليله، لماذا لم يكتشف قانون الجاذبية، وهو الذي أوجد قانون السقوط الحر، كما أنه أبدى اهتماما يزيد بكثير عن الاهتمام الذي كرسه نيوتن لدراسة علم الفلك ؟ وأيضا (روبرت هوك) الذي بحث كثيرا في الجاذبية.

لماذا إذن لم يستطع كل العلماء الذين سبقوا أو عاصروا نيوتن من اكتشاف قانون الجاذبية ؟ فهل المسألة في الصدفة ؟! أم في التفاحة الساقطة التي قيل إن على إثرها اكتشف نيوتن قانون الجاذبية ؟! كلا، فالمسألة ليست في هذا ولا ذاك، بل العامل الحاسم هو في المفاهيم الدقيقة والقوانين الثلاثة التي وضعها نيوتن بنفسه بدءا بتوحيد الحركات الأرضية والفلكية، وانتهاء بتفسيرها باستعمال مفهوم القوة. لقد درس نيوتن الحركات دراسة ديناميكية (تحريكية) بإدخال المفهوم الدقيق للقوة على عكس سابقيه الذين درسوا الحركات دراسة حركية، أي دون إدخال مفهوم القوة.

◄ وهكذا يكون نيوتن قد أسس ميكانيكا (ميكانيك نيوتن)، ويعتبر هذا الميكانيك إنجازا عظيما في تاريخ العلوم كلها، جعلت من نيوتن أعظم علماء الفيزياء على مر العصور. ويعتبر كتابه الشهير (المبادئ الرياضية للفلسفة الطبيعية *Philosophiae Naturalis Principia Mathématica*) الذي وضعه عند (الجمعية الملكية *Royal Society*) في *28* افريل *1686* ونشر في *5* جويلية *1686* . والذي ضمنه قوانينه الثلاثة في الديناميك، بالإضافة إلى قانون الجاذبية، أنموذجا في الدقة والروعة. ولا عجب أن كل المدارس في العالم الآن تدرس ميكانيك نيوتن.



PRINCIPES
MATHÉMATIQUES
DE LA
PHILOSOPHIE NATURELLE,
Par feue Madame la Marquise du Chastellet.
TOME PREMIER.

A PARIS,
Chez Desaint & Saillant, rue S. Jean de Beauvais, Lambert, Imprimeur-Libraire, rue & à côté de la Comédie Françoise, au Parnasse.

M. DCCLIX.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

أول نسخة فرنسية من كتاب "المبادئ"، ظهرت لأول مرة عام 1759م.

الكوسمولوجيا الديكارتية

◄ كان ديكارت يرفض فكرة تأثير القوى عن بعد لأنه كان يرفض أصلا وجود الفراغ. وقد قال في هذا الصدد : "إنني أرفض وجود أي تأثير مزعوم صادر عن الشمس ... بحيث تؤثر بواسطة قوة غامضة غير قابلة للشرح".

ومن ثم جاء بنظرية الدوامات التي تفترض وجود مادة شبه سائلة تملأ الفضاء بحيث تضطرب الكواكب التي تسير في وسطها، مولدة دوامات تجعل الكوكب يتبع مدارا معينا بدلا من سيره في خط مستقيم . وقد قبلت هذه النظرية خلال القرن السابع عشر على الرغم من خطئها إلا أنها فند ت فيما بعد و فرضت فكرة القوة والغيت فكرة الدوامات الديكارتية نهائيا .

ظهرت في كوسمولوجيا ديكارت آثار التفكير الأرسطي مثل استحالة وجود الفراغ المطلق وكذلك فكرة التفاعل بين الأجسام باللمس فقط . أما دور الرياضيات بالنسبة لديكارت فكان يقتصر على توضيح العمليات الفكرية ، وليس بالضرورة صياغة قوانين الطبيعة كما رأى كل من غاليله و نيوتن.

◄ يرى بعض المؤرخين أن نظرية الدوامات لديكارت قد عطلت المسيرة العلمية لأنها رفضت الجاذبية العامة ، ورفضها لمفهوم القوة المؤثرة عن بعد عموما ولهذا لم تقبل في فرنسا، نظرية نيوتن في القوى التي ضمنها في كتابه لمبادئ وهذا تضامنا مع **ديكارت** وذلك إلى غاية بداية القرن الثامن عشر. لقد قوبل كتاب المبادئ في انكلترا ثم في أوروبا بحماس ، لكنه لم يحض بهذا الاعتبار في الأوساط الديكارتية وخاصة في فرنسا ، وعلقت **جريدة العلماء** الفرنسية *le journal des savants* عند صدور الكتاب ما يلي : "إنه (أي المبادئ) مجرد من أي قيمة فيزيائية لكونه لا يحقق الشروط اللازمة لفهم الكون". وهكذا نفهم لماذا لم يتم نشر كتاب نيوتن في فرنسا إلا في سنة *1759* م أي بعد *73* سنة من نشره في انجلترا.

◄ برهن نيوتن في كتاب المبادئ أن نظرية ديكارت للدوامات غير صحيحة فاستبدلها بالقانون العام للجاذبية.

2/ المفهوم العام للقوة عند نيوتن

◄ يقول نيوتن في كتابه المبادئ :

> إن القوة المؤثرة في جسم هي فعل يتحكم في الجسم كي يغير من حالة سكونه أو من حالة حركته المنتظمة في خط مستقيم. إن هذه القوة تكمن في الفعل فقط، ولا تبقى في الجسم عندما ينتهي الفعل، لأن الجسم يحتفظ بأية حالة جديدة، يكتسبها وذلك من جراء عطالته الذاتية فقط. والقوى المؤثرة يمكن أن تأتي من مصادر شتى : الصدم أو الضغط أو القوة الجاذبة.

3/ القوانين الثلاثة لنيوتن

◄ القانون الأول لنيوتن (مبدأ العطالة لغاليله)

ننص عليه بما يتناسب والمفاهيم الجديدة المكتسبة.

نص المبدأ

في معلم عطالي لكل جملة معزولة أو شبه معزولة، توجد على الأقل نقطة تسمى مركز عطالتها، تستمر في حالة السكون إذا كانت ساكنة أو تكتسب حركة مستقيمة منتظمة بسرعة لها نفس السرعة التي كانت لها لحظة انعدام القوى الخارجية المؤثرة على الجملة.

أي في حالة $\sum \vec{F} = \vec{0}$ فإنه إما $\vec{v} = \vec{0}$ فالجسم ساكن بالنسبة لمعلم عطالي، أو $\vec{v} = \overrightarrow{Cte}$ فحركة الجسم مستقيمة منتظمة.

القانون الثالث لنيوتن (مبدأ الفعلين المتبادلين)

نص المبدأ

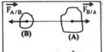
لكل فعل رد فعل مساو له في الشدة ومعاكس له في الاتجاه.

وبنص آخر :

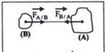
أو إذا أثرت جملة ميكانيكية (A) على جملة ميكانيكية (B) بقوة $\vec{F}_{A/B}$ فإن الجملة (B) تؤثر على الجملة (A) بقوة $\vec{F}_{B/A}$، تساويها في الشدة، وتعاكسها في الاتجاه ولها نفس الحامل.

وبتعبير رياضياتي نكتب : $F_{A/B} = F_{B/A}$

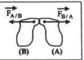
$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$



التأثير عن بعد (فعلان متبادلان تنافريان)



التأثير عن بعد (فعلان متبادلان جاذبان)



تأثير تلامسي

نتائج هامة

- مبدأ الفعلين المتبادلين صحيح سواء كان الجسمان المتأثران ساكنين أو متحركين (بالنسبة لمعلم عطالي).
- الفعلان المتبادلان يؤثران على جسمين مختلفين، الفعل $\vec{F}_{A/B}$ يؤثر على الجسم (B) والفعل $\vec{F}_{B/A}$ يؤثر على الجسم (A).
- الفعلان المتبادلان متزامنان، فهما يحدثان في نفس اللحظة حسب ميكانيك نيوتن.
- الفعلان المتبادلان لهما نفس نوعية التأثير (إما تلامسيان، أو بعديان).
- الفعلان المتبادلان من نفس الطبيعة (تجاذبيان أو مغناطيسيان أو كهربائيان).

القانون الثاني لنيوتن

التأسيس للقانون الثاني

الحركة

تعريف : الحركة هي دراسة تغير مواضع جسم بتغير الزمن دون التعرض لمسببات الحركة.

موضوع الحركة

- إن موضوع الحركة هو المكان، والزمن والنقطة المادية.
- فلا يمكن أن نتكلم عن حركة دون وجود مكان يتحرك فيه الجسم المتحرك، وزمن تتم فيه الحركة، كما لا يمكن أن نتكلم عن الحركة دون وجود متحرك.
- وعليه، لوصف حركة وصفا دقيقا، ينبغي الإجابة عن الأسئلة التالية :

أين تمت الحركة ؟ متى حدثت ؟ من المتحرك ؟

الإجابة عن السؤال متى ؟

تتم بتحديد مختلف اللحظات الزمنية المسجلة أثناء الحركة وهي (t_0)، (t_1)، (t_2)، .... (t_i).

t_0 : هي اللحظة الابتدائية (لحظة بدء الحركة) عادة ما نصطلح على جعل $(t_0 = 0s)$.

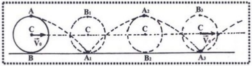
الإجابة عن السؤال من ؟

يتطلب تحديد المتحرك ذاته والذي عادة ما ندعوه **الجملة الميكانيكية**، وطلبا للسهولة نعتبر المتحرك نقطة ندعوها **النقطة المادية**.

فالنقطة المادية هي نموذج نعبر به عن المتحرك (الجملة الميكانيكية) المراد دراسته، شريطة أن تكون كتلة النقطة المادية تساوي كتلة المتحرك نفسه. وعادة ما تكون هذه النقطة هي مركز عطالتها (C).

ما هو مركز عطالة جسم ؟

لنقم بالتجربة التالية :



تدفع كرة متجانسة فوق مستو أفقي أملس (يهمل فيه الاحتكاك) بسرعة $\vec{v}_0$ ونسجل بعض مواضع هذه الكرة (الشكل I). كما نمثل ثلاث نقاط ، النقطتين A و B الواقعتين على حافة الكرة والنقطة C مركز الكرة.

- إن مسار النقطة (A) هو المسار AA_1A_2 فهو مسار منحن (شكل دويري $Cycloïde$).
- وأيضا مسار النقطة (B) هو المسار BB_1B_2 فهو مسار منحن (شكل دويري).
- أما مسار النقطة (C) فهو مسار مستقيم.
- ولا توجد نقطة أخرى في الكرة لها مسار مستقيم، فالنقطة (C) هي النقطة الوحيدة من الجسم التي مسارها مستقيم وسرعتها تبقى ثابتة $\vec{v}_0$ لذا تسمى هذه النقطة (C) مركز عطالة الكرة.

تعريف : مركز عطالة جسم هو النقطة الوحيدة منه التي تحافظ على سرعتها إذا كانت حركة الجسم مستقيمة منتظمة.

ملاحظة هامة

مركز عطالة جسم (C) هو نفسه مركز الأبعاد المتناسبة، وينطبق مع مركز الثقل (C) في مكان فيه حقل الجاذبية منتظم.

الإجابة عن السؤال أين ؟

يتطلب تعيين المسار، وبالتالي تحديد المواضع المختلفة التي يمر بها المتحرك، وهذا بالنسبة لجسم مرجعي محدد *Référentiel* مرفق بمعلم مناسب *Repère* .

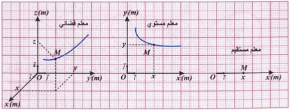
المرجع *Le référentiel*

المرجع (الجسم المرجعي) هو أي جسم صلب غير قابل للتشوه يسمح بتعيين حركة الجسم المدروس بالنسبة إليه.

المعلم *Le repère*

- المعلم هو جملة إحداثيات مناسبة تكون مرتبطة بالجسم المرجعي.

- عادة ما نستعمل الإحداثيات الكارتيزية (الديكارتية) (x, y, z) لتعيين مواضع المتحرك. فإذا كانت الحركة تتم في مستقيم نحتاج إلى إحداثية واحدة هي الفاصلة (x) وبالتالي نلجأ إلى المعلم المستقيم $(o, \vec{i})$.
- أما إذا كانت الحركة تتم في مستو فإننا نحتاج إلى إحداثيتين هما الفاصلة (x) والترتيبة (y) وبالتالي نستعمل المعلم المستوي $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- وإذا تمت الحركة في الفضاء فالحركة تحدد بالإحداثيات الثلاثة الفاصلة (x) والترتيبة (y) والراقم (z) وعليه نستعمل المعلم الفضائي $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



مثال : لدراسة الحركة المستقيمة لكرية فوق منضدة أفقية نحتاج إلى مرجع، ليكن على سبيل المثال المنضدة، ونحتاج إلى معلم هو المعلم المستقيم $(o, \vec{i})$،

- مبدؤه : النقطة O حافة المنضدة

- إحداثياته : $x_0, x_1, x_2 ...... x_i$

كيف نختار المرجع المناسب لدراسة حركة جسم معين؟

- لنفترض، على سبيل المثال، أن سيارة تسير في طريق مستقيم وشخص يجري وراءها، وشخص ساكن بالنسبة إلى الأرض يراقبها. أي الشخصين يسهل عليه دراسة حركة السيارة ؟
- بالطبع، الشخص الساكن بالنسبة إلى الأرض هو الذي يستطيع، بشكل سهل، دراسة حركة السيارة ، لأن الشخص الأول يكون في حركة نسبية مع السيارة. وإذا كانت حركته متغيرة السرعة فدراسة حركة السيارة بالنسبة إليه تصبح أكثر تعقيدا.
- لذا نختار نوعا خاصا من المراجع، ندعوه المرجع العطالي (المعالم العطالية).
- المرجع العطالي هو مرجع ساكن، أو متحرك بحركة مستقيمة منتظمة بالنسبة إلى مرجع آخر نعتبره ساكنا خلال مدة الدراسة.
- إذا توخينا الدقة المطلقة، فإنه لا يوجد في الطبيعة مرجع عطالي، فالأرض تتحرك في مسار منحن والشمس كذلك، لأنه لا يوجد مسار مستقيم في الكون (وهذا ما أكدته النظرية النسبية العامة لاينشتاين التي تقول بانحناء الكون). غير أنه يمكن اعتبار الأرض والشمس، عمليا، مرجعين عطاليين، والمعالم المرتبطة بها معالم عطالية، وهذا في زمن صغير (زمن التجربة أو زمن دراسة الحركة).

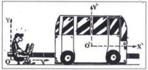
أمثلة لمعالم عطالية

1/ المعلم السطحي الأرضي (المعلم المخبري) *Référentiel terrestre*

هو معلم مرتبط بسطح الأرض، يصلح لدراسة الأجسام التي تتم على سطح الأرض خلال مدة صغيرة، مقارنة بالمدة التي تستغرقها الأرض في دورانها حول نفسها.

أمثلة: شجرة، عمود هاتف، محطة، رصيف، مختبر... كلها مراجع مرتبطة بسطح الأرض.

مثال آخر: شخص جالس في محطة يراقب حركة حافلة، يمكن اعتبار كل من الشخص والمحطة مرجعا سطحيا أرضيا، وهما مرجعان عطاليان لأنهما ساكنان بالنسبة إلى الأرض (التي يمكن اعتبار سرعتها ثابتة في زمن التجربة).

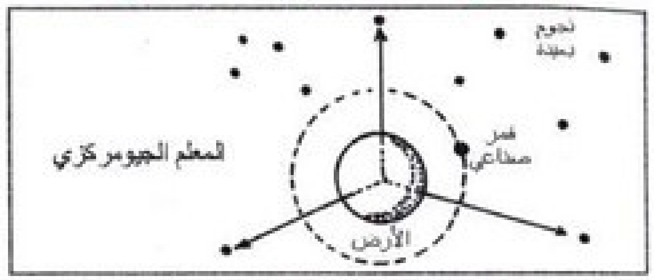


نرفق بالشخص معلما (x, y, z) نعتبره عطاليا.

ملاحظة

إن المعلم المرتبط بالحافلة (o', x', y') يمكن أن يكون عطاليا إذا كانت سرعة الحافلة ثابتة بالنسبة للمعلم المرتبط بالأرض، وإلا فهو معلم (لا عطالي).

2/ المعلم المركزي الأرضي *Référentiel géocentrique*



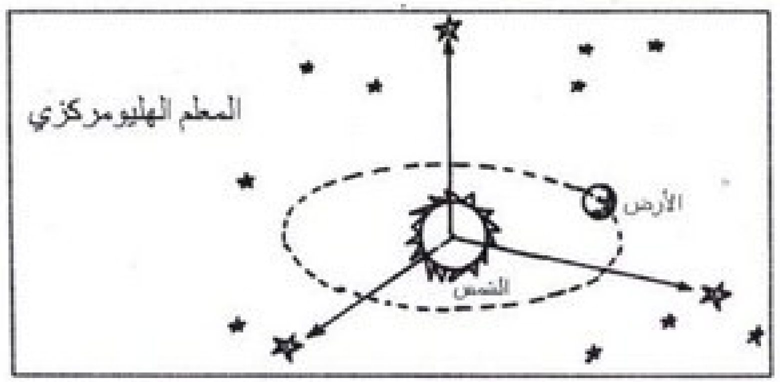
- يسمى أيضا معلم بطليموس

- هو معلم مبدؤه مركز الأرض (مركز عطالة الأرض) ومحاوره تتجه نحو ثلاثة نجوم ثابتة (تكاد تكون ثابتة في زمن التجربة).
- وهو يصلح لدراسة حركة التوابع الأرضية.

مثال: القمر، الأقمار الصناعية ...

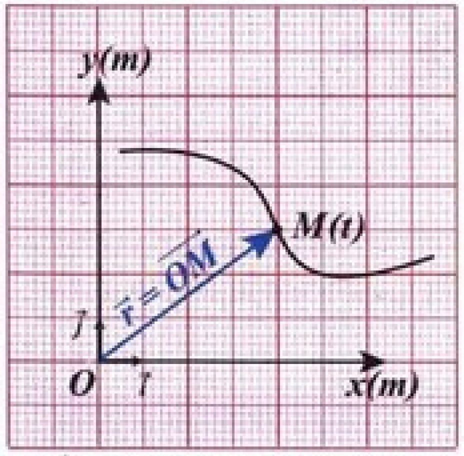
3- المعلم المركزي الشمسي (معلم كوبرنيك) *Référentiel héliocentrique*

- هو معلم مبدؤه مركز الشمس (مركز كتلة الشمس) ومحاوره تتجه نحو ثلاثة نجوم ثابتة (تكاد تكون ثابتة خلال زمن التجربة).
- وهو يصلح لدراسة حركة الكواكب مثل : عطارد، الأرض، المذنبات...



◄ شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$

شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ هو شعاع يحدد موضع المتحرك M في لحظة زمنية (t) بالنسبة للمبدأ (O) لمعلم كارتيزي $(O,\vec{i},\vec{j})$.



$$\boxed{\vec{r}=\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}}$$

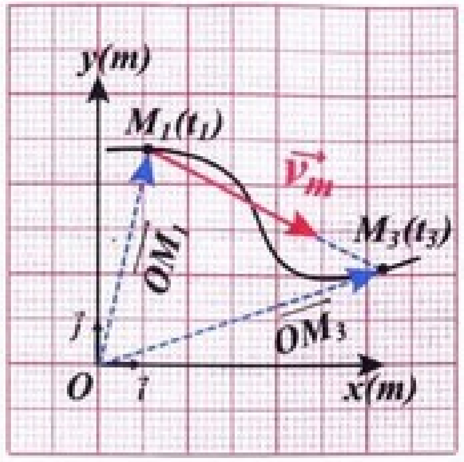
حيث : $x(t)$ فاصلة المتحرك في اللحظة (t)،

$y(t)$ ترتيبة المتحرك في اللحظة (t).

قيمة شعاع الموضع : $\boxed{\|\vec{r}\|=\|\overrightarrow{OM}\|=\sqrt{x^2+y^2}}$

- شعاع السرعة

ليكن المسار T المتحرك نسجل عليه بعض المواضع في لحظاتها المناسبة وهي : $M_1(t_1), M_2(t_2),....$



◄ شعاع السرعة المتوسطة $\vec{v}_m$

تعريف

شعاع السرعة المتوسطة $\vec{v}_m$ لمتحرك في مجال زمني $[t_1,t_3]$ هو نسبة المسافة المقطوعة إلى زمن قطعها، وهذا بالنسبة لمعلم معين.

$$\boxed{\vec{v}_m=\frac{\overrightarrow{M_1M_3}}{t_3-t_1}=\frac{\overrightarrow{OM_3}-\overrightarrow{OM_1}}{t_3-t_1}}$$

وبوضع $\Delta t=t_3-t_1$ و $\Delta\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_3}-\overrightarrow{OM_1}$ فإننا نكتب : $\boxed{\vec{v}_m=\frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}}$

◄ شعاع السرعة اللحظية $\vec{v}$

تعريف

شعاع السرعة اللحظية $\vec{v}$ لمتحرك في لحظة زمنية (t) هو السرعة المتوسطة عندما يتقلص فيه المجال الزمني $[t_1,t_3]$ إلى لحظة واحدة (t) أي عندما يؤول $t_3-t_1=\Delta t\to 0$

$$\vec{v}=\lim_{t_3\to t_1}\vec{v}_m=\lim_{t_3\to t_1}\frac{\overrightarrow{OM_3}-\overrightarrow{OM_1}}{t_3-t_1}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$

أي أن : مشتق شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ بالنسبة للزمن $\vec{v}(t)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

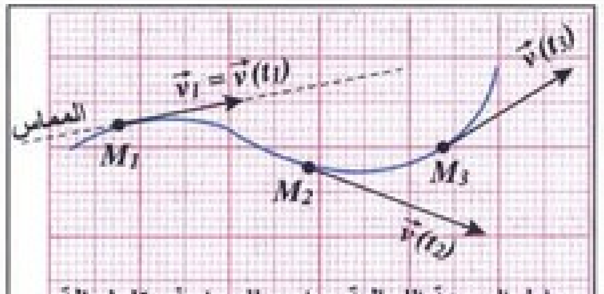
ملاحظة: في الفيزياء يعبر عن المشتق بالنسبة للزمن بالمؤثر $\left(\frac{d}{dt}\right)$.

مركبات السرعة اللحظية $\vec{v}$ في المعلم الكارتيزي هي v_x ، v_y و v_z بحيث :

$$\vec{v}(t)=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}$$

و

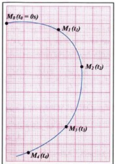
$$\vec{v}(t)=\begin{cases}v_x=\frac{dx}{dt}=\dot{x}\\ v_y=\frac{dy}{dt}=\dot{y}\\ v_z=\frac{dz}{dt}=\dot{z}\end{cases}$$



حامل السرعة اللحظية مماسي للمسار في كل لحظة

يعبر في بعض الأحيان عن المشتق بنقطة (.) مثل : $v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}$

شدة السرعة بدلالة مركباتها : $\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$



• خصائص $\vec{v}$

الحامل : مماسي للمسار في النقطة المحددة باللحظة (t).

الاتجاه : اتجاه الحركة

القيمة (الشدة) : تعطى بالعلاقة $\boxed{v = \left\| \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\|}$

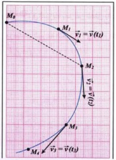
• كيفية تعيين شعاع السرعة اللحظية $\vec{v}$ في وثيقة بطريقة تقريبية

- تعطي الوثيقة المرفقة تسجيلا لمواضع متحرك في لحظات زمنية ... t_0, t_1, t_2
- زمن التسجيل بين لحظة وأخرى تليها هو τ أي : $\tau = t_1 - t_0$ و $\tau = t_2 - t_1$ ... إلخ

خاصية هامة

إذا كان زمن التسجيل τ صغيرا بكفاية، فإن السرعة اللحظية تساوي تقريبا السرعة المتوسطة في منتصف المجال الزمني.

- أي أنه في اللحظة (t_1) الواقعة في منتصف المجال الزمني $[t_0, t_2]$ يكون : $v(t_1) \approx v_m[t_0, t_2]$
- وفي اللحظة (t_2) الواقعة في منتصف المجال الزمني $[t_1, t_3]$ يكون : $v(t_2) \approx v_m[t_1, t_3]$
- وهكذا بالنسبة لبقية اللحظات الأخرى...



لنعين قيمة $V(t_1)$

نعلم أن : $v_m = \dfrac{d}{\Delta t}$ حيث :

d المسافة المقطوعة، Δt الفترة الزمنية لذلك.

- حسب الخاصية السابقة نكتب :

$$v(t_1) \approx v_m[t_0, t_2]$$

إذن : $v(t_1) \approx \dfrac{M_0M_2}{t_2 - t_0} = \dfrac{M_0M_2}{2\tau - 0} = \dfrac{M_0M_2}{2\tau}$

نقيس المسافة بين (M_0) و (M_2) فنجد :

$$d_1 = M_0M_1$$

ثم نحسب $v(t_1)$

لنعين قيمة $V(t_2)$ وقيمة $V(t_3)$ بنفس الطريقة

- باختيار سلم مناسب نمثل $\vec{v}(t_1)$ و $\vec{v}(t_2)$ و $\vec{v}(t_3)$
- لنمثل الآن $\vec{v}(t_1)$ بشعاع حاملة المماس للمسار في النقطة M_1 المحددة باللحظة (t_1).
- كما نمثل $\vec{v}(t_2)$ بشعاع حاملة المماس للمسار في النقطة M_2 المحددة باللحظة (t_2).
- ونمثل $\vec{v}(t_3)$ بشعاع حاملة المماس للمسار في النقطة M_3 المحددة باللحظة (t_3).

◄ شعاع التسارع

إذا تغيرت السرعة اللحظية لمتحرك في القيمة أو في المنحى أو في كليهما معا بالنسبة إلى معلم معين خلال مجال، نقول إن المتحرك اكتسب تسارعا.

شعاع التسارع المتوسط $\vec{a}_m$

تعريف

شعاع التسارع المتوسط $\vec{a}_m$ لمتحرك في مجال زمني $[t_2, t_3]$ هو نسبة تغير السرعة اللحظية إلى تغير الزمن، وهذا بالنسبة إلى معلم معين : $\boxed{\vec{a}_m = \dfrac{\vec{v}_3 - \vec{v}_1}{t_3 - t_1} = \dfrac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}}$.

شعاع التسارع اللحظي $\vec{a}(t)$

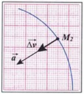
تعريف

شعاع التسارع اللحظي $\vec{a}$ لمتحرك في لحظة زمنية (t) بالنسبة لمعلم معين، هو التسارع المتوسط عندما يتقلص فيه المجال الزمني $[t_1, t_3]$ على لحظة واحدة (t) أي عندما : $\Delta t = t_3 - t_1 \to 0$

إذن : $\boxed{\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left(\dfrac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} \right) = \dfrac{d\vec{v}}{dt}}$

أي : $\boxed{\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \text{مشتق شعاع السرعة اللحظية بالنسبة للزمن}}$

كيفية تعيين $\vec{a}$ في وثيقة بطريقة تقريبية



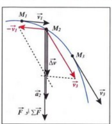
- نستعمل الوثيقة السابقة التي مثلنا عليها السرعة اللحظية $\vec{v}_1$ ، $\vec{v}_2$ ، $\vec{v}_3$
- كيف نمثل شعاع التسارع $\vec{a}_2(t_2)$ ؟

نعلم أن : $\vec{a}_2(t_2) = \vec{a}_2 = \dfrac{\vec{v}_3 - \vec{v}_1}{t_3 - t_1}$

نضع $\Delta\vec{v} = \vec{v}_3 - \vec{v}_1$ أي : $\Delta\vec{v} = \vec{v}_3 + (-\vec{v}_1)$

فلكي نمثل $\Delta\vec{v}$ في النقطة M_2 وجب علينا تمثيل شعاع السرعة $\vec{v}_3$ في النقطة M_2 ومن نهايته نمثل الشعاع $(-\vec{v}_2)$ ثم نرسم شعاع $\Delta\vec{v}$ كما هو موضح في الشكل المقابل، ومن ثم نعين طوله. وبالاستعانة بسلم السرعة نجد قيمة $\Delta\vec{v}$.

• وشعاع التسارع $\vec{a}_2$ يكون له نفس حامل $\Delta\vec{v}$، وطوله بطبيعة الحال يختلف عن طول $\Delta\vec{v}$ لأن $a_2 \approx \frac{\Delta v}{\Delta t}$ وليس $(a_2 = \Delta v)$. فنقول إن $\vec{a}_2$ على نفس حامل $\Delta\vec{v}$، لكن نختار له سلما آخر مناسبا.



نتيجة

شعاع التسارع $\vec{a}$ متسامت مع شعاع تغير السرعة $\Delta\vec{v}$

◄ مقاربة أولية للقانون الثاني لنيوتن

رأينا في السنة الأولى ثانوي أن القوة $\vec{F}$ أو مجموع القوى $\sum\vec{F}$ المؤثرة على جسم يمكن أن تغير من حالته الحركية.

كما رأينا أن اتجاه $\vec{F}$ أو $\sum\vec{F}$ يكون باتجاه تغير السرعة $\Delta\vec{v}$ في حالة الحركة المتغيرة، وفي هذا الصدد يقول نيوتن في كتابه المبادئ:

إن تغيرات الحركة تتناسب مع القوة وتتم وفق المنحى الذي أثرت فيه هذه القوة.

نترجم قول نيوتن بلغة فيزيائية حديثة كما يلي:

في معلم عطالي (غاليلي) مجموع القوى $\sum\vec{F}$ المطبقة على جملة ميكانيكية في لحظة زمنية (t) لها نفس اتجاه وحامل شعاع تغير السرعة $\Delta\vec{v}_G$ لمركز عطالة (G) للجملة بين لحظتين متقاربتين تؤطران اللحظة t أي من أجل مجال زمني Δt صغير.

ملاحظة

مسألة اتجاه $\vec{F}$ أو $\sum\vec{F}$ بجهة $\Delta\vec{v}_G$ قد علمناها. أما مسألة تناسب $\vec{F}$ مع $\frac{\Delta\vec{v}_G}{\Delta t}$ فسنفسرها بتأثير كتلة المتحرك (m) على حركته.

تأثير الكتلة على الحركة

في الدراسة السابقة استطعنا أن نحدد جهة وحامل القوة $\vec{F}$ وكيف أن لها نفس حامل التسارع فقد أعاد نيوتن تجربة غاليليه في السقوط الحر لكرات لها كتل مختلفة وتركها تسقط من قمة برج عال. فتبين له أن الأجسام تستغرق في سقوطها أزمنة متساوية وبالتالي تكتسب سرعا متساوية.

نتيجة1 استنتج نيوتن أن حركة الجسم الساقط مستقلة عن كتلته.

جعل نيوتن الكرات السابقة فوق سطح أفقي أملس تماما، وأثر على جميعها بنفس القوة فلاحظ أن الكرة التي لها كتلة أكبر تكتسب سرعة أقل.

نتيجة2 استنتج نيوتن أن حركة الجسم فوق المستوي الأفقي تتعلق بكتلته.

تطبيق

يبدو أن هناك تناقضا بين النتيجة 1 والنتيجة 2 ؟

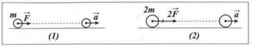
للخروج من هذا التناقض، فرق نيوتن في البداية بين كتلة الجسم أثناء سقوطه وبين كتلته أثناء حركته على سطح الأرض. فسمى الأولى الكتلة الجاذبة (الكتلة الثقالية) *Masse pesanteur* وسمى الأخرى (الكتلة العطالية) *masse inertielle*.

فالكتلة الجاذبة للجسم تتجلى أثناء سقوطه على الأرض والكتلة العطالية له تتجلى أثناء حركته على سطح الأرض.

• ثم أجرى نيوتن دراسة معمقة من أجل إزالة التناقض الظاهري بين النتيجتين 1 و 2 فطرح السؤال التالي: **كيف يمكن لأجسام لها كتل مختلفة، أن تكتسب نفس التسارع ؟**

للإجابة عن هذا السؤال قام نيوتن بسلسلة من التجارب:

تجربة 1



قذفت كرة كتلتها (m) فوق سطح أفقي أملس بقوة $\vec{F}$ فوجد أنها تكتسب تسارعا $\vec{a}$ (الشكل 1).

كرر التجربة لكرة أخرى كتلتها $(2m)$ أي ضعف كتلة الكرة الأولى فوق سطح أفقي أملس بقوة $2\vec{F}$، أي شدتها ضعف شدة القوة التي أثرت على الكرة الأولى فوجد أن الكرة اكتسبت نفس التسارع $\vec{a}$ الذي اكتسبته الكرة الأولى (الشكل 2).

وهكذا يكون نيوتن قد خلص إلى النتيجة التالية مجيبا عن السؤال السابق:

يمكن للأجسام ذات الكتل المختلفة، أن تكتسب نفس التسارع شريطة أن يؤثر عليها بقوى مختلفة تتناسب مع كتلتها (العطالية).

هذه النتيجة قادت نيوتن لأن يطرح سؤالا آخر ذا أهمية بالغة وهو:

هل الأجسام ذات الكتل المختلفة، الساقطة سقوطا حرا تخضع جميعا لنفس قوة جذب الأرض لها ؟ أم أن كلا منها يخضع لقوة جذب مختلفة تتناسب مع كتلته ؟

إن الدراسة السابقة جعلت نيوتن يجيب كما يلي:

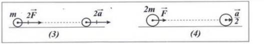
إن كل جسم ساقط باتجاه الأرض يخضع لقوة جذب مختلفة تتناسب مع كتلته، ولهذا السبب يكتسب نفس التسارع $\vec{g}$ (جاذبية الأرض).

وبهذه الدراسة يكون نيوتن قد أزال نهائيا التناقض الظاهري بين النتيجتين 1 و 2 وجعلته يقبل بأنه لا فرق بين الكتلة العطالية والكتلة التجاذبية.

إذن الكتلة العطالية ≡ الكتلة الجاذبة.

استرسل نيوتن في تجاربه كما يلي:

تجربة 2



• قذف مرة أخرى الكرة ذات الكتلة (m) بالقوة $2\vec{F}$ فوجد أنها تكتسب تسارعا $2\vec{a}$ (الشكل 3)، فاستنتج ما يلي:

كلما زادت القوة المؤثرة على الجسم، زادت قيمة التسارع الذي يكتسبه هذا الجسم. فالتسارع a يتناسب طردا مع القوة F: $a \propto F$.

• قذف الكرة $(2m)$ بالقوة $\vec{F}$ فوجد أنها تكتسب تسارعا $\frac{\vec{a}}{2}$ أي نصف التسارع السابق (الشكل 4)، فاستنتج ما يلي:

كلما زادت كتلة (الكتلة العطالية) الجسم كلما نقص تسارعه، فالتسارع a يتناسب عكسا مع الكتلة:

$$\boxed{a \propto \frac{1}{m}}$$

في الأخير نكتب: $a \propto F$ و $a \propto \frac{1}{m}$.

إذن $a \propto \frac{F}{m}$ ولإزالة إشارة التناسب $\propto$ نضع مكانها ثابت التناسب k أي: $a = k\frac{F}{m}$

إذن $\boxed{F=ma}$ وهذا ما يعرف بالقانون الثاني لنيوتن.

نص القانون الثاني لنيوتن

في معلم عطالي مجموع القوى $\sum\vec{F}$ المؤثرة على جملة ميكانيكية كتلتها m تساوي حاصل جداء كتلتها في تسارع مركز عطالتها $\vec{a}$. ويعبر عنه رياضيا بالصيغة $\sum\vec{F} = m\vec{a}$.

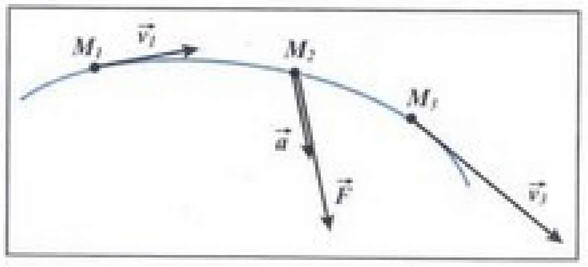
*** نتائج**

تسارع مركز عطالة الجملة الميكانيكية $\vec{a}$ له نفس حامل مجموع القوى $\vec{F}$.

إذا كان $\sum\vec{F}=\vec{0}$ فإن $\vec{a}=\vec{0}$

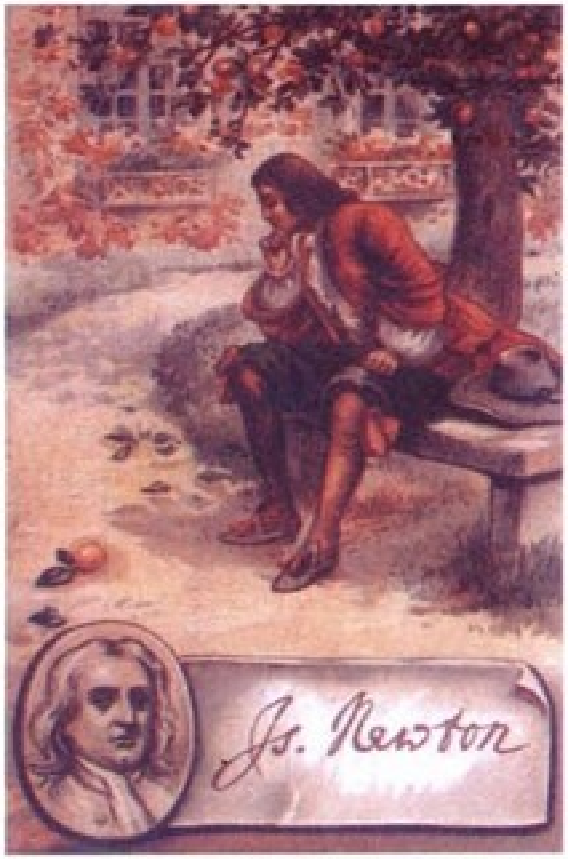
وبالتالي: ثابت $\vec{v} = \overrightarrow{Cte}$

فنجد مبدأ العطالة (القانون الأول لنيوتن).



محاكمة غاليله من طرف الهيئة المقدسة للفاتيكان.

وكان ذلك يوم 20 جويلية 1633م، لأنه تبنى النموذج الهيليومركزي الذي ينادي بدوران الأرض حول الشمس. فخاف على حياته، لذلك تراجع عما قاله حول دوران الأرض حول الشمس، فخفف عليه الحكم من الإعدام إلى النفي. أصدر الفاتيكان اعتذارا رسميا لغاليله سنة 1980م، بعد 338 سنة من وفاته...



نيوتن وأسطورة التفاحة

الوحدة 4

تطور جملة ميكانيكية

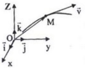
I/ مقاربة تاريخية لميكانيك نيوتن

1/ الحركة

وصف الحركة يتمّ بتحديد : **أين** تمّت الحركة ؟ **متى** حدثت ؟ **من** المتحرّك ؟

أين تفيد المكان الذي تمّت فيه الحركة ويتطلّب تحديد **المرجع**، ومن ثمّ المعلم المناسب، ويجب أن يكون عطاليا، وبه نعيّن نوع المسار. **متى** تفيد الزّمن الذي استغرقته الحركة، وتتطلّب تحديد مختلف اللّحظات الزّمنية المسجّلة أثناء الحركة. **من** تفيد المتحرّك نفسه، الذي يُدعى **الجملة الميكانيكية**، ومن هذه الجملة نختار نقطة مميّزة ندرسها وهي **مركز العطالة**، (وهي نفسها **مركز الثقل** G ، في حقل جاذبية منتظم، وأيضا هي **مركز الكتلة**).

2/ الدراسة الشعاعية للحركة في معلم فضائي كارتيزي (ديكارتي) $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$



• شعاع الموضع $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

الفاصلة $x(t)$

الترتيبة $y(t)$

السمت (الراقم) $z(t)$

• شعاع السّرعة اللحظية $\vec{v}$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dot{y} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = \dot{z} \end{cases}$$

• قيمة شعاع السّرعة : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

• حامل شعاع السّرعة : مماسي للمسار.

• جهة شعاع السّرعة : بجهة الحركة.

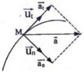
• شعاع التسارع اللحظي $\vec{a}$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \quad \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{cases}$$

• قيمة شعاع التسارع : $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

• حامله وجهته : نحو داخل تقعّر انحناء المسار.



• في معلم فريني $(M,\vec{u}_T,\vec{u}_N)$

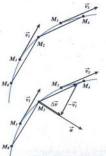
• شعاع السّرعة اللّحظية : $\vec{v} = v\vec{u}_T$

• شعاع التسارع اللحظي

$$\begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} \\ a_N = \dfrac{v^2}{\rho} \end{cases} \quad \vec{a} = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N$$

حيث ρ نصف قطر انحناء المسار

3/ دراسة وثيقة ■ الدراسة التّقريبية للحركة



• إذا كانت مدّة التسجيل τ صغيرة في حدود $\tau \approx 10^{-3}\,s$

• شعاع السّرعة اللحظية $\vec{v}$

• قيمتها :

$$v_1 = v_{(t_1)} \approx \frac{M_0M_2}{2\tau} \quad , \quad v_3 = v_{(t_3)} \approx \frac{M_2M_4}{2\tau}$$

• حاملها : المماس للمسار في مختلف مواضع المتحرّك.

• جهتها : بجهة الحركة.

شعاع تغيّر السّرعة $\Delta\vec{v}$

$$\Delta\vec{v}_2 = \vec{v}_3 - \vec{v}_1$$

• قيمته بطول $\Delta\vec{v}_2$

• جهته وحامله : نحو داخل تقعّر انحناء المسار.

• شعاع التسارع اللحظي $\vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

• قيمته : $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

• جهته وحامله : نحو داخل تقعّر انحناء المسار (بجهة $\overrightarrow{\Delta v}$).

4/ أنواع الحركات

في مرجع الحركة، تكون حركة نقطة مادية (M) :

• **منتظمة** : إذا كانت قيمة شعاع السرعة اللحظية $\vec{v}(t)$ ثابتة.

• **متسارعة** : إذا كانت قيمة شعاع السرعة اللحظية $\vec{v}(t)$ تزداد بتغيّر الزمن.

• **متباطئة** : إذا كانت قيمة شعاع السرعة اللحظية $\vec{v}(t)$ تنقص بتغيّر الزمن.

5/ القوانين الثلاثة لنيوتن

• **القانون الأوّل (أو مبدأ العطالة)**

في معلم عطالي، إذا كان مجموع القوى $\sum \vec{F}$ المؤثرة في جملة ميكانيكية معدوم فإن هذه الجملة إمّا ساكنة أو متحرّكة حركة مستقيمة، والعكس صحيح.

الجسم ساكن بالنسبة لمعلم الحركة : $\boxed{\sum \vec{F} = \vec{0} \;\left|\; \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{0} \\ \vec{v} = Cte \end{array}\right.}$

• **القانون الثاني (أو نظرية مركز العطالة)**

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G}$$

$\sum \vec{F}$ مجموع القوى المؤثرة في الجملة الميكانيكية

$\vec{a}_G$ تسارع مركز عطالة الجملة في معلم عطالي.

• **القانون الثالث (مبدأ الفعلين المتبادلين)**

إذا أثرت جملة ميكانيكية (A) على جملة (B) بقوّة $\vec{F}_{A/B}$ فإن الجملة (B) تؤثر على (A) بقوّة $\vec{F}_{B/A}$ تساويها في الشدّة وتعاكسها في الاتجاه : $\boxed{\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}}$

التمرين 1

يقول أرسطو في الحركة :

(الجسم المتحرك يتوقف عن الحركة، عندما تنعدم القوّة التي كانت تدفعه).

1/ هل نفهم من قول أرسطو، أن الحركة تحتاج إلى قوة ؟

2/ حسب قول أرسطو، هل نفهم منه أن السرعة دلالة على وجود قوة خارجية تؤثر على الجسم

3/ هل نترجم الكلام السابق بأن القوة الدافعة $\vec{F}$ تتناسب مع السرعة $\vec{v}$ للجسم، وإذا كان كذلك، فهل حسب ميكانيك أرسطو إذا كان الجسم يتحرك بسرعة ثابت أي $\vec{v} = \overrightarrow{Cte}$ فإن $\vec{F} = \overrightarrow{Cte}$ أي $\vec{F}$ ثابت ؟

الحل

1/ نعم، نفهم من قول أرسطو أن الحركة تحتاج إلى قوّة لكي تستمر.

2/ حسب قول أرسطو فإن السّرعة دلالة على وجود القوة الخارجية بدليل أنه قال إذا انعدمت القوة الخارجية، توقّف الجسم عن الحركة (بمعنى انعدمت سرعته).

3/ نعم، حسب أرسطو $\vec{F}$ يتناسب مع $\vec{v}$ ، أي $\vec{F} \propto \vec{v}$

الرّمز $\propto$ هو رمز التناسب

حسب ميكانيك أرسطو $\vec{F} \propto \vec{v}$

فإذا كان $\vec{v} = \overrightarrow{Cte}$ فإن $\vec{F} = \overrightarrow{Cte}$ ، ثابت أيضا

تعليق : سنرى في التمرين 2 أن فكرة أرسطو في الميكانيك غير صحيحة.

التمرين 2

يقول غاليله في كتابه (علمان جديدان) :

إن أية سرعة تنحفظ تماما، طالما بقيت الأسباب الخارجية للتسارع أو التباطؤ غائبة، وهو شرط لا يتحقق إلاّ في المستوى الأفقي، لأنه يوجد في المستوى اللاّأفقي، سبب للتسارع باتجاه النزول وسبب للتباطؤ باتجاه الصعود. ومن هذا ينتج أن الحركة على المستوى الأفقي متواصلة والسرعة ثابتة لعدم وجود سبب يضعفها أو يعدمها.

1/ عبّر بمقادير فيزيائية عن المفاهيم التالية :

أ/ السرعة تنحفظ تماما

ب/ الأسباب الخارجية للتسارع أو للتباطؤ غائبة

2/ حسب غاليله، بيّن فيما إذا كانت توجد علاقة بين القوة الخارجية $\vec{F}$ وسرعة الجسم $\vec{v}$ أو علاقة بين القوة الخارجية $\vec{F}$ وتغيّر السرعة $\Delta\vec{v}$

3/ استنادا إلى غاليله، فهل أن وجود السرعة $\vec{v}$ لجسم ما، دلالة على أن الجسم يخضع لقوى خارجية.

4/ من من العالمين غاليله وأرسطو، بنى أفكاره في الحركة على أسس علمية.

الحل

1/ أ/ السرعة تنحفظ تماما، يُعبّر عنها بأن $\vec{v} = \overrightarrow{Cte}$

ب/ الأسباب الخارجية للتسارع أو التباطؤ غائبة ، معناه أنّ مجموع القوى الخارجية $= 0$ ،

$$\boxed{\sum \vec{F} = \vec{0}}$$

2/ حسب غاليله ، $\boxed{\vec{F} \propto \Delta\vec{v}}$

3/ حسب غاليله ، السرعة لا تنبئ عن وجود قوة.

فالجسم إذا كانت له سرعة ثابتة $\vec{v} = \overrightarrow{Cte}$ فإنه إمّا أنه لا يخضع إلى أيّة قوّة خارجية أو أن مجموع القوى الخارجية عليه معدوم. أي أنه إذا كان $\vec{v} = \overrightarrow{Cte}$ فإن $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ أو $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$.

4/ إذا ما قارنا نتائج أفكار غاليله وأرسطو في الحركة، فإننا نجد أنها متناقضة، إذ أنّ أرسطو بنى أفكاره في الحركة على "الحدس" والمناقشات الفلسفية، لذا أتت أفكاره غير متماسكة، وتنقصها الدلائل العلمية. أما غاليله، فقد اعتمد على التجربة، والتجريب أسلوبا ومنهاجا، وخاض في ذلك معارك كبيرة، ولذا أتت أفكاره متماسكة مبنية على البراهين العلمية. ولذا يعتبر غاليله مؤسس المنهج التجريبي العلمي الحديث. وقد قال فيه اينشتاين هذه المقولة الشهيرة " إن التجربة هي لبّ اكتشاف غاليله ". من كتاب اينشتاين تطوّر الأفكار في الفيزياء.

التمرين 3

يقول اينشتاين في كتابه تطوّر الأفكار في الفيزياء : (إنّ النتيجة الصحيحة التي استنبطها غاليله، صاغها نيوتن بعد جيل من الزّمان بالنص المعروف باسم مبدأ العطالة).

نص مبدأ العطالة

(إنّ كلّ جسم يبقى على حالته من السكون ومن الحركة المنتظمة في خطّ مستقيم، إلاّ إذا أجبر على تغيير هذا الحالة بواسطة قوى تتسلّط عليه).

ويستطرد اينشتاين قائلا :

(إن قانون العطالة لا يمكن أن يستمد من التجربة مباشرة، بل وحصراً من المجهود الفكري المتلائم مع الملاحظة، فالتجربة المثالية لا يمكن أن تتحقق عملياً إطلاقا بالرّغم من أنها هي التي تقود إلى فهم عميق للتجربة الواقعية ...).

1/ اشرح مبدأ العطالة في ضوء المقادير الفيزيائية الحديثة $\vec{v}$ و $\vec{F}_{ext}$ و $\sum \vec{F}_{ext}$.

2/ اشرح قول اينشتاين عن مبدأ العطالة

الحل

1/ شرح مبدأ العطالة

إنّ مبدأ العطالة الذي وضعه ،غاليله،، وصاغه ،نيوتن، ينص على أن أيّ جسم لا يستطيع بنفسه تغيير حالته الحركية (زيادة سرعته، أو إنقاصها، أو تغيير جهة حركته)، فهو إذن ،عاطل، عن تغيير حالته الحركية، فهو إن كان في الأصل ساكنا بالنسبة لمعلم معيّن، بقي ساكنا، ما لم تؤثر عليه قوة خارجية، وإن كان، متحركا حركة مستقيمة منتظمة باعتباره جملة شبه معزولة ميكانيكيا، فإنه يبقى على هذه الحالة الحركية، إلاّ إذا أثرت عليه قوة خارجية.

نترجم مبدأ العطالة رياضيا كما يلي :

إذا كان $\vec{v} = \vec{0}$ ، فالجسم ساكن بالنسبة لمعلم معيّن وهذا يتطلب أنه لا يخضع إلى أيّة قوة خارجية أي : $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ أو $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

إذا كان $\vec{v} = \overrightarrow{Cte}$ ، فالجسم يتحرك حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لمعلم معيّن وهذا يتطلب القول إن $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ أو $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

ملاحظة هامة

- الجسم الذي لا يخضع إلى أية قوة خارجية $\vec{F}_{ext}$ ندعوه جملة معزولة ميكانيكيا، مثل هذا الجملة يجب أن تكون وحدها في الطبيعة، وهذا مستحيل
- الجسم الذي يخضع لقوى خارجية لكن مجموعها معدوم $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ ، تسمّى الجملة شبه المعزولة ميكانيكيا.

2- شرح اينشاتين لمبدأ العطالة

يقول اينشتاين إن مبدأ العطالة لا يمكن أن يتحقق تجريبيا بصفة مطلقة. لأنه لكي يكون $\vec{v} = \overrightarrow{Cte}$ يجب أن يكون المسار مستقيما، ولا يوجد مسار مستقيم في الطبيعة (فمسارات الأرض مثلا كلّها منحنيه) كما يجب أن يتحقق $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ ، وهذا لا يتحقق إلاّ بصفة تقريبية، لأنّ أيّ جسم في الطبيعة يخضع لتأثيرات كل الأجسام في الطبيعة من أقرب جسم منه، إلى أبعد نجم عنه بالرّغم من ضآلة شدتها، وعدم تأثيرها عمليا على حركته.

وعليه فإنه من الناحية المثالية المطلقة يستحيل تحقيق $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ على جسم، وبالتالي يستحيل تطبيق مبدأ العطالة عليه.

ولتقريب الصورة، نتخيّل التجربة المثالية الذّهنية التالية :

- تدفع كرية ملساء فوق منضدة خشبية، فتتحرك مسافة معيّنة ثم تتوقف نتيجة لوجود قوى الاحتكاك.
- تدفع الكرية مرّة ثانية ، بنفس السرعة الابتدائية السابقة، لكن هذه المرة فوق منضدة زجاجية، نلاحظ أنها تقطع مسافة أكبر ثم تتوقف.
- نعيد التجربة مرّة ثالثة ورابعة، وخامسة... في كلّ مرّة نستعمل زجاجًا صقيلا أكثر فأكثر، نلاحظ في كلّ مرّة أن المسافة المقطوعة تكون أكبر فأكثر، وهكذا إذا تخيّلنا عدم وجود احتكاك بين الكرية، والمنضدة الأفقية وأعطينا للكرية سرعة ابتدائية، فإنها ستتحرك حركة مستقيمة منتظمة، لا توقف بعدها.

وبهذه التجربة الذهنية (المثالية) يكون اينشتاين قد أعطى تصوّراً عميقًا لمبدأ العطالة. جعلتنا نفكّر في تحسين وسائلنا التجريبية، لتحقيق مبدأ العطالة بصورة أدق وأحسن مثال على ذلك (المنضدة الهوائية).

التمرين 4

وضع أرسطو نظرية كاملة في الميكانيك، وقسمها إلى ميكانيك سماوية فلكية مثالية، وميكانيك أرضية فيها نوعين من الحركات، وهما الحركات الطبيعية (كالسقوط الحرّ وحركة الكواكب)

والحركات العنيفة (كحركة القذائف) وفي السقوط الحرّ قال ارسطو : (تسقط الأجسام الثقيلة بسرعة أكبر من الأجسام الخفيفة).

اراد غاليله ان يدحض فكرة ارسطو في السقوط الحرّ فقام بسلسلة من التجارب من أعلى برج بيزا بايطاليا (*la tour de pize*) التي ترتفع على سطح الأرض 100 ذراع (الذارع هو طول الساعد ويساوي $50cm$ تقريبا). وترك عدّة أجسام مختلفة : كرة حديدية من 100 ليفر وكرة أخرى من 1 ليفر (1 ليفر $= 478\ g$)، كرة من الخشب، ... إلخ. بعد التجربة كتب غاليله ما يلي :

(يصرح ارسطو ان الكرة الحديدية من 100 ليفر والكرة الحديدية من 1 ليفر، عندما يتركهما يسقطان معا، فإنه عندما تنزل الكرة الأولى 100 ذراع ، تكون الأخرى نزلت ذراعًا، وانا اجزم ان الكرتين تصلان إلى الأرض معا. وإذا قمتم بالتجربة فسترون أن الفارق لا يتجاوز عرض أصبعين ولن تجدوا فارق 99 ذراعًا الذي توقعه أرسطو).

1/ اعط نظرية السقوط الحرّ حسب أرسطو ثمّ غاليله، وبيّن الوسيلة التي اعتمدها في ذلك كل واحد منهما. استخرج من النص السابق ما يؤيد شرحك.

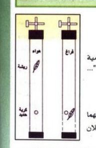
2/ من تجاربك اليومية هل إذا تركنا ريشة تسقط مع كرة حديدية.

ا/ فهل تترافقان في حركتيهما ؟

ب/ إذا كان جوابك (لا)، فهل هذا يعني أن نظرية ارسطو في سقوط الأجسام صحيحة ؟ اين الإشكالية إذن ؟

ج/ ميّز إذن بين سقوط الأجسام في الهواء وسقوطها في الخلاء.

الحل



1/ نظرية السقوط الحرّ حسب ارسطو

" تسقط الأجسام الثقيلة بسرعة أكبر من الأجسام الخفيفة ".

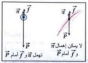
من المعلوم أن أرسطو اعتمد في وضع نظريته هذه على المناقشات الكلامية والتوقّعات فقط.ونستشفّ هذا الكلام عندما قال غاليله عن أرسطو "... الذي توقّعه ارسطو".

نظرية السقوط الحرّ حسب غاليله

" تترافق الأجسام السّاقطة سقوطا حرًا في حركتها ".

وقد اعتمد غاليله في وضع نظريته على التجربة فترك كرتين وزنيهما (100 ليفر) و(1 ليفر) يسقطان من أعلى برج بيزا، فوجد أن الكرتين تصلان إلى الأرض معا.

2/ا/ من التجارب اليومية، نعلم أنه عند ترك ريشة وكرة حديدية يسقطان فإن كرة الحديد تصل قبل الرّيشة. وبالتالي لا يترافقان في حركتيهما.



ب/ إن نظرية ارسطو يمكن اعتبارها صحيحة إذا تمّ السقوط في الهواء، وكانت الأجسام مختلفة الكثافة (فكثافة الرّيشة أصغر بكثير من كثافة كرة الحديد).

وسبب ذلك يعود إلى أنّ الأجسام أثناء سقوطها، تكون خاضعة بالإضافة إلى ثقلها $\vec{P}$ إلى قوى الاحتكاك بالهواء $\vec{f}$، وإلى دافعة ارخميدس $\vec{\pi}$.

فإذا كانت ذات كثافة كبيرة يمكن إهمال كلّ من $\vec{f}$ و $\vec{\pi}$ امام $\vec{P}$.

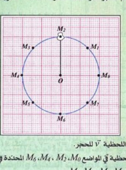
امّا إذا كانت ذات كثافة صغيرة، فإنه لا يمكن إهمال $\vec{f}$ و $\vec{\pi}$ امام $\vec{P}$.

ج/ في حالة عدم وجود الهواء (الخلاء) فإن $\vec{\pi}=\vec{0}$ و $\vec{f}=\vec{0}$ وعليه فإن الرّيشة تصبح خاضعة لثقلها $\vec{P}$ فقط، لذا تترافق في حركتها مع كرة الحديد، وندعو في هذه الحالة هذا السقوط بالسقوط الحرّ.

وقد قام احد تلاميذ غاليله وهو العالم (توريشيلي *Toricelli*) سنة بعد موت غاليله بتجربة داخل أنبوب مفرّغ من الهواء وترك (ريشة) مع (تفاحة) يسقطان داخل الأنبوب، فوجد أنهما يترافقان في حركتيهما.

التمرين 5 ـ التأسيس لتوحيد الحركات الأرضية والفلكية

حجر مربوط بخيط. نمسك الخيط باليد في النقطة (O) منه، وندير الحجر في مستو شاقولي بسرعة ثابتة الشدة. فيرسم الحجر دائرة نصف قطرها $R=50cm$، وينجز دورة واحدة خلال دور زمني $T=2s$.



1/ احسب قيمة السرعة اللحظية $\vec{v}$ للحجر.

2/ مثل شعاع السرعة اللحظية في المواضع M_0، M_2 ، M_4، M_6 المحدّدة في الشكل المقابل.

3/ا/ مثل $\Delta\vec{v}$ في المواضع M_1، M_3 ، M_5، M_7

ب/ حدّد خصائص $\Delta\vec{v}$.

4/ا/ ما هي القوّة التي جعلت الحجر يتحرّك في مسار دائري ؟
(نهمل تاثير قوّة جذب الأرض للحجر امام هذه القوّة).

ب/ مثل هذه القوّة في الموضع M_2

ج/ ما هي النتيجة التي يمكن ان تستخلص من هذه الدراسة ؟

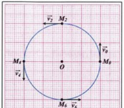
5/ ما وجه الشبه بين حركة دوران الحجر وحركة دوران القمر حول الأرض ؟ اشرح.

الحل

1/ حساب قيمة السرعة اللحظية $\vec{v}$

في حالة الحركة الدائرة المنتظمة نستعمل العبارة التالية لإيجاد $\vec{v}$ ،

$$v = \frac{\text{محيط الدائرة}}{\text{زمن دورة واحدة}} = \frac{\widehat{M_0 M_0}}{T} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \times 0,5}{2} = \frac{\pi}{2} = 1,57\ m/s$$



لاحظ أن $\widehat{M_0 M_0}$ هو قيس قوس (هو محيط الدائرة) وليس $M_0 M_0$ الذي قيمته معدومة.

$$\boxed{v = \frac{\pi}{2} = 1,57\ m.s^{-1}}$$

2/ تمثيل أشعة السرعة اللحظية

بما أن الحركة دائرية منتظمة فإن قيمة السرعة اللحظية ثابت $= v$

يمثل $\vec{v}$ بشعاع حامله هو المماس للمسار في النقاط المعينة M_6 ،M_4 ، M_2 ،M_0

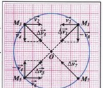
مقياس رسم السرعة : $1,57cm \to 1cm$

3/أ/ تمثيل $\Delta\vec{v}$ في المواضع M_1 ، M_3 ، M_5 ،M_7

في الوضع M_1 : الموجود بين الموضعين (M_0) و(M_2)

لدينا : $\Delta\vec{v}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_0$

لذا نمثل من النقطة M_1 الشعاع $\vec{v}_2$ والشعاع $(-\vec{v}_0)$، ثمّ نعيّن محصلتهما كما هو موضح في الشكل المقابل.



في الموضع M_3 : بنفس الطريقة نكتب : $\Delta\vec{v}_3 = \vec{v}_4 - \vec{v}_2$

نفس الشيء في الموضع (M_5) إذ نكتب : $\Delta\vec{v}_5 = \vec{v}_6 - \vec{v}_4$

وكذلك في الموضع (M_7) نكتب : $\Delta\vec{v}_7 = \vec{v}_8 - \vec{v}_6$

ب/ خصائص $\Delta\vec{v}$

الحامل : قطر الدائرة

الاتجاه : نحو مركز الدائرة

القيمة

• طريقة 1

بالقياس نجد : $\Delta v = \Delta v_1 = \Delta v_3 = \Delta v_5 = \Delta v_7 \to 1,4cm$

وحسب مقياس رسم السرعة فإن : $1,57\ m.s^{-1} \to 1cm$

إذن : $\Delta v = 1,57 \times 1,4$ ، ومنه : $\boxed{\Delta v \approx 2,2\ m.s^{-1}}$

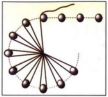
• طريقة 2 : $\Delta\vec{v}$ يعتبر وترا في مثلث قائم ضلعاه متقايسان فحسب نظرية فيثاغورث

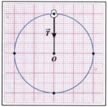
$\Delta v = \sqrt{v_2^2 + v_0^2}$ وبما أن $v_2 = v_0$ فإن : $\Delta v_1 = \sqrt{2v_0^2} = v_0\sqrt{2}$

$\Delta v_1 = 1,57\sqrt{2}$; $\Delta v_1 = 2,2\ m.s^{-1}$ وهي نفس النتيجة في الطريقة 1.

4/أ/ القوة التي جعلت الحجر يتحرك في مسار دائري هي قوة شد الخيط $\vec{T}$ فلو تركنا الخيط من يدنا لارتخى الخيط، وبالتالي يصبح غير مشدود أي $\vec{T} = \vec{0}$ وبالتالي ينفلت الحجر من الخيط تماما مثلما يحدث في انفلات الحجر من المقلاع (*la fronde*). وهذا يؤكّد ضرورة وجود قوة جاذبة تمسك بالحجر فتجعله يتحرك في مسار دائري.

ب/ لاحظ أن $\vec{T}$ تتجه نحو المركز (O)، تماما مثل شعاع تغيّر السرعة $\Delta\vec{v}$ وهذا ما هو معلوم سلفا. إذ يجب أن تكون القوة المسببة للحركة بجهة تغير السرعة $\Delta\vec{v}$.





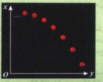
ج/ النتيجة المستخلصة : حتى يتحرك جسم حركة دائرية منتظمة يجب أن يخضع لقوة تتجه نحو مركز الدوران. تسمى هذه القوة بالقوة الجاذبة المركزية (*force centrifuge*).

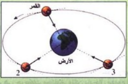
5/ حسب نيوتن، فإن القمر يخضع لقوة الجاذبية الناتجة عن الأرض، وهذه القوة تتجه نحو مركز الأرض، فهي قوة مركزية.

وأيضا الحجر أثناء دورانه في المقلاع، يخضع لقوة شد الخيط وهي أيضا قوة مركزية. و هنا يكمن وجه الشبه بين الحركتين، مع اختلاف في طبيعة الجاذبية وقوة شد الخيط.

التمرين 6 ـ نيوتن وتوحيد الحركات الفلكية والأرضية

1/ ما وجه الشبه بين حركة سقوط الأجسام باتجاه سطح الأرض وحركة دوران القمر حول الأرض (الوثيقة 1) برّر الإجابة (يمكنك الاستفادة من نتائج التمرينين 5 و6).





الوثيقة 1

2/ رسم نيوتن في كتابه (المبادئ) شكلا يحمل رقم *213*، كما هو موضح في الوثيقة 2 وقد جاء تحت الشكل ما يلي:

(إن الحجر المرمي ينحرف بتأثير الجاذبية عن طريقه المستقيم، ويتخذ مسارًا منحنيا ثم يسقط أخيراً على الأرض. وإذا رمي بسرعة كبيرة، فسوف يسقط متوغلا إلى ما أبعد من ذلك. فإذا قذف بسرعة تتزايد شيئا فشيئا فإنه سيرسم قوسًا مقداره 1، 2، 10، 100 و1000 ميل قبل أن يصل إلى الأرض، وسيذهب أخيراً في الفضاء متجاوزًا حدود الأرض دون أن يلاقيها، ويبدأ بالدوران حول الأرض، مثلما تدور الكواكب على مداراتها في الفضاء الكوني... ".

الشكل 213 من كتاب المبادئ

بناءً على الدراسة في السؤال 1، وفكرة نيوتن في السؤال 2، هل يمكن القول:

أ/ إن القمر هو في حالة سقوط حرّ دائم على الأرض، مستمر ؟

ب/ إن قوة الجاذبية هي المسؤولة عن سقوط الحجر، وحركة القمر على مداره ؟

3/ إن الدّراسة السابقة جعلت نيوتن يخلص إلى نتيجة عظيمة. هل يمكن أن تسجلها لنا ؟

الحل

1/ كلّ الأجسام الساقطة أثناء حركتها تخضع لقوة جذب الأرض لها. تمامًا مثل القمر فإنه أثناء دورانه حول الأرض يخضع لقوة جذب الأرض له، رغم أن الحركات مختلفة إلاّ أنه يمكن تشبيهها ببعضها البعض لأنها جميعا تخضع لقوة جذب الأرض لها.

2/ أ/ بناءً على الوثيقة 2 لنيوتن، نعتبر أن حركة دوران القمر حول الأرض هو حالة خاصّة من السّقوط لكنه سقوط دائم، تحوّل إلى دوران، نتيجة للسرعة الكبيرة التي يتحرك به القمر حول الأرض فلو نقصت سرعة القمر (وهذا أمر غير وارد) لسقط على الأرض، نتيجة خضوعه لقوة الجاذبية.

ب/ نعم إن قوة الجاذبية هي المسؤولة عن سقوط الحجر والأجسام باتجاه الأرض كما أنها مسؤولة عن دوران القمر حول الأرض.

3/ إن النتيجة العظيمة الرائعة التي توصّل إليها العالم العبقري نيوتن هي

- أن قوة الجاذبية هي المسؤولة عن حركة سقوط الأجسام، وهي المسؤولة أيضا عن حركة الكواكب في مدارها. فهي قوة عامة تخضع لها جميع الأجسام المادية.
- قوة الجاذبية توحّد الأرضية والفلكية.

وهنا تكمن عبقرية الرجل، فلو لم ندخل قوة الجاذبية للاحظنا أن حركة الصّعود والهبوط للأجسام وحركة القذيفة، وحركة الكواكب، هي حركات مختلفة. ولكن بإدخال مفهوم القوة تتوحّد جميع الحركات. وهكذا يكون نيوتن قد استطاع أن يوحّد بين الحركات الأرضية والفلكية.

العالم غاليله لم يجد الرابط المشترك بين هذه الحركات لأنه درسها دراسة حركية ناهيك عن أنه كان يرفض " جملة وتفصيلا " فكرة أن قوة الجاذبية تؤثر عن بعد.

يقول العالم الرياضياتي (لاغرانج *La grange*) في قانون الجاذبية:

" إن للكون قانونا واحدًا، وقد اكتشفه نيوتن ".

استزادة

• **نيوتن ودمجه للعلم والإيمان**

يقول نيوتن أن الكون يخضع لقوانين ثابتة، وضعها الخالق، فقال في هذا الصدد : " إن هذا النظام البديع، المكوّن من الشمس والكواكب والمذنبات، لا يمكن أن يسير إلاّ وفق هداية وربوبية كائن عظيم في منتهى الذكاء والحكمة... ". ثم يستطرد قائلا : " إنه الحاكم على كل شيء، العالم بكل شيء كان، أو يكون، وبما أنه في كل مكان فهو أقدر بمشيئته على تحريك الأجسام...، وبالتالي فهو قادر على تكوين وتصليح كل أجزاء الكون أكثر مما نستطيع نحن تحريك أطراف أبداننا بإرادتنا... ". أليست هذه كلمة سواء بيننا أليس هذا الكلام من وحي القرآن العظيم : ﴿ بديع السموات والأرض أنى يكون له ولد ولم تكن له صاحبة وخلق كل شيء وهو بكل شيء عليم ﴾ الأنعام، الآية *101*.

• **نيوتن وتوحيده للخالق**

عاش نيوتن موحدًا للخالق، إذ رفض بشدة فكرة التثليث طيلة حياته، وله بحوث توضح كيف ادخلت فكرة التثليث في الإنجيل، وقد ضمن هذه الأفكار في كتابه (عرض تاريخي لتحريفين بارزين للإنجيل) *An historical account of two notable corruptions of scripture* الذي ألفه عام *1690* م. ووصلت به معارضته للكنيسة الكاثوليكية التي تتبنى عقيدة الثالوث إلى رفضه أن تقيم له هذه الأخيرة صلاة المحتضر وهو على فراش الموت.

• **نيوتن وما كتب على قبره**

هنا يرقد
السّير إسحاق نيوتن
العالم الذي استطاع بقوة ذكائه الفذة
أن يفسّر لأوّل مرّة بواسطة طريقته الرياضياتية
حركات وأشكال الكواكب،
مسالك المذنبات، مدّ وجزر المحيط،
وهو أوّل من بحث أنواع الأشعة الضوئية،
وخصائص الألوان الناجمة عن ذلك،
تلك الخصائص التي لم يفكر أحد في وجودها قبله.
المفسر المجد، الثاقب الفكر والموثوق به،
للطبيعة والآثار القديمة والكتاب المقدس،
وقد مجد في تعاليمه الخالق العظيم.
لتبتهج البشرية الزائلة لأنه قد عاش بين ظهرانيها
مثل هذا العالم الذي يعتبر زينة للجنس البشري.

ولد في *25* ديسمبر *1642*
توفي في *20* مارس *1727*

التمرين 7

متحرك نعتبره نقطة مادية، قمنا بتسجيل مواضعه المختلفة فوق منضدة هوائية، وكان زمن التسجيل بين موضع وآخر يليه هو $\tau = 20\,ms$.

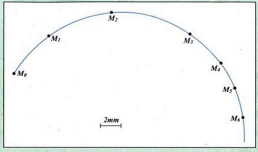
1/ أ/ انقل التسجيل على ورق مقوّى واحسب قيم السرعة في المواضع (M_1) و (M_3)، (M_5).

ب/ مثلها باختيار سلّم مناسب.

2/ أ/ مثل شعاعي تغير السرعة $\Delta\vec{v}$ بين اللحظتين (t_1) و (t_3) ثمّ بين (t_3) و (t_5).

ب/ احسب قيمة التسارع في اللحظة (t_2) اي $\vec{a}(t_2)$ واللحظة t_4، اي $\vec{a}(t_4)$ ومثلهما بيانيا مع اختيار سلّم مناسب.

ج/ قارن بين خصائص شعاعي التسارعين $\vec{a}(t_2)$ و $\vec{a}(t_4)$ قيّم النتائج ؟



الحل

1/ أ/ قيم السرعة

السرعة $\vec{v}_1$ في الموضع (M_1)

نعلم أن :
$$\vec{v}_1 \approx \frac{\overrightarrow{M_0M_2}}{t_2-t_0}=\frac{\overrightarrow{M_0M_2}}{\Delta t}=\frac{\overrightarrow{M_0M_2}}{2\tau}$$

$$\boxed{v_1=\frac{M_0M_2}{2\tau}}$$

لنعين M_0M_2

باستعمال آلة قياس الطول الميليمترية نجد $M_0M_2 = 50\,mm = 5\,cm$ وبالاستعانة بمقياس الرسم الموجود في الوثيقة وهو $\underline{2mm}$ ، وإذا قسنا طول هذه القطعة نجده $(1cm)$ اي ان :

$1cm \rightarrow 2mm$

لذا نكتب: $M_0M_2 = \frac{5\,cm \times 2\,mm}{1\,cm} = 10\,mm = 1\,cm$

كما أن $\tau = 20\,ms$، إذن $\tau = 20\times10^{-3}\,s$، ومنه $\tau = 2\times10^{-2}\,s$

نعوّض فنجد: $\vec{v}_1 \approx \frac{M_0M_2}{2\tau} = \frac{10^{-2}}{2(2\times10^{-2})} = 0,25$

$$\boxed{v_1 \approx 0,25\,m.s^{-1}}$$

السرعة $\vec{v}_3$ في الموضع (M_3)

نعلم أن: $\vec{v}_3 \approx \frac{\overline{M_1M_3}}{t_3-t_1} = \frac{\overline{M_1M_3}}{2\tau}$

$$\boxed{\vec{v}_3 = \frac{\overline{M_1M_3}}{2\tau}}$$

بالقياس نجد $M_1M_3 = 7\,cm$، وبالاستعانة بمقياس الرّسم نكتب:

$$M_1M_3 = \frac{7\times2}{2} = 14\,mm$$

$$v_3 \approx \frac{14\times10^{-3}}{2(2\times10^{-2})}\ ;\ \boxed{v_3 \approx 0,35\,m.s^{-1}}$$

السرعة $\vec{v}_5$ في الموضع (M_5)

لدينا: $\vec{v}_5 = \frac{\overline{M_4M_6}}{2\tau}$

$$v_5 = \frac{M_4M_6}{2\tau}$$

بالقياس نجد: $M_4M_6 \to 3\,cm$، وبالاستعانة بمقياس الرّسم:

$$M_4M_6 = \frac{3\,cm\times2\,mm}{1\,cm} = 6\,mm$$

$$v_5 \approx \frac{6\times10^{-3}}{2(2\times10^{-2})}\ ;\ \boxed{v_5 \approx 0,15\,m.s^{-1}}$$

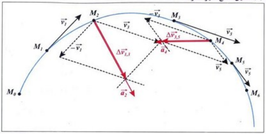
ب/ التمثيل: نختار السلّم $0,10\,m/s \to 1\,cm$ ويمكنك اختيار سلّم مناسب آخر.

وعليه يمثل $\vec{v}_1$ بشعاع طوله $\frac{0,25\times1}{0,10}$ أي $2,5\,cm$ ويكون مماسيا للمسار في النقطة (M_1).

ونمثل $\vec{v}_3$ بشعاع طوله $\frac{0,35\times1}{0,10}$ أي $3,5\,cm$ ويكون مماسيا للمسار في النقطة (M_3).

أما $\vec{v}_5$ فنمثله بشعاع طوله $\frac{0,15\times1}{0,10}$ أي $1,5\,cm$ ويكون مماسيا للمسار في النقطة (M_5).

2/ أ/ تمثيل شعاع تغير السرعة $\Delta\vec{v}$



بين اللحظتين (t_1) و (t_3):

لدينا: $\Delta\vec{v}_{1,3} = \vec{v}_3 - \vec{v}_1$

ويمكن كتابتها بالشكل الآخر: $\Delta\vec{v}_{1,3} = \vec{v}_3 + (-\vec{v}_1)$

لذا فإن $\Delta\vec{v}_{1,3}$ هي محصلة $\vec{v}_3$ و $(-\vec{v}_1)$، نمثلها في النقطة (M_2) الواقعة بين (M_1) و (M_3) (انظر الشكل المقابل).

بين اللحظتين (t_3) و (t_5):

لدينا: $\Delta\vec{v}_{3,5} = \vec{v}_5 - \vec{v}_3$

وأيضا نكتب: $\Delta\vec{v}_{3,5} = \vec{v}_5 + (-\vec{v}_3)$

لذا فإن $\Delta\vec{v}_{3,5}$ هي محصلة $\vec{v}_5$ و $(-\vec{v}_3)$، نمثلها في النقطة (M_4) المحصورة بين (M_3) و (M_5).

ب/ حساب قيمة التسارع $\vec{a}(t_2)$

إن اللحظة (t_2) واقعة بين اللحظتين (t_1) و (t_3) لذا نكتب: $\vec{a}(t_2) \approx \frac{\Delta\vec{v}_{1,3}}{t_3-t_1} = \frac{\Delta\vec{v}_{1,3}}{2\tau}$

إذن: $\boxed{\vec{a}(t_2) = \frac{\Delta\vec{v}_{1,3}}{2\tau}}$

لذا يجب تعيين قيمة $\Delta v_{1,3}$

بالقياس نجد $\Delta v_{1,3} \rightarrow 3,3cm$

وبالاستعانة بمقياس رسم السرعة وهو $1cm \rightarrow 0,10m.s^{-1}$

نجد ان : $\Delta v_{1,3} = 0,33m.s^{-1}$

إذن : $a(t_2) \approx \dfrac{0,33}{2(2\times10^{-2})}$ ومنه $a(t_2) \approx 8,25m.s^{-2}$

التسارع $\vec{a}(t_4)$: بنفس الطريقة نجد : $\vec{a}(t_4) \approx \dfrac{\Delta\vec{v}_{3,5}}{t_5 - t_3} = \dfrac{\Delta\vec{v}_{3,5}}{2\tau}$

$$\boxed{\vec{a}(t_4) = \frac{\Delta\vec{v}_{3,5}}{2\tau}}$$

نعيّن $\Delta v_{3,5}$: بالقياس نجد $\Delta v_{3,5} \rightarrow 2cm$

وبالاستعانة بالسلّم نجد : $\boxed{\Delta v_{3,5} = 0,2m.s^{-1}}$

نعوّض فنجد : $5 = \dfrac{0,2}{2(2\times10^{-2})}$. $a(t_4) \approx$ إذن : $\boxed{a(t_4) \approx 5m.s^{-2}}$

التمثيل : نمثل $\vec{a}(t_2)$ بشعاع خصائصه هي :

- الحامل : هو نفسه حامل $\Delta\vec{v}_{1,3}$.
- الجهة : نفس جهة $\Delta\vec{v}_{1,3}$ (نحو داخل تقعر انحناء المسار).
- القيمة : $a(t_2) \approx 8,25m.s^{-2}$

وباختيار السلم $2m.s^{-2} \rightarrow 1cm$ نجد ان $\vec{a}(t_2)$ يمثل بشعاع طوله $4,125cm = \dfrac{8,25}{2}$.

نمثل $\vec{a}(t_4)$ بشعاع خصائصه هي :

- الحامل : هو نفسه حامل $\Delta\vec{v}_{3,5}$.
- الجهة : نفس جهة $\Delta\vec{v}_{3,5}$ (نحو داخل تقعر انحناء المسار).
- القيمة : $a(t_4) \approx 5m.s^{-2}$

وباختيار السلم $2m.s^{-2} \rightarrow 1cm$ نجد ان $\vec{a}(t_4)$ يمثل بشعاع طوله $2,5cm = \dfrac{5}{2}$ (انظر الشكل السابق).

تقييم النتائج

- في الحركة المنحنية الكيفية التسارع $\vec{a}(t)$ يختلف في الحامل والجهة والقيمة في كل لحظة.
- جهة التسارع نحو داخل تقعر انحناء المسار.
- الشعاعان $\vec{a}(t)$ و $\Delta\vec{v}$ لهما نفس الحامل والجهة.

التمرين 8

تعطى لك الوثائق A و B و C و D . مدة التسجيل $\tau = 50ms$. نعتبر الموضع M_0 يوافق اللحظة الابتدائية $(t_0 = 0s)$.

1/ حدد نوع المسار لكل متحرك.

2/ احسب قيمة السرع اللحظية $\vec{v}(t_1)$ ، $\vec{v}(t_2)$ ، $\vec{v}(t_3)$ ، $\vec{v}(t_4)$ لكل متحرك.

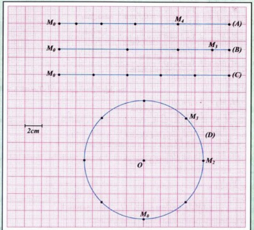
3/ ماذا تستنتج من حيث :

- تغيّر قيمة السرعة، ومقدار السرعة الابتدائية $v_0 = v(t_0)$ ؟
- طبيعة الحركة ؟

4/ مثل $\vec{v}(t_1)$ ، $\vec{v}(t_2)$ ، $\vec{v}(t_3)$ ، $\vec{v}(t_4)$.

5/ أ/ عيّن خصائص التسارع $\vec{a}(t)$ في اللحظتين t_1 و t_3 ومثلهما.

ب/ ماذا تستنتج ؟



الحل

1/ تحديد نوع المسار لكل متحرك

A و B و C لها مسارات مستقيمة. الجسم D مساره دائري.

2/ حساب قيم السرع اللحظية لكل متحرك

ننبه إلى أن مقياس رسم المسافة أعطى بـ $\overset{2cm}{\longmapsto}$ أي $1cm \rightarrow 2cm$

بالنسبة للمتحرك A : $v(t_1) = \dfrac{M_0M_2}{2\tau}$

بالقياس نجد أن $M_0M_2 = 2,5cm$

وباستعمال مقياس الرسم نجد : $M_0M_2 = \dfrac{2,5cm \times 2cm}{1cm} = 5cm = 5\times 10^{-2}\,m$

لدينا $\tau = 50ms$ أي $\tau = 5\times 10^{-2}s$

$$v(t_1) = \frac{5\times 10^{-2}}{2(5\times 10^{-2})} = 0,5m.s^{-1}$$

بالمثل نجد :

$$v(t_2) = \frac{M_1M_3}{2\tau} = \frac{3,5\times 2\times 10^{-2}}{2(5\times 10^{-2})} = 0,7m.s^{-1}$$

$$v(t_3) = \frac{M_2M_4}{2\tau} = \frac{4,5\times 2\times 10^{-2}}{2(5\times 10^{-2})} = 0,9m.s^{-1}$$

$$v(t_4) = \frac{M_3M_5}{2\tau} = \frac{5,5\times 2\times 10^{-2}}{2(5\times 10^{-2})} = 1,1m.s^{-1}$$

بالنسبة للمتحرك B : بنفس العمل السابق نجد :

$$v(t_1) = \frac{M_0M_2}{2\tau} = \frac{7\times 2\times 10^{-2}}{2(5\times 10^{-2})} = 1,4m.s^{-1}$$

$$v(t_2) = \frac{M_1M_3}{2\tau} = \frac{5\times 2\times 10^{-2}}{2(5\times 10^{-2})} = 1,0m.s^{-1}$$

$$v(t_3) = \frac{M_2M_4}{2\tau} = \frac{3\times 2\times 10^{-2}}{2(5\times 10^{-2})} = 0,6m.s^{-1}$$

$$v(t_4) = \frac{M_3M_5}{2\tau} = ?$$

لا نستطيع حساب $v(t_4)$ لأنه لم يعط الموضع (M_5)

بالنسبة للمتحرك C :

نلاحظ أن كل المسافات متساوية، وتمّ قطعها في أزمنة متساوية، لذا نتوقع أن تكون السرعة متساوية في كل اللحظات.

$$v(t_1) = \frac{M_0M_2}{2\tau} = \frac{4\times 2\times 10^{-2}}{2(5\times 10^{-2})} = 0,8m.s^{-1}$$

$$v(t_2) = \frac{M_1M_3}{2\tau} = \frac{4\times 2\times 10^{-2}}{2(5\times 10^{-2})} = 0,8m.s^{-1}$$

$$v(t_3) = \frac{M_2M_4}{2\tau} = \frac{4\times 2\times 10^{-2}}{2(5\times 10^{-2})} = 0,8m.s^{-1}$$

$$v(t_4) = \frac{M_3M_5}{2\tau} = \frac{4\times 2\times 10^{-2}}{2(5\times 10^{-2})} = 0,8m.s^{-1}$$

بالنسبة للمتحرك D :

نلاحظ أنه يمسح أقواسا متساوية خلال أزمنة متساوية، فحركته إذن دائرية منتظمة. وعليه فإن سرعته اللحظية تكون ثابتة القيمة.

$$v = v(t_1) = v(t_2) = v(t_3) = v(t_4) = \frac{\text{محيط الدائرة}}{\text{زمن دورة واحدة}} = \frac{2\pi R}{8\tau}$$

مع R نصف قطر المسار : $v = \dfrac{\pi R}{4\tau}$

بالقياس نجد $R = 3,5cm$

وبالاستعانة بمقياس الرسم نجد : $R = \dfrac{3,5\times 2}{1} = 7cm = 7\times 10^{-2}\,m$

$$v = \frac{\pi \times 7\times 10^{-2}}{4(5\times 10^{-2})} = 0,35\pi\, m.s^{-1} \approx 1,1m.s^{-1}$$

$$\boxed{v \approx 1,1m.s^{-1}}$$

3/أ/ تغير السرعة

بالنسبة للمتحرك A : نلاحظ أن سرعه هي $0,5m/s$ ، $0,7m/s$ ، $0,9m/s$ ، $1,1m/s$، فهي تزداد بنفس المقدار أي $(0,2m/s)$ خلال نفس الفترة الزمنية $(\tau = 50m.s^{-1})$.

تسمى هذه الحركة : **الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام المتسارعة.**

- السرعة الابتدائية هي السرعة في اللحظة الابتدائية $t_0 = 0s$ وهي اللحظة قبل اللحظة (t_1) التي فيها السرعة $v(t_1) = 0,5m.s^{-1}$.

وبما أن السرعة تزداد بـ $0,2m/s$، فنتوقع أن تكون : $\boxed{v_0 = v(t_0) = 0,3m.s^{-1}}$.

بالنسبة للمتحرك B : نلاحظ أن السرعة هي : $1,4m/s$ ، $1,0m/s$ ، $0,6m/s$ فهي تتناقص بنفس المقدار أي $(0,4m/s)$ خلال نفس الزمن $(\tau = 50m/s)$.

تسمى هذه الحركة : **الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام المتباطئة.**

بنفس المحاكمة نجد أن : $\boxed{v_0 = v(t_0) = 1,8m.s^{-1}}$.

بالنسبة للمتحرك C : الحركة مستقيمة منتظمة وسرعتها ثابتة في كل اللحظات.

إذن : $\boxed{v_0 = v(t_0) = 0,8m.s^{-1}}$.

بالنسبة للمتحرك D : الحركة دائرية منتظمة وسرعتها ثابتة في كل اللحظات.

إذن : $\boxed{v_0 = v(t_0) = 1,1m.s^{-1}}$.

4/ تمثيل السرع اللحظية $\vec{v}(t_1)$ ، $\vec{v}(t_2)$ ، $\vec{v}(t_3)$ ، $\vec{v}(t_4)$

في المواضع (M_1) ، (M_2) ، (M_3) ، (M_4) على الترتيب

نختار السلم : $0,1m.s^{-1} \to 1mm$

بالنسبة للمتحرك A :

نمثل $\vec{v}(t_1)$ بشعاع مبدؤه النقطة (M_1)، وجهته بجهة الحركة، وطوله $5mm$.

نفس الشيء بالنسبة للسرع : $\vec{v}(t_2) \to 7mm$

$\vec{v}(t_3) \to 9mm$

$\vec{v}(t_4) \to 11mm$

بالنسبة للمتحرك B :

$\vec{v}(t_1) \to 14mm$

$\vec{v}(t_2) \to 10mm$

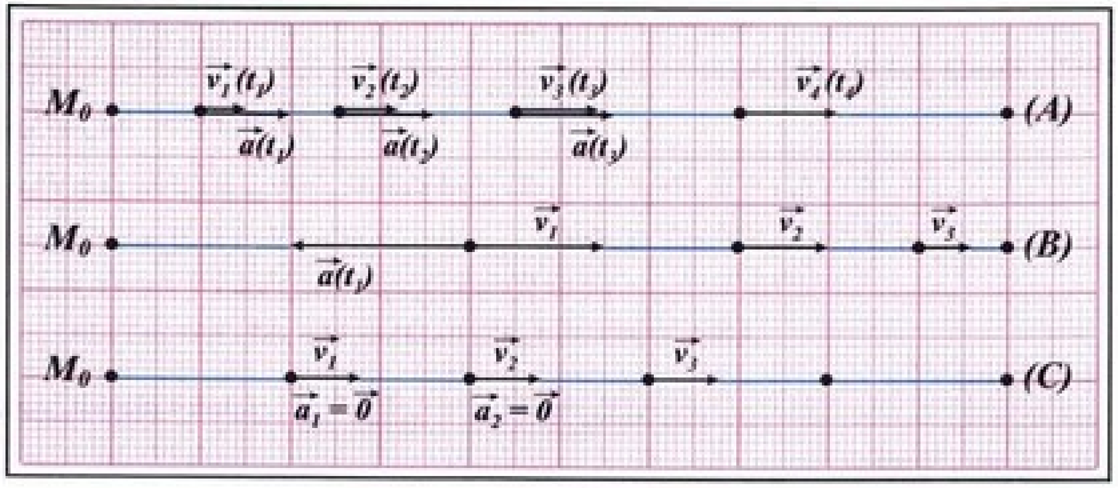
$\vec{v}(t_3) \to 6mm$

بالنسبة للمتحرك C :

$\boxed{V=0,8m/s = \text{ثابت}}$

بالنسبة للمتحرك D :

$\boxed{v \approx 1,1m.s^{-1}}$



5/ أ/ خصائص التسارع $\vec{a}(t_1)$ في اللحظة (t_1)

نعلم أن : $\boxed{\vec{a}(t_1) \approx \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_0}{t_2 - t_0} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_0}{2\tau}}$

بالنسبة للمتحرك A :

المسار مستقيم، وبالتالي فإن $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_0$ لهما نفس الحامل ونفس الجهة، وعليه يمكن كتابة العلاقة السابقة دون أشعة لإيجاد قيمة التسارع $\vec{a}(t_1)$: $\boxed{a(t_1) = \frac{v_2 - v_0}{2\tau}}$

بالتعويض نجد : $a(t_1) = \frac{0,7-0,3}{2(5\times10^{-2})} = 4m.s^{-2}$

- فقيمة $\vec{a}(t_1)$ هي : $\boxed{a(t_1) = 4m.s^{-2}}$
- الحامل : هو نفسه حامل $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_0$.
- الاتجاه : بجهة المحصلة $[\vec{v}_2 + (-\vec{v}_0)]$ اي باتجاه الشعاع الكبير وهو $\vec{v}_2$

بالنسبة للمتحرك B :

بنفس الطريقة لأن المسار مستقيم : $a(t_1) = \frac{v_2 - v_0}{2\tau} = \frac{1,0-1,8}{2(5\times10^{-2})} = -8m.s^{-2}$

- القيمة : $\boxed{a(t_1) = -8m.s^{-2}}$

والإشارة $(-)$ تعني أن التسارع بعكس جهة السرعة لأن الحركة متباطئة.

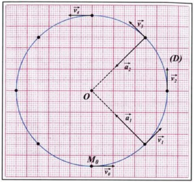
- الحامل : هو نفسه حامل $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_0$.
- الاتجاه : بعكس اتجاه الحركة (جهة السرعة).

بالنسبة للمتحرك C :

$$a(t_1) = \frac{v_2 - v_0}{2\tau} = \frac{0,8-8,8}{2(5\times10^{-2})} = 0m.s^{-2}$$

فالتسارع معدوم في الحركة المستقيمة المنتظمة $\boxed{a(t_1) = 0m.s^{-2}}$

بالنسبة للمتحرك D :



المسار دائري وبالتالي لا نستطيع أن نكتب : $a(t_2)=\frac{v_2-v_0}{t_2-t_0}$

ولهذا السبب يمكن استعمال إحدى الطريقتين التاليتين.

الطريقة 1 : نعلم أن التسارع في الحركة الدائرية المنتظمة ثابت ويعطى بالعبارة $a=\frac{v^2}{R}$

$$a=\frac{(1,1)^2}{7\times10^{-2}}\approx 17,3$$

- القيمة : $\boxed{a(t_1)=17,3m.s^{-2}}$.
- الحامل : نصف قطر المسار.
- الاتجاه : نحو مركز المسار.

الطريقة 2 : نمثل الشعاع $\Delta\vec v$

$\Delta\vec v=\vec v_2-\vec v_0$ لأن $(-\vec v_0)$ و $\vec v_2$

ثم نقوم بقياس طول $\Delta\vec v$ ومن ثم نحسب النسبة $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ لأن $a\approx\frac{\Delta v}{\Delta t}$

وسناخذ هذه الطريقة عندما نقوم بتمثيل $\vec a(t)$

خصائص التسارع $\vec a(t_2)$ في اللحظة (t_2)

لدينا : $\boxed{\vec a(t_2)=\frac{\vec v_3-\vec v_1}{t_3-t_1}=\frac{\vec v_3-\vec v_1}{2\tau}}$

نقوم فقط بتعيين القيمة :

بالنسبة للمتحرك A : $a(t_2)=\frac{v_3-v_1}{2\tau}=\frac{0,9-0,5}{2(5\times10^{-2})}=4m.s^{-2}$

لاحظ أن التسارع ثابت : $\boxed{a(t_1)=a(t_2)=4m.s^{-2}}$

المتحرك B : $a(t_2)=\frac{v_3-v_1}{2\tau}=\frac{0,6-1,4}{2(5\times10^{-2})}=-8m.s^{-2}$

لاحظ أن التسارع ثابت : $\boxed{a(t_1)=a(t_2)=-8m.s^{-2}}$

المتحرك C : $a(t_2)=\frac{v_3-v_1}{2\tau}=\frac{0,8-0,8}{2\tau}=0m.s^{-2}$

لاحظ أن التسارع معدوم : $\boxed{a(t_1)=a(t_2)=0m.s^{-2}}$

المتحرك D : $a(t_1)=\frac{v^2}{R}=\frac{(1,1)^2}{7\times10^{-2}}=17,3m.s^{-2}$

لاحظ أن التسارع ثابت : $\boxed{a(t_1)=a(t_2)=17,3m.s^{-2}}$

التمثيل

بالنسبة للمتحرك A :

على سبيل المثال السلم $4m.s^{-2}\rightarrow 1cm$

لذا نمثل $\vec a(t_1)$ و $\vec a(t_2)$ بشعاع في نفس جهة الحركة وطوله $(1cm)$ (انظر الشكل الموالي).

المتحرك B :

ناخذ أيضا السلم $4m.s^{-2}\rightarrow 1cm$ إذن $8m.s^{-2}\rightarrow 2cm$. لذا نمثل $\vec a(t_1)$ و $\vec a(t_2)$ بشعاع طوله $2cm$ معاكس لجهة الحركة لأن التسارع يساوي $(-8m.s^{-2})$.

المتحرك C :

فشعاع التسارع معدوم، لذا لا نمثله. $\vec a(t_1)=\vec a(t_2)=\vec 0$

المتحرك D :

بما أن قيمة التسارع له كبيرة نسبيا $a(t_1)=a(t_2)=17,3m.s^{-2}$ ، لذا نختار مقياس رسم مناسب وليكن : $17,3m/s^2\rightarrow 2\ cm$.

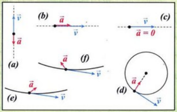
وتكون جهة $\vec a(t_1)$ و $\vec a(t_2)$ نحو مركز الدوران (O).

ب/ النتائج

- اتجاه السرعة اللحظية $\vec{v}(t)$ باتجاه الحركة
- اتجاه التسارع $\vec{a}(t)$:
  - يكون ب اتجاه السرعة اللحظية $\vec{v}(t)$ إذا كانت الحركة مستقيمة متغيرة متسارعة
  - يكون بعكس اتجاه السرعة اللحظية $\vec{v}(t)$ إذا كانت الحركة مستقيمة متغيرة.
  - يكون نحو مركز الدوران إذا كانت الحركة دائرية منتظمة
- قيمة التسارع $\vec{a}(t)$:
  - ثابتة إذا كانت الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام (متسارعة أو متباطئة)
  - ثابتة إذا كانت الحركة دائرية منتظمة
  - معدومة إذا كانت الحركة مستقيمة منتظمة

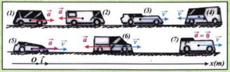
التمرين 9

تمثل السرعة اللحظية $\vec{v}$ والتسارع اللحظي $\vec{a}$ لبعض الحركات a، b، c، d، e، f.



1/ حدد طبيعة الحركة في كل حالة.

2/ تعطى صورة لعدة سيارات أخذت في لحظة زمنية كيفية.



أ/ حدد جهة حركة كل سيارة.

ب/ هل يمكن تحديد طبيعة حركة كل سيارة من حيث أنها متسارعة أو متباطئة.

الحل

1/ طبيعة الحركة

الحالة a :

- المسار مستقيم.
- $\vec{a} \neq \vec{0}$ إذن الحركة متغيرة.
- $\vec{v}$ و $\vec{a}$ متعاكسان، فالحركة متباطئة.
- نستنتج أن **الحركة مستقيمة متغيرة متباطئة** .

الحالة b :

- المسار مستقيم.
- $\vec{a} \neq \vec{0}$ إذن الحركة متغيرة.
- $\vec{v}$ و $\vec{a}$ لهما نفس الجهة فالحركة متسارعة
- نستنتج أن **الحركة مستقيمة متغيرة متسارعة** .

الحالة c :

- المسار مستقيم.
- $\vec{a} = \vec{0}$ إذن الحركة متغيرة.
- نستنتج أن **الحركة مستقيمة منتظمة** .

الحالة d :

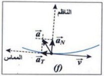
- المسار دائري.
- $\vec{a}$ يتجه نحو مركز الدوران.
- نستنتج أن **الحركة دائرية منتظمة** .

الحالتان e و f :

- المسار منحن.
- $\vec{a} \neq \vec{0}$ فالحركة متغيرة.

لكي نعرف الحركة من حيث أنها متسارعة أو متباطئة نقوم بإسقاط $\vec{a}$ على المماس للمسار فنجد ما يعرف بالتسارع المماسي $\vec{a}_T$.

- فإن كانت جهة $\vec{a}_T$ بجهة $\vec{v}$ كانت الحركة متسارعة.
- وإن كانت جهة $\vec{a}_T$ معاكسة لجهة $\vec{v}$ كانت الحركة متباطئة.



نستنتج أن **الحركة في الحالة e منحنية متغيرة متسارعة**

والحركة في الحالة f منحنية متغيرة متباطئة

ملاحظة: مسقط $\vec{a}$ على الناظم على المسار (عمودي على المماس) ندعوه التسارع الناظمي $\vec{a}_N$.

2/ أ/ تحديد اتجاه حركة كل سيارة

إن اتجاه $\vec{v}$ هو الذي يحدد اتجاه الحركة وليس اتجاه $\vec{a}$ أو اتجاه معلم الحركة $(O,\vec{i})$، وعليه فإن السيارتين (1) و (2) لا نستطيع تحديد اتجاه حركتيهما لأنه لم يحدد عليهما اتجاه $\vec{v}$.

أما السيارات (3) و (5) و (6) و (7) فهي تتحرك في الاتجاه الموجب لمعلم الحركة $(O,\vec{i})$.

والسيارة (4) تتحرك في الاتجاه السالب لمعلم الحركة.

ب/ تحديد طبيعة حركة كل سيارة

تحدد طبيعة حركة الجسم بمعرفة اتجاه $\vec{v}$ و $\vec{a}$ معا. فإذا كانا في نفس الاتجاه كانت الحركة متسارعة، وإن كانا في اتجاهين متعاكسين فإن الحركة تكون متباطئة. أما إذا كان $\vec{a}=\vec{0}$ فإن الجسم يكون إما ساكنا (حالة $\vec{v}=\vec{0}$) أو يكون متحركا حركة مستقيمة منتظمة (حالة $\vec{v}=\overrightarrow{Cte}$).

- السيارتان (1) و (2) لا نستطيع تحديد طبيعتي حركتيهما لأن $\vec{a}$ معلومة و $\vec{v}$ مجهولة لكليهما.
- السيارتان (3) و (4) لا نستطيع تحديد طبيعة حركتيهما لجهلنا لـ $\vec{a}$ لهما رغم معرفتنا $\vec{v}$ لكليهما.
- السيارة (5): تتحرك حركة مستقيمة متغيرة بانتظام متسارعة لأن جهة $\vec{v}$ بجهة $\vec{a}$.
- السيارة (6): تتحرك حركة مستقيمة متغيرة بانتظام متباطئة لأن جهة $\vec{a}$ بعكس $\vec{v}$.
- السيارة (7): تتحرك حركة مستقيمة منتظمة لأن $\vec{v}=\overrightarrow{Cte}$ و $\vec{a}=\vec{0}$.

التمرين 10

1/ أعط تعريفا لما يلي:

المعلم السطحي الأرضي

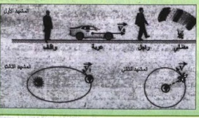
المعلم المركزي الأرضي

المعلم المركزي الشمسي

2/ تعطي الوثيقة المرفقة عدة مشاهد، لبعض الأجسام:

أ/ حدد لكل مشهد المرجع المناسب لدراسة حركة الأجسام فيه.

ب/ المراجع المناسبة، هل تعتبرها مراجع عطالية (غاليلية) برّر إجابتك.



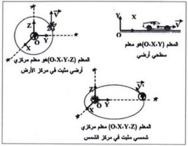
الحل

1/ إعطاء تعريف

المعلم السطحي الأرضي: هو معلم مرتبط بسطح الأرض، يصلح لدراسة حركة الأجسام التي تتم على سطح الأرض.

المعلم المركزي الأرضي (معلم بطليموس): هو معلم مبدؤه مركز الأرض، ومحاوره الثلاثة تتجه نحو ثلاثة نجوم بعيدة، نعتبرها تقريبا ساكنة (في حدود زمن التجربة أو زمن الحركة المراد دراستها) وهو يصلح لدراسة حركة الأجسام التي تدور حول الأرض.

المعلم المركزي الشمسي (معلم كوبرنيكس): هو معلم مبدؤه مركز الشمس، ومحاوره تتجه نحو ثلاثة نجوم بعيدة نعتبرها تقريبا ساكنة (في حدود زمن التجربة).



ملاحظة هامة

كان اليوناني بطليموس يعتقد أن الأرض هي مركز الكون وجميع الكواكب تدور حولها، لذا عادة ما ينسب المعلم المركزي الأرضي إلى بطليموس فيقال «معلم بطليموس».

أما كوبرنيكس، فكان يعتقد أن الشمس هي مركز الكون، وأن جميع الكواكب تدور حولها. لذا ننسب المعلم المركزي الشمسي إلى كوبرنيكس فيقال (معلم كوبرنيكس).

1/ أ/ المشهد الأول: يظهر أجساما تتحرك على سطح الأرض هي:

- مظلي
- راجل
- عربة
- شخص واقف

إذن، فالمرجع المناسب لدراسة هذه الأجسام هو المعلم السطحي الأرضي.

المشهد الثاني

يظهر صاروخ يدور حول الأرض، لذا فالمرجع المناسب لهذه الحركة هو المعلم المركزي الأرضي.

المشهد الثالث

يظهر الأرض تدور حول الشمس، لذا فالمرجع المناسب لهذه الحركة هو المعلم المركزي الشمسي.

ب/ المعالم العطالية

هي المعالم الساكنة بالنسبة لبعضها، أو المتحركة بسرعة ثابتة (أي بحركة مستقيمة منتظمة).
وبما أن الأرض تدور حول نفسها، إذن فلجميع نقاطها (بما فيها نقاط سطح الأرض)، تتحرك حركة دائرية وبالتالي لا ينطبق تعريف المعالم العطالي على المعلم السطحي الأرضي. لكن الأرض تدور حول نفسها بسرعة صغيرة نسبيا بدليل انها تنجز دورة واحدة خلال 24 ساعة. لذا يمكن وبتقريب مقبول إهمال حركة الأرض حول نفسها، على الأقل لمدة تكون أكبر من المدة التي يستغرقها الجسم المتحرك على سطحها.

اما المعلم المركزي الأرضي، فهو في الحقيقة معلم يدور حول الشمس، إذن لا ينطبق عليه تعريف المعلم العطالي، غير ان سرعة الأرض حول الشمس صغيرة جدا بدليل أن الأرض تنجز دورة حول الشمس خلال سنة. لذا يمكن اعتبار المعلم المركزي الأرضي معلما عطاليا، وبتقريب مقبول.

اما المعلم الشمسي فنعتبره معلما عطاليا بتقريب جيد لأن حركة دوران الشمس، لا تكاد تذكر في زمن يقدر بعدة سنوات شمسية.

التمرين 11

أجب بصحيح او خطا وصحح العبارة الخاطئة، فيما يلي :

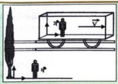
	العبارة	صحيح	خطا	العبارة الصحيحة
ا	المرجع العطالي سرعته ثابتة			
ب	قيم السرعة التي يسجلها عداد السرعة تكون مقيسة بالنسبة لمعلم سطحي أرضي.			
ج	كل المراجع العطالية يتحقق فيها مبدا العطالة.			
د	مصعد عمارة في حالة هبوط نعتبره معلما سطحيا ارضيا.			
هـ	مصعد عمارة في حالة حركة بسرعة ثابتة، نعتبره معلما عطاليا.			
و	مبدا العطالة غير محقق في المعالم اللاعطالية.			

الحل

كل العبارات (ا) ، (ب) ، (جـ) ، (هـ) ، (و) صحيحة.
العبارة (د) خاطئة والعبارة الصحيحة هي :
(مصعد عمارة في حالة هبوط ليس معلما سطحيا ارضيا، لأنه يتحرك بالنسبة لسطح الأرض).

التمرين 12

تتحرك عربة فوق سكة حديدية افقية بسرعة ثابتة $\vec{v}$ بالنسبة لمراقب خارجي (م1) واقف في المحطة، ساكن بالنسبة للسكة.



ا/ 1/ السكة، هل يمكن اعتبارها معلما سطحيا ارضيا ؟

2/ المراقب الخارجي م1 ، هل يمكن اعتباره معلما سطحيا ارضيا ؟

3/ العربة، والمراقب الداخلي م2، هل يعتبر كل منهما معلما سطحيا ارضيا ؟

4/ بالنسبة للمعلمين (م1)، (م2)، هل نعتبر كل منهما معلما عطاليا ؟

ب/ بالنسبة للمعلمين (م1) و(م2)، كل على حدة حدد :

1/ مسار العربة

2/ سرعة العربة

3/ القوة الدافعة التي تخضع لها العربة (يهمل الاحتكاك).

ج/ ما هي النتائج المستقاة ؟

د/ تاكد من أن المعلمين (م1) و(م2) متكافئين.

الحل

ا/ 1/ نعم، يمكن اعتبار السكة معلما سطحيا أرضيا فهي ساكنة بالنسبة لسطح الأرض.

2/ المراقب الخارجي (م1) واقف في المحطة، فهو إذن ساكن بالنسبة للسطح لذا نعتبره معلما سطحيا ارضيا.

3/ كل من العربة والمراقب الداخلي (م2)، يتحركان بالنسبة لسطح الأرض. لذا لا نعتبر أيا منهما معلما سطحيا أرضيا.

4/ المعلم (م1) هو معلم سطحي ارضي، وكما نعلم أن المعلم السطحي الأرضي يعتبر معلما عطاليا.

إذن فالمعلم (م1) هو المعلم عطالي.

وبما أن المعلم (م2) يتحرك بسرعة ثابتة هي سرعة العربة $\vec{v}$ بالنسبة للمعلم (م1)، إذن نعتبره معلما عطاليا.

ب/

	مسار العربة	سرعة العربة	القوة الدافعة
بالنسبة للمعلم (م1)	مستقيم	$\vec{v}_1 = \vec{v}$	$\vec{F}_1 = \vec{0}$ لأن العربة تتحرك بالنسبة لـ (م1) بسرعة ثابتة

بالنسبة للمعلم (م2)	نقطة (هي نقطة تواجد العربة)	$\vec{v}_2=\vec{0}$ لأن العربة ساكنة بالنسبة للمعلم (م2)	$\vec{F}_2=\vec{0}$ لأن العربة ساكنة بالنسبة لـ (م2)

ج/ النتائج المستقاة

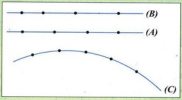
- المسار : يعتمد على المرجع (المسار يختلف باختلاف المراجع)
- السرعة : تعتمد على المرجع (السرعة تختلف باختلاف المراجع)
- القوة : لها نفس القيمة في جميع المعالم العطالية، لذا نقول إن المعالم العطالية متكافئة.

د/ في هذا التمرين لدينا $\vec{F}_1=\vec{F}_2$ ، إذن فالعلمان (م1) و (م2) متكافئان.

التمرين 13

1/ اعط نص القانونين الأول والثالث لنيوتن المعروفين بالاسمين (مبدأ العطالة) و(مبدأ الفعلين المتبادلين) على الترتيب.

2/ حدد من بين الحركات التالية الحركة التي تحقق مبدأ العطالة.



الحل

1/ نص القانون الأول لنيوتن (مبدأ العطالة)

توجد عدة نصوص كلها تؤدي نفس المعنى إحداها هو :

في معلم عطالي إذا لم تتغير سرعة مركز عطالة جسم فإن مجموع القوى التي يخضع لها يكون معدوما. والعكس صحيح.

- إذا لم تتغير $\vec{v}$ معناه $\vec{v}=\overrightarrow{Cte}$ او $\vec{v}=\vec{0}$ بالنسبة لمعلم عطالي، وهذا يؤدي إلى أن الجسم يكون إما ساكنا او متحركا حركة مستقيمة منتظمة، وعليه فإن $\sum\vec{F}=\vec{0}$.

- نص القانون الثالث لنيوتن (مبدأ الفعلين المتبادلين) :

إذا اثرت جملة ميكانيكية A على جملة ميكانيكية B بقوة $\vec{F}_{A/B}$ فإن الجملة B تؤثر بدورها على الجملة A بقوة $\vec{F}_{B/A}$ تساويها في القيمة وتعاكسها في الاتجاه ولها نفس الحامل اي : $\vec{F}_{A/B}=-\vec{F}_{B/A}$.

2/ تحديد الحركة التي تحقق مبدأ العطالة

الحركة التي مسارها مستقيم وسرعتها ثابتة (الحركة المستقيمة المنتظمة) هي الحركة التي تحقق مبدأ العطالة، وهي هنا الحركة A فقط لأن الحركة B تتزايد فيها السرعة رغم أن المسار مستقيم، وبالتالي لا ينطبق عليها مبدأ العطالة.

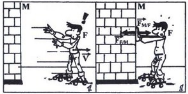
- اما الحركة C، فإن مسارها منحن، وبالتالي شعاع السرعة يتغير في الجهة، وعليه لا تحقق مبدأ العطالة.

التمرين 14

ينتعل طفل F حذاء مزودا بعجلات ($Patins$)، يدفع بيديه جدارا M ، فيندفع هو إلى الخلف. اي من قوانين نيوتن تترجمه هذه الحالة ؟

الحل

عندما يدفع الطفل الجدار بيديه بقوة $\vec{F}_{F/M}$ ، بدوره الجدار يدفع الطفل بقوة $\vec{F}_{M/F}$ مساوية للقوة السابقة في الشدة ومعاكسة لها في الاتجاه ولها نفس الحامل، وهذا ما يعرف بالقانون الثالث لنيوتن أو بمبدأ الفعلين المتبادلين : $\boxed{\vec{F}_{F/M}=-\vec{F}_{M/F}}$.



التمرين 15

يلمس طفل حائطا برأسه R ، فيشعر بلمس الحائط M له. فإذا ضرب الحائط برأسه، شعر بالألم. ما هو قانون نيوتن الذي يفسر هذه الحالة ؟

الحل

عندما يلامس راس الطفل R الحائط M فإن راس الطفل يؤثر في الحائط بقوة تلامس $\vec{F}_{R/M}$ ، والحائط بدوره يؤثر على راس الطفل بقوة تلامس $\vec{F}_{M/R}$ حسب مبدأ الفعلين المتبادلين.

نفس المحاكمة نعطيها في حالة ضرب الحائط بالراس، فقط مع اختلاف في شدة الفعلين المتبادلين بحيث زادت شدتهما في هذه المرة.

هذا الكلام هو ترجمة لمبدأ الفعلين المتبادلين المسمى القانون الثالث لنيوتن ومنه : $\boxed{\vec{F}_{R/M} = -\vec{F}_{M/R}}$.

الذي لم يفهم مبدأ الفعلين المتبادلين، " يخبط راسو على الحيط !".

التمرين 16

1/ ذكر بنصّ القانون الثاني لنيوتن.

2/ أ/ ما هي النقطة المميّزة من الجملة التي يُطبق عليها القانون الثاني لنيوتن ؟

ب/ عندئذ، ما هو الاسم الآخر لهذا القانون ؟

ج/ هل هذا القانون يصلح تطبيقه في أيّ مرجع ؟ برّر إجابتك.

الحل

1/ نصّ القانون الثاني لنيوتن

في معلم عطالي، مجموع القوى $\sum \vec{F}$ المؤثرة على جملة ميكانيكية، كتلتها m، تساوي حاصل جداء كتلتها في تسارع مركز عطالتها $\vec{a}$. ويعبّر عنه رياضياتيا بالقانون : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$.

2/ أ/ النقطة المميّزة من الجملة التي يُطبق عليها هذا القانون هو مركز عطالتها.

ملاحظة : هذا لا يعني أن القانون لا يصلح تطبيقه على بقية نقاط الجملة، إنما قصد السهولة، نطبقه على مركز العطالة.

ب/ لذا يسمى القانون الثاني لنيوتن بـ (نظرية مركز العطالة).

ج/ هذا القانون يصلح تطبيقه فقط في المعالم العطالية (الغاليلية).

أمّا إذا كان المعلم غير عطالي، فلكي يبقى القانون الثاني لنيوتن صالحا، يجب إضافة قوى من نوع اخرى، تسمى القوى العطالية.

التمرين 17

حدّد الصّحيح من الخطأ، وصحّح العبارات الخاطئة :

جملة ميكانيكية مركز عطالتها G يتحرك بالنسبة لمرجع سطحي ارضي.

1/ هذا المعلم نعتبره عطاليا بتقريب جيّد.

2/ هذه الجملة عندما تخضع لمحصلة قوى معدومة $\sum \vec{F} = \vec{0}$ فإنها بالضرورة تكون إما ساكنة أو متحرّكة بحركة مستقيمة منتظمة.

3/ إذا خضعت لقوى محصلتها غير معدومة $\sum \vec{F} \neq \vec{0}$ فإن سرعتها تكون متغيرة.

4/ إذا كانت الجملة خاضعة لمحصلة قوى $\vec{F}$ غير معدومة ومسارها منحن فإن $\vec{F}$ و $\vec{v}_G$ لهما نفس الحامل ونفس الجهة.

5/ جهة $\vec{F}$ هي نفسها جهة $\Delta \vec{v}_G$.

6/ تعطى عبارة محصلة القوى $\vec{F}$ كما يلي $\vec{F} = m\dfrac{\Delta \vec{v}_G}{\Delta t}$.

الحل

1 : صحيح ، 2 : صحيح ، 3 : صحيح ، 4 : خطا ، والصحيح هو :

إذا كانت الجملة خاضعة لمحصلة قوى $\vec{F}$ غير معدومة ومسارها منحن، فإن $\vec{F}$ و $\vec{v}_G$ ليس لهما نفس الحامل ونفس الجهة.

5 : صحيح ، 6 : صحيح.

التمرين 18

اختر الإجابة الصّحيحة، من بين الاقتراحات التالية :

1/ في معلم عطالي حركة مركز جملة ميكانيكية مستقيمة متغيّرة متسارعة فإنه في أي لحظة يتحقق :

أ/ $\vec{F}$ و $\vec{v}$ لهما نفس الحامل ونفس الجهة.

ب/ $\vec{F}$ و $\vec{v}$ لهما نفس الحامل، وجهتين متعاكستين.

ج/ $\vec{F}$ و $\vec{a}$ لهما نفس الحامل والجهة.

د/ $\vec{F}$ و $\vec{a}$ لهما نفس الحامل وجهتين متعاكستين

2/ في معلم عطالي، إذا كانت حركة مركز عطالة جملة ميكانيكية مستقيمة متغيرة متباطئة:

أ/ $\vec{F}$ و $\vec{v}$ لهما نفس الحامل ونفس الجهة.

ب/ $\vec{F}$ و $\vec{v}$ لهما نفس الحامل، وجهتين متعاكستين.

ج/ $\vec{F}$ و $\vec{a}$ لهما نفس الحامل ونفس الجهة.

د/ $\vec{a}$ و $\vec{F}$ لهما نفس الحامل، وجهتين متعاكستين.

3/ في الحركة الدائرية المنتظمة :

أ/ $\vec{v}$ و $\vec{F}$ لهما نفس الحامل ونفس الجهة.

ب/ $\vec{v}$ و $\vec{F}$ لهما حاملان متعامدان.

ج/ $\vec{a}$ و $\vec{F}$ لهما حاملان متعامدان.

د/ $\vec{a}$ و $\vec{F}$ لهما نفس الحامل ونفس الجهة.

* ننبه إلى أن $\vec{F}$ هي محصلة القوى التي تخضع لها الجملة الميكانيكية.

الحل

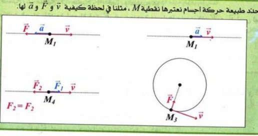
1/ الإجابات الصحيحة : أ، ج.

2/ الإجابات الصحيحة : ب، د.

3/ الإجابات الصحيحة : ب، د.

التمرين 19

حدد طبيعة حركة اجسام نعتبرها نقطية M ، مثلنا في لحظة كيفية $\vec{v}$ و $\vec{F}$ و $\vec{a}$ لها.



الحل

طبيعة حركة الأجسام

- المتحرك M_1 ، حركته مستقيمة متغيرة متسارعة لأن $\vec{v}$ و $\vec{F}$ لهما نفس الحامل ونفس الجهة.
- المتحرك M_2 ، حركته مستقيمة متغيرة متباطئة لأن $\vec{v}$ و $\vec{F}$ لهما جهتان متعاكستان.
- المتحرك M_3 ، حركته دائرة منتظمة لأن $\vec{F}$ تتجه نحو مركز الدوران.
- المتحرك M_4 ، حركته مستقيمة منتظمة لأن $\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$.

التمرين 20

طفل يجري بسرعة ثابتة وفق خط مستقيم (هذه حالة) تعثرت رجله بحجر فسقط وانسحب على الأرض ثم توقف (هذه حالة أخرى). أي الحالتين تترجم القانون الأول لنيوتن ؟ وأيهما تترجم القانون الثاني لنيوتن ؟

الحل

عندما كان الطفل يتحرك بسرعة ثابتة، وفق خط مستقيم، كانت حركته مستقيمة منتظمة بمعنى ان مجموع القوى المؤثرة عليه معدوم أي $\sum \vec{F} = \vec{0}$ ويعتبر هذا ترجمة لمبدأ العطالة المعروف بالقانون الأول لنيوتن. لكنه عندما تعثرت رجل الطفل بالحجر، وسقط، ثم انسحب على الأرض حتى توقف، فإن حالة جديدة حدثت، وهي أن سرعته قد تغيرت، فنقصت من قيمة معيّنة (V) إلى ان انعدمت $(0m/s)$ لحظة توقف الطفل عن الانسحاب، ما يدل على ان حركته أصبحت متغيرة. فلا يمكن إذن ان نفسرها بمبدأ العطالة.

إذن $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \neq \vec{0}$ وهذا يؤدي بنا إلى كتابة القانون الثاني لنيوتن وهو ، $\sum \vec{F} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$.

إذن الحالة الأولى : نفسّرها بالقانون الأول لنيوتن.

والحالة الثانية : نفسرها بالقانون الثاني لنيوتن.

التمرين 21

تسقط كرة تنس B بسرعة $\vec{v}_1$ قيمتها $15m/s$ على مضرب لاعب R وتصنع زاوية تساوي $\alpha = 45°$ مع مستوى الضرب ثم ترتد عنه بسرعة $\vec{v}_2$ قيمتها $20m.s^{-1}$ وحاملها عمودي على مستوى المضرب. إذا علمت أن زمن تلامس الكرة بالمضرب هو $0,1s$ ،

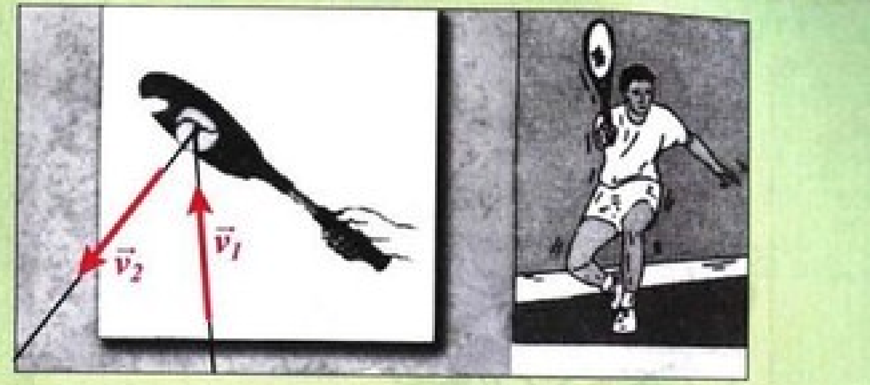
1/ احسب قيمة تغير سرعة الكرة Δv .

2/ استنتج قيمة التسارع الذي اكتسبته كرة التنس لحظة التلامس.

3/ أ/ نريد تعيين القوة $\vec{F}_{R/B}$ التي اثر بها المضرب R على الكرة B.

اي من قوانين نيوتن يسمح بذلك ؟ عيّن خصائص $\vec{F}_{B/R}$.

ب/ ايّ من قوانين يسمح بتعيين القوة $\vec{F}_{R/B}$ التي تؤثر بها الكرة B على المضرب R ؟



الحل

1/ حساب تغير سرعة الكرة Δv

لدينا $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ ، نمثل $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ باختيار السلم المناسب ، $10m.s^{-1} \to 1cm$.

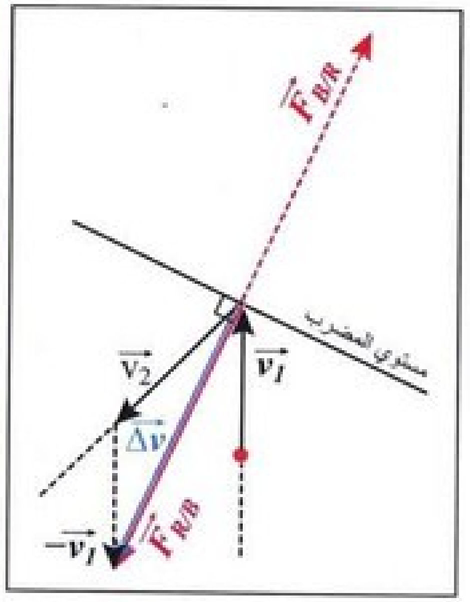
إذن نمثل $\vec{v}_1$ بشعاع طوله $1,5\,cm$ ، ونمثل $\vec{v}_2$ بشعاع طوله $2\,cm$.

نعين $\Delta\vec{v}$ ، نقيس طوله فنجد ، $\Delta v \to 3,2\,cm$ ومنه ، $\Delta v = 32\,m.s^{-1}$.

2/ تسارع كرة التنس a

نعلم أن $a \approx \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ، إذن ، $a = \frac{32}{0,1}$ ، $a = 320m.s^{-2}$

لاحظ أن هذا التسارع كبير جدا، لأن زمن التلامس كان صغيرا جدا.



3/ أ/ مادام عندنا قيمة Δv و Δt ، فيمكن تعيين القوة باستعمال القانون الثاني لنيوتن $\vec{F} = m\vec{a}$

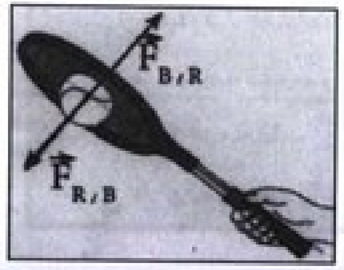
خصائص $\vec{F}_{B/R}$

- نقطة التأثير : النقطة من الكرة B التي تلامس المضرب.
- الشدة $F_{B/R}$: نعيّنها من القانون الثاني لنيوتن $F_{B/R} = ma$

$$F_{B/R} = 0,1\times 320 \; ; \; \boxed{F_{B/R} = 32N}$$

- الحامل والاتجاه : هما نفس حامل واتجاه $\Delta\vec{v}$ كما يلي :

مقياس رسم القوة : $32N \to 3,5cm$



3/ ب/ القانون الذي يسمح بتعيين القوة $\vec{F}_{R/B}$ التي تؤثر بها الكرة B على المضرب R هو القانون الثالث لنيوتن، اي مبدأ الفعلين المتبادلين وحسب هذا المبدأ فإن $\vec{F}_{R/B} = -\vec{F}_{B/R}$.

خصائص $\vec{F}_{R/B}$

- نقطة التأثير : النقطة من المضرب التي لامست الكرة.
- الشدة : $F_{R/B} = F_{B/R} = 32N$
- الحامل والجهة : موضحان في الشكل السابق.

التمرين 22

يقول نيوتن في كتابه (المبادئ) :

(إن تغيّرات الحركة تتناسب مع القوة المحرّكة وتتم وفق المنحى الذي أثرت فيه هذه القوة).

1/ أ/ عبّر بلغة فيزيائية حديثة عن المصطلحات التالية التي استعملها نيوتن وهي :

- تغيّرات الحركة،
- القوة المحركة.

ب/ إن هذا القول لنيوتن، هو نص لأحد قوانينه الثلاثة، ما هو هذا القانون ؟

ج/ أعد صياغته بلغة فيزيائية حديثة.

2/ نريد التأكد من صحة هذا القانون من أجل ذلك نجري التجربة التالية :

- في نقطة ثابتة O، نثبت خيطا مطاطيا ونربط طرفه الآخر بساق ينتهي بمفجّر (éclateur) ويمرّ بمركز جسم صلب (محمول ذاتيا auto porteur) يستند على منضدة أفقية كما هو موضح في الشكل المقابل.

ندفع الجسم الصلب الذي كتلته $m=400g$ ونقوم بواسطة المفجّر بتسجيل مواضع حركة مركز عطالة الجسم في فترات زمنية متساوية ومتعاقبة $\tau = 50ms$ فنحصل على الوثيقة المرفقة.

3/ أ/ عين خصائص (القيمة، الجهة، الحامل) شعاع تغيّر السرعة $\Delta\vec{v}$ في الموضعين (A_4) و(A_9) لمركز عطالة الجسم. خذ السلم $1cm \to 0,1m.s^{-1}$.

ب/ أحص القوى المؤثرة على الجسم (المحمول ذاتيا) أثناء الحركة وبيّن أن محصلة هذه القوى تؤول إلى قوة شد الخيط المطاطي $(\vec{T})$.

ج/ هل حامل اتجاه $\vec{T}$ ينطبقان على حامل واتجاه $\Delta\vec{v}$ ؟

د/ بالاستعانة بنتائج الوثيقة عيّن قيمة قوة شد الخيط (T) في الموضعين (A_4) و(A_9).

ب/ تحقق من صحة القانون الثاني لنيوتن.

الحل

1/ أ/ المصطلح : تغيّرات الحركة

يُعبّر عنه حاليا بتغيرات السرعة $\Delta\vec{v}$.

مصطلح القوة المحرّكة يعبر عنه حاليا بمجموع القوى المؤثرة.

ب/ هذا النص هو للقانون الثاني لنيوتن.

ج/ نص القانون الثاني لنيوتن بلغة فيزيائية حديثة :

في معلم عطالي، مجموع القوى $\sum\vec{F}$ المؤثرة على جملة ميكانيكية كتلتها (M)، تساوى حاصل جداء كتلتها في تسارع مركز عطالتها $\vec{a}_G$. ويعبّر عنها رياضيا بالقانون $\sum\vec{F} = m\vec{a}_G$.

2/ أ/ تعيين خصائص $\Delta\vec{v}_4$ و $\Delta\vec{v}_{10}$

نعلم ان $\Delta\vec{v}_4 = \vec{v}_5 - \vec{v}_3$

كما ان $\Delta\vec{v}_9 = \vec{v}_{10} - \vec{v}_8$

لذا يجب تعيين قيم $\vec{v}_3$ و $\vec{v}_5$ وايضا $\vec{v}_8$ و $\vec{v}_{10}$.

$$v_3 = \frac{A_2A_4}{2t} = \frac{2,2\times10^{-2}}{2\times50.10^{-3}} = 0,22m.s^{-1}$$

$$v_5 = \frac{A_4A_6}{2\tau} = \frac{1,5\times10^{-2}}{2(50.10^{-3})} = 0,15m.s^{-1}$$

وايضا : $$v_8 = \frac{A_7A_9}{2\tau} = \frac{1,8\times10^{-2}}{2(50.10^{-3})} = 0,18m.s^{-1}$$

$$v_{10} = \frac{A_9A_{11}}{2\tau} = \frac{2,6\times10^{-2}}{2(50.10^{-3})} = 0,26m.s^{-1}$$

نمثل في المسار السرع $\vec{v}_3$ ، $\vec{v}_5$ ، $\vec{v}_8$ و $\vec{v}_{10}$ بأشعة نعيّن اطوالها باستعمال سلّم قياس السرعة وهو :

$0,1m.s^{-1} \to 1cm$

إذن :

$2,2cm \overset{يمثل}{\rightarrow} v_3 = 0,22m.s^{-1}$

$1,5cm \overset{يمثل}{\rightarrow} v_5 = 0,15m.s^{-1}$

$1,8cm \overset{يمثل}{\rightarrow} v_8 = 0,18m.s^{-1}$

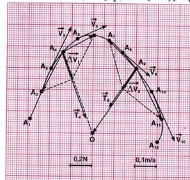
$2,6cm \overset{يمثل}{\rightarrow} v_{10} = 0,26m.s^{-1}$

بنفس الطرق المتبعة في التمارين السابقة وبالقياس نجد : $\Delta v_4 = 1,6cm$

وباستعمال مقياس رسم السرعة نجد : $\boxed{\Delta v_4 = 0,16m.s^{-1}}$

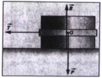
كذلك نجد : $\Delta v_9 \to 1,1cm$ ومنه نجد : $\boxed{\Delta v_9 = 0,11m.s^{-1}}$

اما حاملا اتجاهي $\Delta\vec{v}_4$ و $\Delta\vec{v}_9$ فهما ممثلان في الوثيقة المرفقة.



لاحظ أن $\vec{\Delta V}$ متسامت مع $\vec{T}$.

ب/ إحصاء جميع القوى المؤثرة على الجسم المتحرك



$\vec{P}$: قوة ثقل الجسم

$\vec{R}$: قوة التلامس أو ما يسمى برد فعل المنضدة على الجسم

$\vec{T}$: قوة شد الخيط المطاطي

حيث انه لا توجد حركة للجسم وفق المحور الشاقولي فإن

$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$

ومجموع القوى المؤثرة على الجسم هو :

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T}$$

لكن $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ إذن $\sum \vec{F} = \vec{T}$

اي ان القوة الوحيدة التي تعمل على تغير حركة الجسم هي قوة شد الخيط المطاطي $\vec{T}$.

ج/ من المعلوم ان حامل $\vec{T}$ هو الخيط المطاطي نفسه، وبالرجوع إلى الوثيقة السابقة نلاحظ أن $\Delta \vec{v}_4$ حاملها هو الخط المستقيم A_4O الذي هو الخيط المطاطي نفسه، فنستنتج ان $\Delta \vec{v}_4$ له نفس حامل وجهة $\vec{T}$.

كذلك $\Delta \vec{v}_9$ حاملها هو الخط المستقيم A_9O ، اي الخيط المطاطي نفسه. إذن نستنتج أن $\Delta \vec{v}_9$ له نفس حامل وجهة $\vec{T}$ ، وهذا ما ينطبق مع نص القانون الثاني لنيوتن.

د/ تعيين قوة شد الخيط (T)

حسب القانون الثاني لنيوتن $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ إذن $\vec{T} = m\vec{a}$

بالإسقاط نجد : $T = ma = m\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$

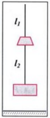
في الموضع (A_4) : $T = m \times \dfrac{\Delta v_4}{2\tau} = \dfrac{0,4 \times 0,16}{2(50 \times 10^{-3})}$

$\boxed{T = 0,64N}$

في الموضع (A_9) : $T = m \times \dfrac{\Delta v_9}{2\tau} = \dfrac{0,4 \times 0,11}{2(50 \times 10^{-3})}$

$\boxed{T = 0,44N}$

التمرين 23



يعلق جسمان (A) و (B) كتلتاهما $m_A=100g$ و $m_B=200g$ كما هو موضح في الشكل المقابل. نهمل كتلة خيطي التعليق l_1 و l_2.

احسب قيمة توتري الخيطين في الحالتين :

1/ جملة الجسمين والخيطين في حالة توازن.

2/ الجملة في حالة صعود نحو الأعلى بتسارع $a=4\ m/s^2$.

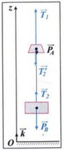
يؤخذ $g=9,8N/kg$

الحل

1/ حساب قيمة توتري الخيطين إذا كانت الجملة في حالة توازن

نبدأ بتمثيل القوى على الجملة.

من الأحسن ان ندرس كل جسم وحده.



الجملة : الجسم (A)

- المرجع : الأرض.
- المعلم : $(O,\vec{k})$ معلم سطحي أرضي نفترضه عطاليا.
- القوى الخارجية : $\vec{P}_A , \vec{T}_1 , \vec{T}'_2$
- القوى الداخلية : قوى تماسك أجزاء الجسم لا نمثلها لأنها لا تؤثر في حالة توازنه

بما أن الجملة في حالة توازن، إذن نطبّق القانون الأول لنيوتن :

$\sum \vec{F} = \vec{0}$ فيكون، $\vec{P}_A + \vec{T}_1 + \vec{T}'_2 = \vec{0}$

بالإسقاط على معلم الحركة $(O,\vec{k})$ نجد ، $-P_A + T'_2 + T_1 = 0$

اي : $T_1 = P_A + T'_2$

لكن $P_A = m_A g$ إذن ، $\boxed{T_1 = m_A g + T'}$ ...... (1)

الجملة : الجسم (B)

- المعلم : $(O,\vec{k})$.
- القوى الخارجية : $\vec{T}_2$ ، $\vec{P}_B$.
- القوى الداخلية : قوى تماسك أجزاء الجملة.

بما أن الجملة في حالة توازن، إذن : $T'_2 + \vec{P}_B = \vec{0}$; $\sum \vec{F} = \vec{0}$

بالإسقاط على المعلم $(O,\vec{k})$ نجد ، $T_2 - P_B = 0$ وبالتالي ، $\boxed{T_2 = m_B g}$ ...... (2)

لكن $T_2 = T'_2$ لأنهما قوتا الشد على نفس الخيط..

نعوّض عن T'_2 بـ T_2 وهذه بـ $M_B g$ في المعادلة (1) فنجد ، $T_1 = m_A g + m_B g$

ومنه ، $\boxed{T_1 = (m_A + m_B)g}$

تطبيق عددي :

$\boxed{T_1 = (0,1 + 0,2) \times 9,8 = 2,94N}$. $\boxed{T_2 = 0,2 \times 9,8 = 1,96N}$

ملاحظة هامة

كنا سنجد نفس النتائج لو كانت الجملة في حركة مستقيمة منتظمة (بسرعة ثابتة).

2/ حساب توتري الخيطين إذا كانت الجملة في حالة صعود بتسارع $a=4m/s^2$

بنفس الطريقة السابقة، فقط نطبّق القانون الثاني لنيوتن $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

- فبالنسبة للجملة (A) نجد معادلة تشبه المعادلة (1) بإضافة $m_A a$ إلى الطرف الأيمن ،

$T_1 = m_A g + T'_2 + m_A a$

$T_1 = m_A(a+g) + T'_2$ ......(1')

- وبالنسبة للجملة (B) ، بنفس الطريقة نجد ،

$T_2 = m_B(a+g)$ ......(2')

لكن $T_2 = T'_2$ ، نعوّض إذن عن T'_2 بـ T_2 بما يساويه من المعادلة $(2')$ في المعادلة $(1')$ فنجد :

$$T_1 = m_A(a+g)+m_B(a+g)$$

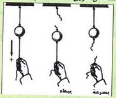
$$T_1 = (m_A+m_B)(a+g)......(3)$$

تطبيق عددي :

$\boxed{T_2 = 0,2(9,8+4) = 2,76N}$ $\boxed{T_1 = (0,1+0,2)(9,8+4) = 4,14N}$

التمرين 24

إليك تجربة تظهر نقل الحركة عن طريق عطالة الجسم. تأمل فيها جيّدا، وحاول تفسيرها.



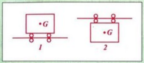
الحل

سنوجهك توجيها بسيطا وعليك أن تفكر جيّدا في أهميّة المسألة :

- حاول أن تستفيد من التمرين السابق، وأن تجد العلاقة التالية : $T_2 - T_1 + P = ma$.
- إذا كانت الحركة سريعة يكون a كبيرا، وبالتالي ستجد أن $T_1 > T_2$.
- وإذا كانت الحركة بطيئة يكون a صغيرا، وبالتالي ستجد أن $T_1 < T_2$.

التمرين 25 (وضعية ادماجية)

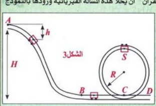
ذهب التلميذان " امزيان" و" امقران " إلى حديقة التسلية، فأدهشتهما حركة العربة في مضمارها الملتوي المسمّى بالجبال الرّوسية *(Montagnes russes)*، وزاد من حيرتهما عدم سقوطها وسقوط ركّابها من قمم للمسارات الدائرية الواقعة في مستويات شاقولية. فاستفسرا العون المسؤول عن حركة العربة فقال لهما إن العربة مزوّدة بعجلات إضافية تدعى عجلات الأمان، تضمن التلامس الدائم بين العربة والسكّة مهما كانت وضعية العربة في للضمار، كما هو موضّح في النموذج الممثل بالشكلين 1 و2.



لكن أسئلة كثيرة شغلت بالهما، وهي أنّ العربة ليست مزوّدة بمحرّك، فكيف لها أن تنتقل عبر مضمارها الطويل ؟ فمن اين لها هذه الطاقة الكافية لحركتها ؟ وهل تتمكّن من متابعة حركتها في المسارات الدائرية الشاقولية في حالة ما إذا نزعنا منها عجلات الأمان ؟

اجابهما العون بأنّ العربة مزوّدة بقوّة دفع آلي (أوتوماتيكي)، وأنه من وجهة نظر فيزيائية بحتة يُمكن للعربة بشكل حرّ أن تستغني عن قوّة الدفع الآلية، وأن تتحرّك في مضمارها، فقط يجب أن تنطلق من ارتفاع كبير.

وطلب العون من التلميذين " امزيان" و " امقران " أن يحلاّ هذه المسألة الفيزيائية وزوّدها بالنموذج الممثل في الشكل 3 .



الجزء AB ، منحن ، $H = 12m$

الجزء BC ، مستقيم وافقي.

الجزء csc ، دائري نصف قطره $R = 3,80m$

الجزء CD ، مستقيم افقي.

كتلة العربة ، $m = 200kg$

$g = 9,80ms^{-2}$

I/ التأكد من حركة العربة في المضمار $ABCSCD$ بدون محرّك

تترك العربة لحالها انطلاقا من الموضع A بدون سرعة ابتدائية، يهمل الاحتكاك.

1/ قدّر الطاقة الكلية لجملة (العربة + الأرض).

2/ استنتج سرعة العربة في الموضع c .

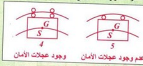
3/أ/تأكّد من أن العربة يمكنها أن تبلغ القمّة S للمسار الدائري الشاقولي.

ب/استنتج مقدار سرعتها v_S .

4/ تأكد من ان العربة تتحرك في مضمارها $ABCSCD$ دون محرك.

II/ التأكد من ان العربة لا تسقط شاقوليا عند القمة S

نقترح التأكد من أن سرعة العربة تكون كافية لأن تبقى العربة في تلامس مع السكة، عندما يمر مركز عطالتها من قمة المسار الدائري S، حتى في غياب عجلات الأمان (الشكلين 4 و5).



1/ أعد رسم الشكل 5 ومثل في G القوى الخارجية المؤثرة على جملة العربة.

2/أ/ عيّن حامل وجهة وقيمة التسارع $\vec{a}_S$ لمركز عطالة العربة G عند مروره بالقمة S.

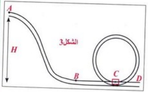
ب/ قارن بين $\vec{a}_S$ و $\vec{g}$.

3/أ/ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في الموضع S استنتج خصائص رد فعل السكة $\vec{N}$ على العربة.

ب/ تأكد من أن جهة $\vec{N}$ تسمح للعربة بالحركة على المسار الدائري دون أن تحتاج إلى عجلات الأمان، وبالتالي لا تسقط العربة شاقوليا.

الحل

التأكد من حركة العربة في المضمار



1/ الطاقة الكلية لجملة (العربة + الأرض) $ABCSCD$ بدون محرك

في الموضع A، $E_A = E_{C_A} + E_{P_A}$

E_{C_A} : الطاقة الحركية للعربة تعطى بالعبارة

$$E_{C_A} = \frac{1}{2} m v_A^2$$

لكن $v_A = 0ms^{-1}$ (انطلقت العربة من A بدون سرعة ابتدائية)

إذن، $E_{C_A} = 0J$

E_{P_A} : الطاقة الكامنة الثقالية لجملة(العربة + الأرض)، عبارتها هي $E_{P_A} = mgH$ باعتبار سطح الأرض هو المستوي المرجعي للطاقة الكامنة الثقالية، إذن، $E_A = mgH + 0$ $\boxed{E_A = 23,52J}$

$\boxed{E_A = mgH}$ بالتعويض نجد $E_A = 200 \times 9,8 \times 12$ $\boxed{E_A = 23520J = 23,52KJ}$

2/ سرعة العربة في الموضع C

بما أن الاحتكاك مهمل، فإننا نعتبر جملة (العربة + الأرض) جملة معزولة طاقويا وبالتالي نستعمل مبدأ انحفاظ الطاقة، $E_A = E_C$

لكن الطاقة الكلية في الوضع C أي E_C نعيّنها كما يلي، $E_C = E_{cC} + E_{pC}$

$E_{pC} = 0J$ لأنه لا يوجد ارتفاع بين العربة ومستوى سطح الأرض في الموضع C.

$E_{cC} = \frac{1}{2} m v_C^2$ إذن $\frac{1}{2} m v_C^2 = E_{cA}$ ومنه، $\boxed{v_C = \sqrt{\frac{2E_{cA}}{m}}}$

نعوّض فنجد، $v_C = \sqrt{\frac{2 \times 23,52}{0,2}}$ ، $\boxed{v_C = 15,3ms^{-1}}$

3/أ/ حتى تبلغ العربة القمة S يجب أن تكون سرعتها عند هذه القمة موجبة، بمعنى، $v_S > 0$

نطبّق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الموضعين A و S، $E_A = E_S$

لكن $E_S = E_{pS} + E_{cS}$

$E_{pS} = mgh$ مع $h = SC = 2R$ ، إذن $E_{pS} = mg(2R)$

كما أن $E_{cS} = \frac{1}{2} m v_S^2$ ، إذن، $\boxed{E_S = mg(2R) + \frac{1}{2} m v_S^2}$

ومنه $mgH = mgh + \frac{1}{2} m V_S^2$ ، $V_S^2 = 2g(H-h)$

بما أن $H > h$ فإن $\boxed{v_S > 0}$ ، وعليه فإن العربة يمكنها أن تبلغ القمة S.

ب/ حساب v_S

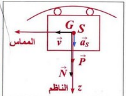
نعوّض في العبارة السابقة، $\boxed{v_S = \sqrt{2g(H-h)}}$

$$g = 9,8ms^{-2} \; ; \; h = 2R = 2 \times 3,80 = 7,6m \; ; \; H = 12m$$

$v_S = \sqrt{2 \times 9,8(12-7,6)} \approx 9,29$ ، $\boxed{v_S \approx 9,3ms^{-1}}$

4/ هذه النتائج تثبت أن العربة تتحرك في مضمارها $ABCSCD$ دون أن تحتاج إلى محرك بدليل أنها عندما انطلقت من الارتفاع $H = 12m$، وصلت القمة S بسرعة $v_S \neq 0ms^{-1}$. فلو كان $H < h = 2R$ لوجدنا أن v_S قيمته تعطى بجذر تربيعي سالب وهذا مرفوض فيزيائيا، وبالتالي لا يمكن للعربة أن تبلغ القمة S.

II/ التاكد من ان العربة لا تسقط شاقوليا عند القمة S



1/ تمثيل القوى الخارجية على جملة العربة

نمثل القوتان $\vec{P}$ و $\vec{N}$ من مركز عطالة العربة G.

$\vec{P}$: قوة ثقل العربة، حاملها شاقولي.

$\vec{N}$: فعل السكة في العربة، ويكون ناظميا (عموديا على مماس المسار الدائري) بإهمال الاحتكاك.

2/أ/ تعيين حامل وجهة وقيمة التسارع $\vec{a}_S$

نطبّق القانون الثاني لنيوتن: $\sum \vec{F} = m\vec{a}_S$

$\vec{P}$: دائما حامله شاقولي نحو الأسفل

$\vec{N}$: بعدم وجود الاحتكاك يكون ناظميا على مماس المسار، وفي النقطة S يكون حامله شاقوليا. اذن حامل المحصلة $(\vec{P}+\vec{N})$ هو شعاع شاقولي، فنستنتج ان حامل $\vec{a}_S$ شاقولي، وجهته بجهة $(\vec{P}+\vec{N})$ نحو الأسفل.

- قيمة a_S : بما أن المسار دائري فان $\boxed{a_S = a_N = \frac{v_S^2}{R}}$ حيث a_N التسارع الناظمي.

إذن $a_S = \frac{(9,3)^2}{3,8}$ ، $\boxed{a_S \approx 22,8ms^{-2}}$

المقارنة بين $\vec{a}_S$ و $\vec{g}$

- لهما نفس الحامل (الشاقول).
- لهما نفس الجهة (نحو الأسفل).
- شدتاهما مختلفتان : $a_S = 22,8ms^{-2}$ و $g = 9,8ms^{-2}$

3/أ/ خصائص رد فعل السكّة $\vec{N}$

حسب قانون الثاني لنيوتن : $\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}_S$

بالإسقاط على المحور (Oz) : $P + N = ma_S$

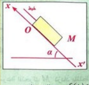
إذن : $N = ma_S - P$ ، $N = ma_S - mg$ ، $\boxed{N = m(a_S - g)}$

نعوّض عدديا فنجد : $N = 200(22,8 - 9,8)$ ، $\boxed{N = 2600N}$

اما جهة $\vec{N}$ وحامله فهو شاقولي نحو الأسفل، كما قلنا سابقا.

ب/ إن جهة $\vec{N}$ نحو الأسفل كما أجبنا في السؤال السابق يؤكّد على انّ السكة تضغط على العجلات السفلى كأنها تمسك بها، دونما حاجة إلى عجلات الأمان، وبالتالي لا تسقط العربة شاقوليا.

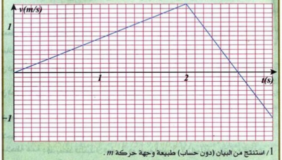
التمرين 26



متحرّك m كتلته $m = 1kg$ يمكنه الانزلاق بدون احتكاك على طول خط الميل الأعظمي $x'Ox$ لمستو مائل زاوية ميله α. المتحرّك مثبت بواسطة خيط. نعتبر المتحرّك m في حالة سكون بالنسبة لمرجع أرضي نفترضه عطاليا.

في اللّحظة $t = 0s$ يُسحب الخيط نحو الأعلى بموازاة $x'Ox$ فيؤثر بدوره على المتحرّك m بقوّة $\vec{F}$.

وفي اللّحظة $t = 2s$ ينقطع الخيط. تمثل الوثيقة المرفقة مخطط السّرعة $v = f(t)$ للمتحرّك m.



1/ استنتج من البيان (دون حساب) طبيعة وجهة حركة m.

2/ احسب قيمة التسارع a في كلّ طور.

3/ ما هي المسافة التي قطعها المتحرّك في كلّ طور ؟

4/ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، جد قيمة القوة $\vec{F}$ قبل انقطاع الخيط.

يؤخذ $g = 9,80ms^{-2}$.

الحل

1/ طبيعة الحركة وجهتها

حسب مخطط السّرعة المعطى فان المتحرّك M يمرّ بمرحلتين في حركته.

- الطور الأوّل : $0s \leq t \leq 2s$

سرعة المتحرك تزداد بانتظام وقيمها موجبة (تزداد دالة السرعة $v(t)$ بشكل خطي)، وعليه فإن حركته مستقيمة متغيّرة بانتظام متسارعة، في الاتجاه الموجب لمعلم الحركة (أي أن المتحرك في حالة صعود).

• الطور الثاني : $2s \le t \le 2,6s$

سرعة المتحرك M تتناقص بانتظام، وقيمها موجبة (تتناقص دالة السرعة $v(t)$ بشكل خطي)، وعليه فإن حركته مستقيمة متغيّرة بانتظام متباطئة، في الاتجاه الموجب لمعلم الحركة (أي أن المتحرك ما زال في حالة صعود)، ويتوقف عن الحركة في اللحظة $t = 2,6s$ ثم يغيّر جهة حركته.

• الطور الثالث : $2,6s \le t \le 3,0s$

سرعة المتحرك M تزداد بانتظام (بالقيمة المطلقة). وقيمها سالبة وعليه فإن الحركة مستقيمة متغيّرة بانتظام متسارعة، لكن في الاتجاه السالب لمعلم الحركة (أي أن المتحرك في حالة هبوط).

2/ حساب قيمة التسارع a في كل طور

تعطى قيمة التسارع اللحظي a للمتحرك M بعبارة مشتق السرعة بالنسبة للزمن، أي $a = \frac{dv}{dt}$

بيانيا a يمثل بميل مخطط السرعة $v = f(t)$ في كل طور من أطواره.

في الطور الأول ، $a_1 = \frac{1,5-0}{2-0} = 0,75ms^{-2}$

في الطور الثاني ، $a_2 = \frac{0-1,5}{2,6-2} = -2,5ms^{-2}$

في الطور الثالث ، $a_3 = \frac{-1-0}{3-2,6} = -2,5ms^{-2}$

لاحظ أن $a_2 = a_3$ لأن لقطعتي المستقيمين نفس الميل

ملاحظة هامّة : قد يعتقد التلميذ أن الطور 2 هو نفسه الطور 3، لأن لهما نفس التسارع، فهذا غير صحيح لأن في الطور 2 يكون المتحرك في الجهة الموجبة للحركة، ويتوقف في اللحظة $t = 2,6s$ ثم يغيّر جهة حركته، ويتغيّر في الاتجاه السالب للحركة.

3/ حساب المسافة المقطوعة في كل طور

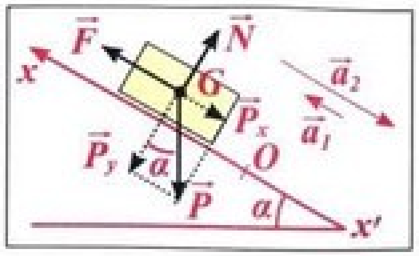
• في الطور I : d_1 = عدديا مساحة الشكل الذي يحصره مخطط السرعة مع محور الزمن.

إذن : d_1 = عدديا مساحة المثلث = $\frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2} = \frac{1,5 \times 2}{2}$

$\boxed{d_1 = 1,5m}$

• في الطور II ، $d_2 = \frac{1,5 \times 0,6}{2}$ ، أي $\boxed{d_2 = 0,45m}$

• في الطور III ، $d_3 = \frac{|-1| \times 0,4}{2}$ ، أي $\boxed{d_3 = 0,2m}$



4/ إيجاد قيمة القوة $\vec{F}$

• الجملة : المتحرك M

• المعلم : $(x'Ox)$ معلم سطحي أرضي، نفترضه عطاليا.

• القوى الخارجية :

$\vec{F}$: القوة المؤثرة على الخيط،

$\vec{P}$: ثقل المتحرك،

$\vec{R}$: فعل المستوى المائل على المتحرك وهو ناظميا على المستوي المائل لعدم وجود احتكاك.

نطبق القانون الثاني لنيوتن ، $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ، إذن : $\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = m\vec{a}$

بالإسقاط على معلم الحركة : $-P\sin\alpha + F = ma$ ، ومنه $F = ma + mg\sin\alpha$

$\boxed{F = m(a + g\sin\alpha)}$ ......*

في الطور الأول ، $a = a_1 = 0,75ms^{-2}$ ولدينا أيضا ، $m = 0,1kg$ ، $g = 9,80ms^{-2}$

لكن α زاوية مجهولة يجب تعيينها من الطور الثاني لأن $F = 0N$ وذلك لأن الخيط انقطع، أما في الطور الأول فقيمة F مجهولة.

نضع $F = 0N$ في العبارة * السابقة فنجد ، $0 = m(a_2 + g\sin\alpha)$

إذن $a_2 = -g\sin\alpha$ ، ومنه ، $\sin\alpha = \frac{-a_2}{g}$ ، أي $\sin\alpha = \frac{-(-2,5)}{9,8} = 0,255$

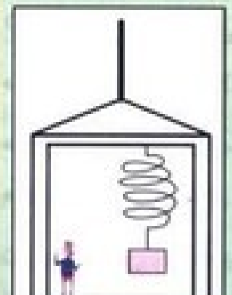
نعوّض الآن في العبارة * فنجد ، $F = 1(0,75 + 9,8 \times 0,255)$ ، ومنه $\boxed{F = 3,25N}$

التمرين 27 (وضعية ادماجية)

وُجد أحد علماء الفيزياء داخل مصعد متجانس تماما، ولا توجد به فتحة يراقب من خلالها حركة المصعد بالنسبة للعمارة. بإحدى نقاط المصعد توجد ربيعة في وضع شاقولي مثبت به جسم كتلته m.

في البداية كان المصعد متوقفا، فلاحظ العالم أن القيمة التي تشير إليها الربيعة هي $2,4N$. ولما انطلق المصعد نحو الأسفل شعر الشخص لذة وجيزة بخفة وزنه، ولاحظ أن الرّبيعة تشير إلى إحدى القيم ، $2,4N$ ، $2,0N$ و $3N$.

وبعد بعض الدقائق، لاحظ أن الرّبيعة تشير إلى القيمة $0N$ فشعر بخوف شديد، لأنه استنتج عندها تغيّر حركة المصعد، وبالتالي فسرّه بحدوث أمر ما للمصعد، فأراد أن يتأكد من ذلك، وكان الرّجل يحمل معه كتابا، فتركه يسقط من يده، فلاحظ عندها أن الكتاب بقي معلقا في مكانه. عندها اتصل هاتفيا بالمصلحة المختصة بالمصاعد.



1/ استنتج قيمة الكتلة m للجسم المعلق بالرّبيعة.

2/أ/ كيف تفسّر أنّ العالم شعر بخفّة وزنه ؟

ب/ حدّد القيمة التي أشارت إليها الرّبيعة في الطّور الثاني من حركتها، واستنتج حينئذ تسارع حركة المصعد.

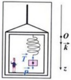
3/أ/ ماذا يعني كون الرّبيعة أشارت إلى القيمة $0N$.

ب/ لماذا شعر العالم بالخوف ؟ هل تخوّفه كان في محله ؟

ج/ كيف تفسّر بقاء الكتاب عالقا في المكان الذي ترك منه ليسقط ؟

$g = 10N.kg^{-1}$

الحل



1/ استنتاج قيمة الكتلة m للجسم المعلّق بالرّبيعة

- الجملة : الجسم m .
- المعلم : $(O,\vec{k})$ سطحي أرضي نفترضه عطاليا.
- القوى الخارجية : ثقل الجسم $\vec{P}$ وقوة الإرجاع $\vec{T}$.

بما أنّ المصعد موقف فإنّ الجملة في حالة توازن، وحسب مبدأ العطالة

لدينا : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ إذن : $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

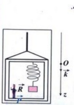
بالإسقاط على معلم الحركة : $+P - T = 0$ ومنه : $T = P$

لكن $\mathrm{T = mg}$ ، إذن $T = mg$ أي $\boxed{m = \dfrac{T}{g}}$

القوة التي تحدّدها قيمتها الرّبيعة هي القوة $\vec{T}$ وعليه فإنّ $T = 2,4N$

وفي نهاية التمرين أعطي $g = 10N.kg^{-1}$ ، نعوّض فنجد $m = \dfrac{2,4}{10}$

$\boxed{m = 0,24kg}$



2/أ/ لتفسير شعور العالم بخفّة وزنه لمدة صغيرة، نستعرض القوى المؤثرة عليه.

- الجملة : الشخص الذي نفترض أنّ كتلته هي M .
- المعلم : $(O,\vec{k})$ معلم سطحي أرضي نفترضه عطاليا.
- القوى الخارجية :

ثقل الشخص $\vec{P}_1$ بحيث $\vec{P}_1 = M\vec{g}$ ، وفعل أرضية المصعد $\vec{R}$ على الشخص.

نطبّق القانون الثاني لنيوتن على مركز العطالة $\vec{G}$ للشخص :

$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}$ حيث $\vec{a}$ التسارع الذي انطلق به الشخص، وهو نفس تسارع المصعد، إذن : $\vec{P}_1 + \vec{R} = M\vec{a}$

وبالإسقاط على معلم الحركة $(O,\vec{k})$ نجد : $+P_1 + R = Ma$

إذن : $R = P_1 - Ma$

وبما أنّ $P_1 = Mg$ ، إذن $R = Mg - Ma$ ومنه : $\boxed{R = M(g-a)}$

نجري المناقشة التالية :

- إذا كان المصعد ساكنا أو متحرّكا حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة للمعلم $(O,\vec{k})$ فإنّ $a = 0ms^{-2}$ ، ومنه $R = M(0+g)$ ، $\boxed{R = Mg}$ ، فالشخص يشعر بثقله فقط.
- إذا كانت حركة المصعد مستقيمة متغيرة بانتظام متسارعة فانّ جهة $\vec{a}$ بجهة معلم الحركة، وبالتالي تكون قيمة a موجبة وهذا يؤدّي إلى $\boxed{R < Mg}$ ، أي أن الشخص يشعر بثقل ظاهري أقل من ثقله الحقيقي وهذا هو تفسير شعوره بخفّة وزنه.

ب/ القيمة التي أشارت إليها الرّبيعة

نطبّق القانون الثاني لنيوتن على جملة الجسم المعلّق بالرّبيعة : $\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}$ إذن $\vec{P} + \vec{T} = M\vec{a}$

بالإسقاط على معلم الحركة : $P - T = ma$ ومنه : $T = P - ma$ أي : $T = mg - ma$

وبالتالي : $\boxed{T = m(g-a)}$.

لاحظ أن $T < mg = 2,4N$ ، فنأخذ من بين القيم المعطاة القيمة $\boxed{T = 2,0N}$ ، وهي القيمة التي تشير إليها الرّبيعة لأنه إذا كان $T = 3,0N$ فيجب أن يكون $T > mg$ ، وهذا غير وارد حسب معطيات التمرين.

ب/ استنتاج قيمة تسارع حركة المصعد a

من العبارة السابقة $P - T = ma$ نجد : $a = \dfrac{P-T}{m}$ إذن $\boxed{a = \dfrac{mg-T}{m}}$

نعوّض فنجد : $a = \dfrac{0,24 \times 10 - 2,0}{0,24}$ ، $\boxed{a \approx 1,67ms^{-2}}$

3/أ/ عندما تشير الربيعة الى القيمة $0N$ معناه $T = 0N$

وهذا يؤدّي إلى $a = \dfrac{mg-0}{m}$ أي $\boxed{a = g}$ أي تسارع المصعد a أصبح مساويا لتسارع حقل جاذبية الأرض g ، وكان المصعد في حالة سقوط حرّ.

ب/ سبب شعور العالم بالخوف

لمّا رأى العالم أن الرّبيعة تشير إلى $0N$ أدرك أن المصعد في حالة سقوط حرّ، فتوقّع أن الكوابل التي تشدّ المصعد قد انقطعت، لذلك شعر بالخوف، وقد كان تخوّفه في محلّه.

ج/ عندما يترك جسم مثل الكتاب ليسقط في مقصورة المصعد، وكان المصعد في حالة هبوط أو صعود بتسارع $a < g$ فإنّ الكتاب حتما سيسقط على أرضية المصعد.

أمّا إذا كان المصعد في حالة سقوط حرّ بتسارع $a = g$ وتركنا الكتاب يسقط دون إعطائه سرعة ابتدائية، فانّ الكتاب أيضا سيكون في حالة سقوط حرّ وبتسارع هو نفسه تسارع جاذبية الأرض، ولذا يكون في حركة نسبية معدومة بالنسبة للمصعد، فيظهر وكأنه عالق في مكان سقوطه.

وهذا ما تأكّد منه العالم ... فأيّ نهاية تنتظر عالمنا هذا ؟!!!...

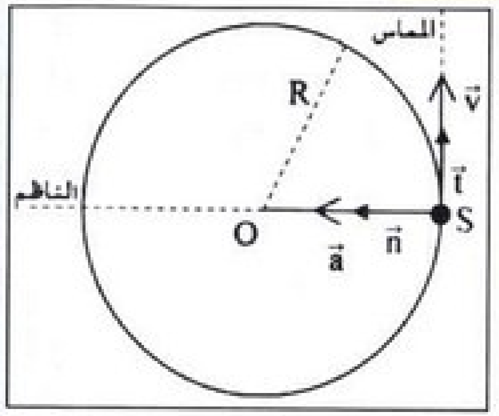
2 – شرح حركة كوكب أو قمر صناعي

1. الحركة الدائرية المنتظمة

لقد رأينا في دراسة سابقة أن تغير السرعة $\Delta\vec{v}$ لحركة دائرية منتظمة يتجه دوما نحو المركز.

تعريف

الحركة الدائرية المنتظمة هي حركة مسارها دائري، وسرعتها اللحظية ثابتة الشدة، ومتغيرة الجهة في كل لحظة.



خصائصها

- المسار : دائري.
- السرعة اللحظية $\vec{v}$:
  - شدتها v : ثابتة في كل لحظة.
  - اتجاهها : متغير في كل لحظة.
  - حاملها : مماسي للمسار في كل لحظة.
- التسارع اللحظي $\vec{a}$:

ينتج من تغير جهة السرعة. يمكن البرهنة على أن :

- قيمته تعطى بالعبارة $\boxed{a=\frac{v^2}{R}}$ حيث R :نصف قطر المسار.
- حامله : هو الناظم على المسار.
- اتجاهه : نحو مركز الدوران (O).

ملاحظة هامة

1/ بما أن الجسم النقطي (M) في حركة دائرية منتظمة، لذا يمكن أن يرفق بحركته معلم متحرك $(M,\vec{N},\vec{T})$، يتحرك مع الجسم ندعوه (معلم فريني) R. Frenet

حيث : $\vec{N}$ شعاع الوحدة الناظمي، $\vec{T}$ شعاع الوحدة المماسي.

2/ بما أن شعاع التسارع اللحظي $\vec{a}$ يعرف كما يلي : $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$

لكن $\vec{v}$ محمولة على المماس دوما، لذا نكتب : $\vec{v}=v\vec{T}$

وباشتقاق هذه العبارة نجد عبارة $\vec{a}$: $\vec{a}=\frac{d(v\vec{T})}{dt}=\frac{dv}{dt}\vec{T}+v\times\frac{d\vec{T}}{dt}$

بما أن ثابت $=v$ فإن $\frac{dv}{dt}=0$

كذلك يبرهن على أن $\frac{d\vec{T}}{dt}=\frac{v}{R}\times\vec{N}$

إذن نكتب : $\vec{a}=0\vec{T}+v\times\frac{v}{R}\vec{N}$

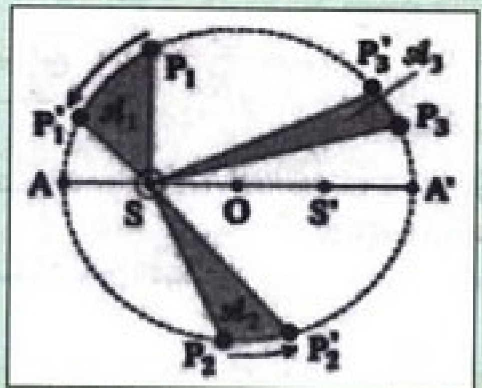
ومنه نجد عبارة $\vec{a}$: $\boxed{\vec{a}=\vec{a}_N=\frac{v^2}{R}\vec{N}}$

لاحظ أن جهة $\vec{a}$ بجهة الشعاع الناظم $\vec{N}$ الذي هو يتجه دوما نحو مركز الدوران (O) لذا يقال عن التسارع في الحركة الدائرية المنتظمة إنه (تسارع مركزي *centripète*) (أو تسارع ناظمي).

تعطى قيمة السرعة اللحظية بالعبارة $\boxed{V=\frac{\text{محيط الدائرة}}{\text{زمن دور تواحدة }(T)}}$ أي $\boxed{v=\frac{2\pi R}{T}}$

2. قوانين كبلر

- **القانون الأول (1609 م) :** يدور كل كوكب حول الشمس في الاتجاه المباشر في مسار على شكل قطع ناقص، حيث تقع الشمس في أحد محرقيه (بؤرتيه).
- **القانون الثاني (1609 م) :** يمسح الشعاع الواصل بين الشمس والكوكب مساحات متساوية في فترات زمنية متساوية.
- **القانون الثالث (1619 م) :** يتناسب مربع الدور الزمني T للكوكب حول الشمس مع مكعب نصف طول المحور الكبير R لمداره، أي أن مقدار ثابت $=k=\frac{T^2}{R^3}$.



3. قانون الجذب العام

- كما سبق أن قلنا فإن العالم كبلر بقوانينه الثلاثة، استطاع أن يصف حركة الكواكب وصفا دقيقا (وصفا حركيا لا وصفا ديناميكيا).
- فالقانون الأول ينص على أن مدار الكوكب يكون على شكل قطع ناقص، وكحالة خاصة نفرض أن المسار دائري (للعلم فإن الدائرة هي حالة خاصة من القطع الناقص في حالة انطباق المحرقين (البؤرتين) في مركز الدائرة). وعليه نعتبر أن حركة الكوكب دائرية منتظمة، تسارعها $a=\frac{v^2}{R}$

ولإيجاد القوة التي يخضع لها الكوكب (مثلا القوة التي تخضع لها الأرض التي كتلتها m من قبل الشمس التي كتلتها m' نستعمل القانون الثاني لنيوتن $\vec{F} = m\vec{a}$.

وعليه فإن القوة $\vec{F}$ هي قوة تتجه نحو المركز (O) (انظر الشكل) لذا تسمى قوة جاذبة مركزية

وشدة هذه القوة هي : $F = ma = \frac{mv^2}{R} ......(1)$

وحيث ان سرعة الكوكب v تعطى بالعبارة $v = \frac{2\pi R}{T}$

مع : R نصف قطر المدار، و T دور الحركة (زمن دورة واحدة)، فإن : $F = \frac{m\frac{2\pi R^2}{T}}{R}$

إذن : $F = \frac{4\pi^2 mR^2}{T^2} ......(2)$

وحسب القانون الثالث لكبلر فإن : $\frac{T^2}{R^3} = K$ إذن : $T^2 = KR^3$

نعوض عن T^2 بما يساويه في المعادلة (2) فنجد : $F = \frac{4\pi^2 mR}{KR^3}$

إذن : $F = \frac{4\pi^2 m}{KR^2}$ وهي القوة المتسببة في حركة الكوكب.

وبوضع $\frac{4\pi^2}{K} = Gm'$ نجد : $\boxed{F = G\frac{mm'}{R^2}}$

وهو قانون الجذب العام لنيوتن.

يصف العالم الرياضياتي الفرنسي (لاغرانج $LAGRANGE$) قانون الجاذبية فيقول :

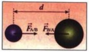
(إن للكون قانونا واحدا وقد اكتشفه نيوتن).

هذا القانون يدخل في سياق مبدأ الفعلين المتبادلين.

نص القانون

كل جسم يجذب اي جسم اخر بقوة تتناسب طردا مع جداء كتلتيهما، وعكسا مع مربع المسافة بينهما.

- بالنسبة لجسمين (A) و(B) تنمذج قوة الجاذبية بينهما كما يلي :



$$F_{A/B} = F_{B/A} = G\frac{M_A M_B}{d^2}$$

$$G = 6,67 \times 10^{-11} N.m^2 Kg^{-2}$$

M_A كتلة الجسم (A) بـ (kg)، M_B كتلة الجسم (B) بـ (kg).

d المسافة بين مركزي عطالتي الجسمين بـ (m).

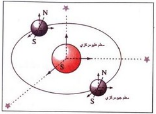
G : ثابت كوني يسمى ثابت الجذب العام.

- استطاع العالم هنري كافنديش عام 1798م حساب الثابت G بميزان يسمى باسمه (ميزان كافنديش) وهي القيمة المعطاة سابقا.

لقد آمن الناس بقوانين نيوتن وأخذوا بها حتى أن الانجليزي "جيمس ادامس" استطاع اكتشاف الكوكب الثامن وهو نبتون فحدد كتلته وموقعه وكذلك فعل الفلكي " لوفريي"، فتوصل إلى نفس التنبؤات وأرسل تقريره بذلك إلى مرصد برلين وفي نفس الليلة وجه الفلكي الألماني "غال" مرصده إلى السماء فلاحظ هذا الكوكب، وتلاه اكتشاف كوكب بلوتون عام 1930 من قبل الأمريكي"تومبو".

4. شرح حركة كوكب أو قمر صناعي

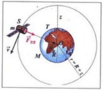
1. مقدمة



- لدراسة حركة كوكب (مثل حركة كوكب الأرض حول الشمس) او حركة قمر او قمر صناعي حول كوكب معين (مثل حركة القمر حول الأرض): نعتبر كل كوكب او قمر نقطة مادية مجمعة في مركز عطالتها.
- كما نعتبر أن المسار دائري.
- كذلك نستعمل المعلم الهليومركزي (المركزي الشمسي) إذا أردنا دراسة حركة الكواكب حول الشمس.

أما إذا أردنا دراسة حركة الأقمار أو الأقمار الصناعية حول كوكب معين فإننا نستعمل المعلم الجيومركزي (المركزي الأرضي).

1. سرعة قمر صناعي في مدار دائري



نعتبر قمرا صناعيا كتلته m على ارتفاع (Z) من كوكب وليكن الأرض كتلته M ونصف قطره R. وان حركة هذا القمر هي حركة دائرية منتظمة بسرعة $\vec{v}$.

- لنعين قيمة $\vec{v}$.

تدرس الحركة بالنسبة لمعلم مركزي ارضي، نطبق القانون الثاني لنيوتن على مركز العطالة G للقمر الصناعي :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

هنا توجد قوة واحدة هي قوة جذب الأرض $\vec{F}_{T/S}$ للقمر، مع إهمال تأثير بقية الأجسام الأخرى.

إذن : $\vec{F}_{T/S} = m\vec{a}$ ومع العلم بان قوة الجاذبية $\vec{F}_{T/S}$ تعطى بالعبارة : $\vec{F}_{T/S} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{u}$

لاحظ ان جهة $\vec{F}_{T/S}$ بعكس جهة $\vec{u}$ لذا ظهرت الإشارة $(-)$.

هنا $r = R + Z$ لذا نكتب من جديد القوة $\vec{F}$ كما يلي : $\vec{F}_{T/S} = -G\frac{mM}{(Z+R)^2}\vec{u}$

◄ نعلم أن قيمة التسارع في الحركة الدائرية المنتظمة تعطى بالعبارة $a=\frac{v^2}{R+Z}$

كما أن جهة التسارع $\vec{a}$ هي جهة الشعاع الناظم $\vec{N}$

وبالتالي فهو بعكس شعاع الوحدة $\vec{u}$، لذا نكتب: $\vec{a}=\frac{v^2}{R+Z}\vec{N}=-\frac{v^2}{R+Z}\vec{u}$

بتجميع كل العلاقات السابقة نجد:

$$\vec{F}_{T/S}=-\frac{mv^2}{R+Z}\vec{u}=-\frac{GmM}{R+Z}\vec{u}$$

أي $m\frac{v^2}{R+Z}=G\frac{mM}{(R+Z)^2}$ إذن: $\frac{v^2}{R+Z}=\frac{GM}{(R+Z)^2}$

وهي عبارة سرعة القمر الصناعي في مداره $\boxed{v=\sqrt{\frac{GM}{R+Z}}}$

3- عبارة الدور الزمني T

نعلم أن القمر الصناعي في أثناء دورانه حول الأرض فإنه ينجز دورة كاملة خلال زمن ثابت ندعوه الدور الزمني T وقيمته نحسبها كما يلي:

$$T=\frac{2\pi r}{v}$$

هنا $r=R+Z$ إذن: $T=\frac{2\pi(Z+R)}{v}$

$$T=\frac{2\pi(Z+R)}{\sqrt{GM(Z+R)}}\ ;\ \boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{(Z+R)^3}{GM}}}$$

ملاحظة هامة

انطلاقا من عبارة الدور T يمكن إيجاد القانون الثالث لكبلر.

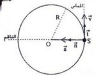
إذن، بتربيع T نجد: $T^2=4\pi^2\frac{(Z+r)^3}{GM}$ أي $\frac{T^2}{(R+Z)^3}=\frac{4\pi^2}{GM}$

لكن: $r=R+Z$

إذن: $\boxed{\frac{T^2}{r^3}=\frac{4\pi^2}{GM}=\text{مقدار ثابت}}$

وهذا هو القانون الثالث لكبلر.

II/ شرح حركة كوكب أو قمر صناعي



1/ الحركة الدّائرية المنتظمة

- **خصائصها**
- **المسار**: دائري.
- **السرعة**: ثابتة القيمة ثابت $v=$.
- **التسارع**: ناظمي أو مركزي، $\boxed{a=a_n=\frac{v^2}{R}}$ حيث R نصف قطر المسار الدائري.
- **القوة**: جاذبة مركزية، $\boxed{\vec{F}=m\frac{v^2}{R}\vec{u}_N}$
- **الدور الزمني** T: وهو زمن انجاز دورة واحدة، $\boxed{T=\frac{2\pi R}{v}}$

2/ شرح حركة كوكب باستعمال قوانين كبلر

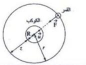
- **القوانين الثلاثة لكبلر**

القانون الأول:	في معلم هليومركزي، يدور الكوكب حول الشمس في مسارات إهليلجية (قطع ناقص) تقع الشمس في أحد محرقيه.
القانون الثاني:	يمسح الشعاع الواصل بين الشمس والكوكب مساحات متساوية خلال فترات زمنية متساوية.
القانون الثالث:	يتناسب مربع الدور T^2 للكوكب حول الشمس مع مكعب نصف طول المحور الكبير a، بمعنى: مقدار ثابت $\frac{T^2}{a^3}=k=$.

3/ تفسير حركة الكواكب والأقمار الصّناعية باستعمال قانون الجذب العام لنيوتن

- في معلم هليومركزي يخضع كلّ كوكب إلى قوّة جاذبية الشمس له، وتعطى بالعبارة:

حيث: $\boxed{F=\frac{GmM}{r^2}}$



ثابت الجذب العام: $G=6{,}67.10^{-11}\,N.m^2kg^{-2}$

كتلة الكوكب: m

كتلة الشمس: M

بعد مركزي عطالتي الكوكب والشمس: r

- يُعمّم هذا القانون على حركة كلّ التوابع (قمر، قمر صناعي) حول الكوكب أو الجرم الذي تدور حوله. مثل حركة القمر، أو أي قمر صناعي حول الأرض.
- تنمذج حركة الكواكب أو التوابع بحركة دائرية منتظمة :

دورها : $\boxed{T = \frac{2\pi r}{v}}$ ، وسرعتها : $\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{r}}}$

التمرين 1 : خصائص الحركة الدائرية المنتظمة

في حركة دائرية منتظمة نصف قطرها R وسرعتها $\vec{v}$ ، بيّن إذا كانت العبارات التالية صحيحة :

1/ شعاع السرعة $\vec{v}$ ثابت.

2/ قيمة شعاع السرعة v ثابتة.

3/ التسارع يتجه نحو مركز الدوران ويسمى التسارع الناظمي $\vec{a}_N$.

4/ التسارع مماسي ويسمى التسارع المماسي $\vec{a}_T$.

5/ قيمة التسارع الكلي $\vec{a}$: $a = a_N = \frac{v^2}{R}$

6/ التسارع المماسي معدوم $\vec{a}_T = \vec{0}$.

7/ القوة جاذبة مركزية.

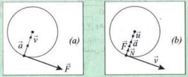
الحل

1/ خطأ 2/ صحيح 3/ صحيح 4/ خطأ 5/ صحيح 6/ صحيح 7/ صحيح.

التمرين 2 : خصائص الحركة الدائرية المنتظمة

في حركة دائرية منتظمة نصف قطرها R وسرعتها v :

1/ أ/ اختر الشكل الصحيح الذي يتوافق مع الحركة الدائرية المنتظمة.



ب/ يعطى التسارع اللحظي $\vec{a}$ بالعبارات التالية. اختر الصحيح منها :

$$\vec{a} = \vec{0} \quad , \quad \vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{u} \quad , \quad \vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{N}$$

حيث $\vec{N}$ شعاع الوحدة الناظمي، و $\vec{u}$ شعاع وحدة ممثل في الشكل.

2/ يعطى الدور الزمني T بإحدى العبارتين التاليتين. اختر واحدة منهما : $T = \frac{2\pi R}{v}$ ، $T = \frac{\pi R^2}{v}$

3/ باعتبار الأرض كروية، كل نقطة من سطحها تدور حول مركز الأرض بسرعة. اختر قيمتها من بين الإجابات التالية : $v = 465 m.s^{-1}$ ، $v \approx 365 m.s^{-1}$ ، $v = 1 m.s^{-1}$.
يعطى : نصف قطر الأرض $R \approx 6400\,km$
والدور الزمني لحركة نقطة حول مركز الأرض $T = 23h\,56\,min$

4/ باعتبار الأرض نقطة مادية مجمعة في مركز عطالتها G وتدور حول الشمس في مسار نعتبره دائريا، نصف قطره $R = 1,5 \times 10^{11} m$ ودورها حول الشمس $T = 365,25 J$، اختر قيمة لسرعتها حول مركز الشمس : $v \approx 30 km.s^{-1}$ ، $v \approx 465 m.s^{-1}$ ، $v \approx 300000 km.s^{-1}$.

الحل

1 /أ/ الشكل الصحيح هو b

ب/ العبارتان الصحيحتان هما : $\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{N}$ و $\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{u}$

2/ يعطى الدور الزمني في الحركة الدائرية المنتظمة بالعبارة $T = \frac{2\pi R}{v}$

3/ إن اي نقطة من سطح الكرة الأرضية تدور حول الأرض بسرعة ثابتة نحسبها كما يلي

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

لكن $T = 23h\,56min$ ، اي $T \approx 24h$ إذن $T \approx 24 \times 3600 = 86400s$

كذلك $R \approx 6400\,km$ نعوض فنجد ، $v = \frac{2 \times 3,14 \times 6400 \times 10^3}{86400}$

إذن $\boxed{v \approx 465 m.s^{-1}}$ وهي الإجابة الصحيحة.

4/ نعين سرعة مركز عطالة الأرض حول الشمس بالعبارة : $v = \frac{2\pi R}{T}$

$$T = 365,25J = 365,25 \times 24 \times 3600s$$

نعوض فنجد : $v = \frac{2\pi \times 1,5 \times 10^{11}}{365,25 \times 24 \times 3600} = 2,98 \times 10^4$

$$\boxed{v \approx 3.10^4 m.s^{-1} = 30 km.s^{-1}}$$

إذن : $v \approx 30 km.s^{-1}$ وهي الإجابة الصحيحة.

هل تعلم أننا نسير في مركبة فضائية هي الأرضية تسير بسرعة $(30km/s)$ وهي سرعة كبيرة نسبيا مقارنة بكل الحركات التي تتم على الأرض ما عدا الضوء الذي يسير بسرعة رهيبة هي $(300000km/s)$.

التمرين 3 : المعالم العطالية

إليك المعطيات التالية :

- نصف قطر الأرض $R_0 = 6400km$.
- الدور الزمني لدوران الأرض حول محورها $T_0 \approx 24h$.
- نصف قطر مدار الأرض في مسارها حول الشمس $R = 1,5.10^{11} m$.
- الزمن الدوري لدوران الأرض حول الشمس $T = 1année$.
- نصف قطر مدار الشمس في مسارها الدائري حول المجرة $R_S = 3.10^{20} m$.
- السرعة الخطية للشمس في مسارها حول مركز المجرة قيمتها ثابتة وهي $v = 3 \times 10^5 m.s^{-1}$.

1 / هل المعلم السطحي الأرضي هو معلم عطالي ؟
إذا كان جوابك (لا) فكيف يمكن اعتباره كذلك ؟ برر إجابتك.

2/ هل المعلم المركزي الأرضي (معلم بطليموس) هو معلم عطالي ؟ برر إجابتك.

3/ هل المعلم المركزي الشمسي (معلم كوبرنيكس) هو معلم عطالي ؟ برر إجابتك.

الحل

1 / للوهلة الأولى، نقول أن المعلم السطحي الأرض هو معلم لا عطالي لأنه مرتبط بسطح الأرض وبالتالي فهو يدور معها حول محورها، فله إذن تسارع جاذب مركزي. (من وجهة نظر نيوتن).

نحسب شدته كالتالي : باعتبار أن حركته دائرية منتظمة فإن : $a = a_N = \frac{v^2}{R_T}$

وإذا كان هذا المعلم موجودا على خط الاستواء فإن $R = R_0$

ومنه $a_0 = \frac{v^2}{R_0}$ لكن $v = \frac{2\pi R_0}{T_0}$

إذن $a_0 = (\frac{2\pi}{T_0})^2 R_0$ نعوض فنجد : $a_0 = (\frac{2 \times 3,14}{24 \times 3600})^2 \times 6400 \times 10^3$

ومنه $\boxed{a_0 = 3,38 \times 10^{-2} m.s^{-2}}$

وهذه قيمة لا يمكن إهمالها بسهولة، إذن فالمعلم السطحي الأرضي هو معلم لا عطالي من وجهة نظر مطلقة غير أنه من الناحية العملية، في زمن قصير في حدود بعض الدقائق. يمكن إهمال أثر هذا التسارع وعليه يمكن اعتبار المعلم السطحي الأرضي معلما عطاليا.

2/ إن المعلم المركزي الأرضي، يتحرك مع الأرض في مسارها الذي نفرضه دائريا حول الشمس (في الواقع هو قطع ناقص) وعليه فإنه من وجهة نظر نيوتن، فإن التسارع الذي يكتسبه الجسم، يكون تسارعا جاذبا ونعين قيمته كما يلي :

$a = (\frac{2\pi}{T})^2 R$ نعوض ، $a = \frac{2 \times 3,14}{365 \times 24 \times 3600} \times 1,5 \times 10^{11}$

$$\boxed{a = 5,95 \times 10^{-3} m.s^{-2}}$$

ولا يمكن إهمال هذه القيمة، فالمعلم المركزي الأرضي، هو معلم لا عطالي من وجهة نظر مطلقة، لكن بتقريب مقبول، يمكن اعتبار المعلم المركزي الأرضي معلما عطاليا في زمن قصير نسبيا.

3/ إن المعلم المركزي الشمسي يتحرك مع الشمس في مسارها الذي نفرضه دائريا حول مركز المجرة في مدار نصف قطره $R_S = 3\times10^{20}\, m.s^{-1}$ وبسرعة خطية تساوي $3\times10^{5}\, m.s^{-1}$.

والتسارع الذي يكتسبه نعينه كالتالي :

$$a_S = \frac{v^2}{R_S} \quad \text{إذن} \quad a_S = \frac{(3\times10^5)^2}{3\times10^{20}} \quad \text{أي} \quad \boxed{a_S = 3\times10^{-10}\, m.s^{-2}}$$

وهذه القيمة صغيرة جدا يمكن إهمالها، لذا يمكن اعتبار المعلم المركزي الشمسي معلما عطاليا وبتقريب جيد.

التمرين 4 : قوانين كبلر

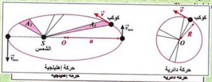
وضع العالم الألماني يوهانز كبلر ثلاثة قوانين تجريبية تصف حركة الكواكب السيارة حول الشمس، وهذا بناء على إرصادات فلكية دقيقة قام بها الفلكي تيخو براهي بمعيته، نلخصها في المعلومات أسفله مع ذكر احد القوانين الثلاثة.

المساحتان A_1 , A_2 متساويتان.

زمن مسح المساحة A_1 = زمن مسح المساحة A_2 .

T : الدور الزمني.

a : نصف



1/ بناء على هذه المعلومات، ذكر بالقانونين الأول والثاني لكبلر، علما بان الأول يخص نوع المسار والثاني يتعلق بالمساحة الممسوحة.

2/ اعط بعض نتائج قوانين كبلر، وناقش الحالة الخاصة عندما يكون المسار دائريا.

الحل

1/ التذكير بالقانونين الأول والثاني لكبلر

- علما بأن القانون الأول يمس نوع المسار، لذا نكتب :

نص القانون الأول :

مسار الكوكب حول الشمس هو قطع ناقص تقع الشمس في إحدى محرقيه.

- بما أن القانون الثاني يمس المساحة الممسوحة، نكتب :

نص القانون الثاني :

يمسح الشعاع الواصل بين الشمس والكوكب مساحات متساوية خلال أزمنة متساوية.

2/ نص القانون الثالث :

يتناسب مربع الدور الزمني T للكوكب حول الشمس مع مكعب نصف طول المحور الكبير a لمدار هذا الكوكب. اي مقدار ثابت $= K = \frac{T^2}{a^3}$.

3/ بعض نتائج قوانين كبلر

- يمر الكوكب في حركته حول الشمس بأقصى نقطة ندعوها الأوج، وبأقرب نقطة من الشمس ندعوها الحضيض.
- سرعة الكوكب في الأوج (الرأس الأبعد) تكون أصغر ما يمكن ($\vec{v}_{min}$) وفي الحضيض (الراس الأقرب) تكون اعظم ما يمكن ($\vec{v}_{max}$).
- حركة الكوكب ليست منتظمة.
- يمكن تعميم قوانين كبلر على التوابع مثل حركة القمر حول الأرض.
- المقدار الثابت K يعتمد على الجرم الذي يدور حوله الكواكب مثل جرم الشمس أو حتى جرم الأرض إذا ما أردنا دراسة حركة القمر حولها.

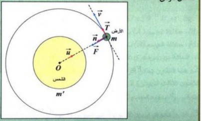
في حالة المسار الدائري نحصل على النتائج التالية :

- ينطبق المحرق مع مركز الدائرة.
- سرعة الكوكب تكون قيمتها ثابتة.
- حركة الكوكب تكون دائرية منتظمة.
- القانون الثالث نكتبه كما يلي : $\frac{T^2}{R^3} = K$.

التمرين 5: من القانون الثالث لكبلر إلى قانون الجاذبية لنيوتن

كمقاربة اولية لاستنتاج قانون الجاذبية، نعتبر أن كوكبا كتلته (m) يدور حول الشمس التي كتلتها (m').

حركة دائرية منتظمة، نصف قطرها R وبسرعة $\vec{v}$ بالنسبة لمعلم هيلومركزي كما يوضحه الشكل المرفق.



1/ أ/ مثل القوة $\vec{F}$ التي يخضع لها الكوكب (m).

ب/ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أعط عبارة هذه القوة بدلالة R ، m و T الذي هو الدور الزمني.

2/ كمقاربة ثانية نستعين بقوانين كبلر ،

أ/ باستعمال القانون الثالث لكبلر، جد عبارة (T) وعوضها في عبارة F .

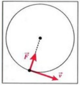
ب/ بافتراض أن قيمة الثابت K في القانون الثالث لكبلر يعطى بالعبارة $K=\frac{4\pi^2}{Gm'}$

حيث G ثابت يسمى ثابت الجذب العام.

استنتج حينئذ عبارة القوة F التي تتحكم في حركة دوران الكوكب حول الشمس والتي تسمى قانون الجاذبية.

الحل

1/ أ/ تمثيل القوة $\vec{F}$ التي يخضع لها الكوكب



بما أن حركة الكوكب دائرية منتظمة، فإن حامل القوة $\vec{F}$ التي يخضع لها الكوكب هو نصف القطر، وجهتها نحو مركز الدوران O (أين توجد الشمس).

لذا يكون تمثيل $\vec{F}$ كما يلي :

ب/ إن القانون الثاني لنيوتن يعطى بالعبارة $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$

هنا $\Sigma\vec{F} = \vec{F}$

إذن $\vec{F} = m\vec{a}$

وقيمة هذه القوة $F = ma$

ومن المعلوم أن تسارع الحركة الدائرية المنتظمة يعطى بالعبارة $a = \frac{v^2}{R}$

عندما نعوض في العبارة F نجد $F = \frac{mv^2}{R}$

وبما أن سرعة الكوكب v يمكن حسابها من العبارة $v = \frac{2\pi R}{T}$

حيث T زمن دورة واحدة (الدور الزمني)

فعندما نعوض في عبارة F نجد ، $F = \frac{m\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2}{R}$ ومنه ، $F = \frac{4\pi^2 mR}{T^2}$

2/ أ/ يعطى القانون 3 لكبلر بالعبارة $\frac{T^2}{a^3} = K$

هنا $a = R$ ، لذا نكتب $\frac{T^2}{R^3} = K$ ومنه نجد ، $T^2 = KR^3$

نعوض في عبارة F السابقة نجد ، $F = \frac{4\pi^2 m}{KR^2}$ ، $F = \frac{4\pi^2 mR}{KR^3}$

ب/ باعتبار أن الثابت K يعطى بالعبارة $K = \frac{4\pi^2 mR}{Gm'^2}$

نعوض في آخر عبارة لـ F فنجد ، $F = \frac{4\pi^2 m}{\frac{4\pi^2}{Gm'}R^2}$

في الأخير نكتب $\boxed{F = G\frac{mm'}{R^2}}$

ملاحظة : ليس بالضرورة أن يكون نيوتن قد اتبع هذه البرهنة للحصول على قانون الجاذبية.

التمرين 6 : قانون الجاذبية ومبدأ الفعلين المتبادلين

1/ أعط نص قانون الجاذبية، ثم أعط صيغته الرياضياتية.

2/ ضمن أي مبدأ من مبادئ نيوتن يمكن إدراج هذا القانون.

3/ ما الفرق الجوهري بين القانون الثاني لنيوتن، وقانونه في الجاذبية ؟

الحل

1/ نص قانون الجاذبية

كل جسم يجذب أي جسم آخر بقوة تتناسب طردا مع جداء كتلتيهما، وعكسا مع مربع المسافة بينهما.

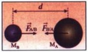
أما صيغة قانون الجذب العام، فننمذجها بالعبارة $F_{A/B} = F_{B/A} = G\times\frac{M_A M_B}{d^2}$

$G = 6,67\times10^{-11}\,N.m^2.kg^{-2}$ ثابت الجذب العام،

M_A : كتلة الجسم (A) بـ (kg).

M_B : كتلة الجسم (B) بـ (kg).

d : المسافة بين مركزي ثقلي الجسمين بـ (m).



2/ هذا القانون يمكن إدراجه ضمن مبدأ الفعلين المتبادلين (المسمى القانون الثالث لنيوتن) إذ أن القانون ينص على أن الجسم (A) إذا أثر بقوة جذب على الجسم (B) بقوة $\vec{F}_{A/B}$ بدوره الجسم (B) حسب مبدأ الفعلين المتبادلين يؤثر على الجسم (A) بقوة جذب $\vec{F}_{B/A}$.

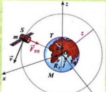
3/ الفرق الجوهري بين القانون الثاني لنيوتن وقانونه في الجاذبية نلخصه فيما يلي ،

القانون الثاني $\vec{F} = m\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ هو قانون عام للحركة يربط بين القوة $\vec{F}$ المؤثرة على الجسم، أية قوة مهما كانت طبيعتها، وتغيّر السرعة $\Delta\vec{v}$ التي تحدث لهذا الجسم. فهو قانون يتميز بطابع العمق والشمولية إذ يطبق على حركة نملة، تماما مثلما يطبق على حركة إلكترون او كوكب في مداره وحتى الأتربة الناعمة التي يحركها الهواء.

قانون الجاذبية $F = \dfrac{GMM'}{d^2}$ هي قوة من نوع خاص فهي تعطي علاقة دقيقة بين قوة جذب جسم لجسم آخر F وبين المسافة بينهما d. ويسمى هذا القانون أيضا بقانون التربيع العكسي.

التمرين 7 : من قانون الجاذبية لنيوتن إلى القانون الثالث لكبلر

نعتبر قمرا صناعيا كتلته m على ارتفاع Z من سطح الأرض، حركته دائرية منتظمة بسرعة $\vec{v}$. نعتبر كتلة الأرض M ونصف قطرها R.



1/ في معلم مركزي ارضي $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ وبتطبيق القانون الثاني لنيوتن وقانون الجاذبية :

أ/ جد عبارة تسارع القمر الصناعي.
ب/ احسب قيمته.

2/ أ/ جد عبارة السرعة $\vec{v}$.
ب/ احسب قيمتها.

3/ أ/ جد عبارة الدور الزمني T للقمر الصناعي حول الأرض.
ب/ احسب قيمته.

4/ استنتج القانون الثالث لكبلر.

$Z=1,36.10^4 km$ ، $G=6,67.10^{-11} S.I$ ، $R_T=6,37.10^3 km$ ، $M=5,98.10^{24} kg$

الحل

1 / أ/ عبارة تسارع القمر الصناعي a

القمر الصناعي يتحرك حركة دائرية منتظمة، فهو إذن يخضع لقوة جاذبة مركزية نعينها في الشكل المقابل.

الجملة : القمر الصناعي

- المعلم : $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم مركزي أرضي نعتبره عطاليا.
- القوى الخارجية : $\vec{F}_{T/S}$
- القوى الداخلية : قوى تماسك أجزاء الجملة.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على مركز عطالة القمر الصناعي (نظرية مركز العطالة) نجد :

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \quad ; \quad \vec{F}_{T/S} = m\vec{a} \quad ; \quad F_{T/S} = ma$$

لكن حسب قانون الجذب العام لنيوتن : $F_{T/S} = \dfrac{GmM}{(R+z)^2}$

وبالمساواة بين العبارتين نجد : $\dfrac{GmM}{(R+z)^2} = ma$

ومنه : $a = \dfrac{GM}{(R+z)^2}$

حساب قيمة a

$$a = \frac{6,67.10^{-11} \times 5,98.10^{24}}{(6,37.10^6 + 1,36.10^7)^2} = 1 \quad \text{إذن} \quad \boxed{a \approx 1 m.s^{-2}}$$

2/ أ/ عبارة السرعة v

بما أن الحركة دائرية منتظمة فإن $a = \dfrac{v^2}{(R+z)}$

إذن $v^2 = a(R+z)$

ومنه : $v = \sqrt{\dfrac{GM}{(R+z)^2}(R+z)}$

بالاختزال نجد $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{GM}{R+z}}}$

حساب قيمة v

$$v = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11} \times 5,98.10^{24}}{(6,36.10^6 + 1,36.10^7)}} \quad ; \quad \boxed{v \approx 4,47 \times 10^3 m.s^{-1}}$$

3/ أ/ عبارة الدور الزمني T

نعلم أن عبارة T هي $T = \dfrac{2\pi(R+z)}{v}$

وبالتعويض عن v بعبارته $v = \sqrt{\dfrac{GM}{R+z}}$

نعوض نجد $T=\frac{2\pi(R+z)}{\sqrt{\frac{GM}{R+z}}}$

$$\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{(R+z)^3}{GM}}}$$

ب/ قيمة T

$T=2\pi\sqrt{\frac{(6,37.10^6+1,36.10^7)^3}{6,67.10^{-11}\times 5,98.10^{24}}}$ ومنه $\boxed{T=2,81.10^4 s}$

ويمكن التعبير عن هذا الزمن بالساعة والدقيقة : $T=\frac{2,81.10^4}{3600}=7,80h=7h+0,80h$

لكن $0,80h=0,80\times 60=48\,min$

إذن $\boxed{T=7h48min}$

4/ استنتاج القانون الثالث لكبلر

بتربيع عبارة الدور T نجد $T^2=\frac{4\pi^2(R+z)^3}{GM}$

إذن $\frac{T^2}{(R+z)^3}=\frac{4\pi^2}{GM}$

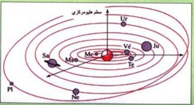
فبوضع $R+z=a$

يكون $\boxed{\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{GM}=ثابت}$

وهذا هو القانون الثالث لكبلر : $\frac{T^2}{a^3}=K$

التمرين 8: استعمالات القوانين الثلاثة لكبلر

نمثل في معلم هيليومركزي (مركزي شمسي) مدارات كل الكواكب التابعة للمجموعة الشمسية.



1/ أ/ ما نوع مسارات الكواكب حول الشمس ؟

ب/ الشمس تحتل موقعا هندسيا مميزا في هذا المسار، ما اسمه ؟

ج/ هل ان القانون الأول لكبلر محقق ؟

2/ أ/ بالاستعانة بالقانون الثاني لكبلر، هل سرعة الكوكب الواحد تتغير أم تبقى ثابتة في بعض نقاط مداره.

ب/ بالاستعانة بالقانون الثالث لكبلر، ما هو الكوكب الذي يتميز باصغر دور زمني T ؟

ج/ ما هو الكوكب الذي يتميز باصغر سرعة يدور بها حول الشمس ؟

3/ نهدف إلى تعيين الكتلة M لكوكب المشتري من اجل ذلك نعطي الدور T ونصف قطر الدوران R لثلاثة اقمار كبيرة تدور من بين الأربعة التي تدور حوله في الجدول التالي :

القمر	إيو (IO)	اوروبا (Eu)	غاليماد (Ga)
$T\,(jours)$	$1,76$	$3,55$	$7,16$
$R\,(km)$	$4,22.10^5$	$6,71.10^5$	$10,71.10^5$

أ/ ارسم بين T^2 بدلالة R^3.

استعن بالسلم : $8,0.10^{10}\,s^2 \rightarrow 1cm$

$1,56.10^{26}\,m^3 \rightarrow 1cm$

ب/ تأكد من ان هذا البيان يتوافق مع القانون الثالث لكبلر المعطى بالصيغة $\frac{T^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{GM}=K$

ج/ استنتج كتلة كوكب المشتري.

يعطى $G=6,67\times 10^{-11}\,N.m^2.kg^{-1}$.

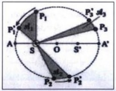
الحل

1/ أ/ نوع مسارات الكواكب حول الشمس هي : قطوع ناقصة.

ب/ الشمس تقع في محرق (بؤرة) هذه القطوع.

ج/ نعم. القانون الأول لكبلر محقق، لأنه ينص على ان مسارات الكواكب هي قطوع ناقصة، والشمس تقع في أحد محرقيها. وهذا واضح في الشكل.

2/ أ/ إن القانون الثاني لكبلر ينص على أن الكوكب في أثناء دورانه حول الشمس يمسح مساحات متساوية خلال فترات زمنية متساوية. ففي الشكل المقابل مثلنا ثلاث مساحات متساوية هي :



$A_1=A_2=A_3$.

ولكي يتحقق ذلك فإن الكوكب يستغرق نفس الزمن لمسح الأقواس $\widehat{P_1P'_1}$ ، $\widehat{P_2P'_2}$ و $\widehat{P_3P'_3}$

وبما ان أطوال الأقواس غير متساوية، لذا يتطلب ان تكون سرعة الكوكب في الوضع (P_1) اي $\vec{v}_1$ اكبر من سرعته في الوضع (P_2) اي $\vec{v}_2$ وهذه اكبر من سرعته $\vec{v}_3$ في الوضع (P_3).

نستنتج أن سرعة الكوكب الواحد تتغير في بعض نقاط مداره.

ب/ إن القانون الثالث لكبلر ينص على أن :

مقدار ثابت $= K = \frac{T^2}{r^3}$ حيث :

T : الدور الزمني للكوكب في مداره حول الشمس.

r : نصف طول المحور الكبير للمسار.

K : مقدار ثابت يتعلق بالشمس، فهو ثابت نفس القيمة لجميع الكواكب السيارة.

إذن : $T = \sqrt{Kr^3}$

وكلما نقص (r) نقص (T).

وأصغر قيمة لـ (r) هي للكوكب الأقرب إلى الشمس وهو كوكب عطارد $Mercure$.

ج/ بتقريب مقبول، يمكن اعتبار القطع الناقص، دائرة وبالتالي يمكن تطبيق عبارة السرعة الخاصة بالحركات الدائرية المنتظمة وهي $v = \frac{2\pi r}{T}$ على حركة الكواكب.

وهذه العبارة تدل على أنه كلما كبر الدور T، كلما نقصت قيمة السرعة v.

بما أن أقرب كوكب وهو عطارد له أصغر قيمة لـ T.

فإن أبعد كوكب وهو بلوتون $Pluton$ له أكبر قيمة لـ T إذن فله أصغر قيمة سرعة.

كوكب بلوتون $Pluton$ يدور بأصغر سرعة حول الشمس.

تنبيه

في صائفة 2006م، نزع علماء الفلك صفة كوكب عن بلوتون لاعتبارات، منها أنه صغير الحجم.

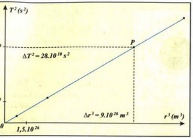
3/ أ/ رسم البيان $T^2(R^3)$

نعين T^2 و R^3 لكل قمر من أقمار المشتري الثلاثة مع تحويل وحدة T إلى الثانية (s) ووحدة R إلى المتر (m).

القمر	إيو (IO)	أوروبا (Eu)	غاليماد (Ga)
$T(s)$	$1,52.10^5$	$3,07.10^5$	$6,19.10^5$
$R(m)$	$4,22.10^8$	$6,71.10^8$	$10,7.10^8$
$T^2(s^2)$	$2,31.10^{10}$	$9,42.10^{10}$	$38,3.10^{10}$
$R^3(m^3)$	$0,75.10^{26}$	$3,02.10^{26}$	$12,30.10^{26}$

بالاستعانة بسلم T^2 المعطى، $8,0.10^{10} s^2 \rightarrow 1cm$ وكذا بسلم R^3، $1,56.10^{26} m^3 \rightarrow 1cm$،

يمكن تمثيل البيان :



إن بيان $T^2(R^3)$ هو خط مستقيم ميله موجب يمر من المبدأ، معادلته من الشكل $T^2 = bR^3$ حيث b ميل المستقيم.

أي أن المعادلة من الشكل : $\boxed{\frac{T^2}{R^3} = b = \text{مقدارا ثابتا}}$ إذن فهي تحقق القانون الثالث لكبلر.

ج/ استنتاج كتلة كوكب المشتري

نعلم أن القانون الثالث لكبلر هو $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$ حيث M كتلة المشتري.

بالمطابقة بين العبارة البيانية وعبارة قانون كبلر، نجد $b = \frac{4\pi^2}{GM} = \frac{T^2}{R^3}$ ومنه : $M = \frac{4\pi^2}{b.G}$

لنحسب ميل المستقيم b :

$$b = \frac{\Delta T^2}{\Delta R^3} = \frac{38,3\times10^{10} - 9,42\times10^{10}}{12,3\times10^{26} - 3,02\times10^{26}} = \frac{28,88\times10^{10}}{9,28\times10^{26}}$$

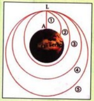
$$b \approx 3,11\times10^{-16} s^2.m^{-3}$$

ومنه نجد : $M = \frac{4(3,14)^2}{3,11.10^{16}\times6,67.10^{-11}}$

وهي كتلة المشتري $\boxed{M \approx 1,90.10^{27} kg}$

التمرين 9 : المحاكاة بين أنواع السقوط

بواسطة برمجة خاصة نجري بالحاسوب محاكاة لقذف جسم بسرعات مختلفة من نفس نقطة (L) تقع على ارتفاع $Z = 2R_T$ من مركز الأرض بالنسبة لمعلم مركزي أرضي. يتم القذف بطريقة أفقية بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ (الشكل). يعطى :



كتلة الأرض ، $M_T = 5,98.10^{24} kg$ ،

نصف قطر الأرض ، $R_T = 6,38.10^3 km$ ،

كتلة القذيفة ، $m = 1000kg$.

1 / إذا كانت $v_0 = 0m.s^{-1}$ ، ما هو مسار القذيفة المحدد في الشكل السابق ؟

2/ أ/ إذا كانت $v'_0 = 5,59km.s^{-1}$ فإن المسار يكون دائرة والقذيفة تصبح قمرا صناعيا يدور حول الأرض. حدد خصائص القوة التي تخضع لها هذه القذيفة.

ب/ عندما نقذف جسم آخر كتلته $m' = 4000kg$ بنفس السرعة $(\vec{v}'_0)$ ، ما هو نوع مساره ؟

ج/ عندما يغادر رائد فضاء مركبته التي تتحرك بنفس السرعة $(\vec{v}'_0)$ ، كيف تكون حركته ؟

3/ حدد رقم المسار من الشكل المعطى إذا تم قذف الجسم ،

أ/ بسرعة $\vec{v}_0$ اكبر بقليل من $\vec{v}'_0$ ،

ب/ بسرعة $\vec{v}_0$ اقل بقليل من $\vec{v}'_0$.

4/ ما نوع المسار 2 ، وماذا يحدث للجسم المقذوف ؟

5/ هل يوجد فرق جوهري بين حركة سقوط الأجسام على سطح الأرض ودورانها حول الأرض ؟ اشرح.

الحل

1 / إذا كانت السرعة الابتدائية للقذف معدومة ، $v_0 = 0m/s$ فإن سقوط الجسم يكون شاقوليا ويكون مساره هو الشاقول (LA) ، اي رقم المسار 1.

2/ أ/ خصائص القوة التي يخضع لها القمر الصناعي

- نقطة التاثير ، مركز عطالة الجسم المقذوف.
- الحامل ، هو الشاقول، أي المستقيم الواصل بين مركزي عطالة الجسم والأرض.
- الاتجاه ، نحو الأسفل.
- القيمة ، تحسب بقانون الجذب العام لنيوتن ، $F = G\dfrac{M_T m}{d^2} = G\dfrac{M_T m}{(2R_T)^2} = \dfrac{GM_T m}{4R_T^2}$

$$F = \frac{6,67.10^{11} \times 5,98.10^{24} \times 1000}{4(6,38 \times 10^6)^2}$$

$$\boxed{F = 2,45 \times 10^3 N}$$

ب/ عندما نقذف جسما آخر كتلته $m' = 4000kg$ بنفس السرعة $\vec{v}'_0$ ، فإنه يجري نفس الحركة وبالتالي نفس المسار الدائري 4 ولا دخل لكتلة الجسم المقذوف في حركته.

ج/ رائد الفضاء الذي يغادر مركبته التي تتحرك بسرعة $\vec{v}'_0$ ، سيتحرك ايضا هو بنفس السرعة v'_0 ويرسم نفس المسار الدائري.

3/ إذا قذف الجسم بسرعة v_0 اكبر بقليل من v'_0 فإن مساره يكون هو المسار5، وهو قطع ناقص ومركز عطالة الأرض إحدى محرقيه.

اما إذا قذف بسرعة $\vec{v}_0$ اقل بقليل من $\vec{v}'_0$ فإن مساره يكون هو المسار 3.

4/ المسار 2 يسمى قطعا مكافئا، والجسم الذي يرسم هذا المسار يرتطم بالأرض.

5/ لا يوجد فرق جوهري بين حركة سقوط الأجسام على الأرض ودورانها حولها، إلا من حيث الشروط الابتدائية للقذف، وقيمة السرعة الابتدائية $\vec{v}'_0$ للقذف.

- فإذا كانت السرعة كافية (هنا $v'_0 = 5,59km.s^{-1}$) تحرك الجسم حركة دائرية منتظمة وبالتالي يصبح قمرا صناعيا تابعا للأرض.
- وإذا تحرك بسرعة أكبر، بقي أيضا قمرا صناعيا تابعا للأرض، لكن مساره يصير قطعا ناقصا، كما هو حال جميع الكواكب حول الشمس.
- أما إذا تحرك بسرعة اقل ($v_0 < 5,59km.s^{-1}$) فيرسم قطعا مكافئا ويسقط في الأخير على الأرض.

التمرين 10*: الدراسة الطاقوية لقمر صناعي

قمر اصطناعي نعتبره نقطة مادية كتلته $m=1000kg$ يقع على بعد (r) من مركز الأرض. نعتبر الأرض M_T ، ونصف قطرها $R_T = 6400km$.

1 / اعط عبارة شدة حقل جاذبية الأرض g على البعد (r) وهذا بدلالة (R_T) ، (g) ، (r) حيث g_0 هي شدة حقل الجاذبية على سطح الأرض $(g_0 = 9,8N/kg)$.

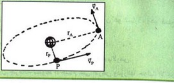
2/ أ/ عين العمل الجزئي (dw) الذي ينجزه ثقل القمر الصناعي $(\vec{P})$ اثناء الانتقال الجزئي (dr) بين البعدين (r) و $(r + dr)$ مبتعدا عن سطح الأرض.

ب/ استنتج العمل الكلي عندما يتنقل القمر الصناعي بين البعدين $r_1 = 20000km$ و $r_2 = 30000km$.

3/ أ/ عين عبارة الطاقة الكامنة الثقالية E_{PP} للقمر الصناعي على ارتفاع (Z) من سطح الأرض باعتبار أن جملة (القمر الصناعي- الأرض) هي جملة معزولة طاقويا. وان المستوى المرجعي للطاقة الكامنة الثقالية يقع على بعد ما لا نهاية من مركز الأرض اي ان ، $E_{PP_0} = 0j$.

ب/ باعتبار أن القمر الصناعي قريب جدا من سطح الأرض، وأن مرجع الطاقة الكامنة الثقالية هو سطح الأرض، استنتج عبارة الطاقة الكامنة الثقالية التقريبية.

4/ إذا علمت أن مسار القمر الصناعي حول الأرض هو قطع ناقص (الشكل الموالي)، احسب قيمة سرعته v_2 عند الذروة (A) علما بان شدة سرعته عند الحضيض (P) هي $v_A = 9 \times 10^3 m.s^{-1}$ وهذا باستعمال مبدا انحفاظ الطاقة. يعطى ، $r_P = 2000km$ و $r_A = 30000km$.



الحل

1 / عبارة شدة جاذبية الأرض $\vec{g}$

- القمر الصناعي كتلته (m)، ويبعد عن مركز الأرض ببعد (r) .
- الأرض كتلتها (M_T)، ونصف قطرها R_T .

حسب قانون نيوتن للتجاذب الكوني فإن :

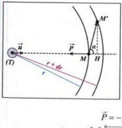
شدة ثقل القمر الصناعي = شدة قوة جاذبية الأرض له.

$P = mg = \dfrac{GmM_T}{r^2}$ إذن $g = \dfrac{GM_T}{r^2}$ وهي عبارة (g) على بعد (r) من مركز الأرض.

وعلى سطح الأرض فإن $r = R_T$ ومنه $g_0 = \dfrac{GM_T}{R_T^2}$

بقسمة g على g_0 نجد $\boxed{g = \dfrac{g_0 R_T^2}{r^2}}$ وهي العبارة المطلوبة.

2/ أ/ عبارة العمل الجزئي لقوة الثقل (dw)



نفترض أن القمر الصناعي يوجد في النقطة (M) التي تبعد بعدا (r) عن مركز الأرض، ثم ينتقل إلى النقطة (M') تبعد عن مركز الأرض بعدا $(r + dr)$.

لنعين العمل الجزئي (dw) أثناء الانتقال الجزئي $(\overrightarrow{MM'})$ فحسب تعريف العمل :

عمل الثقل $\vec{P}$ = الجداء السلمي لشعاع القوة $(\vec{P})$ في شعاع الانتقال $(\overrightarrow{MM'})$. إذن نكتب $dw = \vec{P} . \overrightarrow{MM'}$

وبتمثيل شعاع وحدة $(\vec{u})$ معاكسا لاتجاه $(\vec{P})$ نكتب $\vec{P} = -P\vec{u}$

ومنه $dw = -P\,\vec{u} . \overrightarrow{MM'}$ إذن $dw = -P\|\vec{u}\| . \|\overrightarrow{MM'}\|$

لكن $\|\overrightarrow{MM'}\| = \cos\alpha \|\overrightarrow{MM'}\| \approx dr$ كما أن $\|\vec{u}\| = 1$

إذن $dw = -P . dr$ ومنه $dw = -mg - dr$

أي $\boxed{dw = \dfrac{-mg_0 R_T^2}{r^2} d t}$ وهي عبارة العمل الجزئي لثقل القمر الصناعي.

ب/ عبارة العمل الكلي لقوة الثقل (w)

عندما ينتقل القمر الصناعي بين نقطتين تبعدان بعدين (r_1) و (r_2) عن مركز الأرض، فإن العمل الكلي لقوة الثقل نحسبه من مجموع الأعمال الجزئية، ونعبر عنه رياضيا بمؤثر التكامل كما يلي :

$w = \int dw$ إذن $w = \int_{r1}^{r2} \dfrac{mg_0 R_T^2}{r^2} dr$

$$w = mg_0 R_T^2 \int_{r1}^{r2} \frac{-1}{r^2} dr = mg_0 R_T^2 [\frac{1}{r}]_{r1}^{r2}$$

ومنه نكتب $\boxed{w = mg_0 R_T^2 [\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}]}$ وهي عبارة العمل الكلي.

بالتعويض نجد $w = 1000 \times 9,8 \times (6400 \times 10^3)^2 [\dfrac{1}{3 \times 10^7} - \dfrac{1}{2 \times 10^7}]$

إذن $\boxed{w = -6,7 \times 10^9 J}$

3/ أ/ عبارة الطاقة الكامنة الثقالية E_{PP}

نعلم أنه من أجل الجملة الميكانيكية (قمر صناعي / أرض) : $\Delta E_{PP} = -W_{(\text{القوى الداخلية})}$

وبما أن $\vec{P}$ قوة داخلية، فإن $\Delta E_{PP} = -W_{(\vec{P})}$

$$\boxed{E_{pp_2} - E_{pp_1} = -\, mg_0 R_T^2 [\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}]}$$

وهي عبارة تغير الطاقة الكامنة الثقالية عندما ينتقل القمر الصناعي بين البعدين (r_1) و (r_2) .

عندما يكون المستوي المرجعي للطاقة الكامنة الثقالية واقعا في اللانهاية فإنه يمكن وضع :

$E_{PP_2} = E_{PP_\infty} = 0J$ وهذا عندما $r_2 \to \infty$ ومنه :

$$0 - E_{pp_1} = mg_0 R_T^2 (\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r_1}) \ ; \ E_{PP_1} = \frac{-mg_0 R_T^2}{r_1}$$

نضع $r_1 = r$ فيكون $E_{PP_1} = E_{PP} = \dfrac{-mg_0 R_T^2}{r}$

وبوضع $r = R_T + z$ نجد $\boxed{E_{PP} = \dfrac{-mg_0 R_T^2}{R_T + z}}$ وهي عبارة الطاقة الكامنة الثقالية للقمر الصناعي في مكان يبعد بعدا (z) عن سطح الأرض، وباعتبار اللانهاية مبدأ الطاقة الكامنة الثقالية.

ب/ عبارة (E_{PP}) بجوار سطح الأرض

بالرجوع إلى عبارة تغير الطاقة الكامنة الثقالية. وباعتبار أن المستوى المرجعي للطاقة الكامنة الثقالية هو سطح مستوى الأرض، فإنه عندما يكون $r_1 = R_T$ فإن $E_{PP_1} = 0J$

إذن $E_{PP_1} - 0 = -mg_0R_T^2(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{R_T})$

وبوضع $r_2 = R_T + z$ فإن $E_{PP_2} = E_{PP}$ ومنه $E_{pp} = -mg_0R_T^2(\frac{1}{R_T+z} - \frac{1}{R_T})$

أي $E_{pp} = mg_0R_T^2\frac{z}{R_T(R_T+z)}$ إذن $\boxed{E_{PP} = \frac{mg_0R_Tz}{R_T+z}}$

وهي عبارة الطاقة الكامنة الثقالية بجوار الأرض باعتبار أن مبدأ الطاقة الكامنة الثقالية هو سطح الأرض.

وعندما يكون القمر الصناعي قريبا جدا من الأرض فإن $z << R_T$ ومنه $\frac{z}{R_T} << 1$

لذا يجوز استعمال دساتير التقريب : $E_{PP} = \frac{mg_0z}{1+\frac{z}{R_T}}$

لكن $\frac{z}{R_T} + 1 \approx 1$ إذن $\boxed{E_{PP} = mg_0z}$

وهي عبارة الطاقة الكامنة الثقالية المشهورة التي استعنا بها في الحركات التي تتم على سطح الأرض.

4/ حساب شدة السرعة الخطية $\vec{v}_A$ للقمر الصناعي عند الذروة

بما أن مسار القمر الصناعي هو قطع ناقص، فإن أبعد نقطة يمر بها القمر عن الأرض ندعوها الذروة (A) وتكون حينها له سرعة $\vec{v}_A$، وتسمى أخفض نقطة يمر بها الحضيض (P) وتكون سرعته فيها هي $\vec{v}_P$.

فلحساب $\vec{v}_A$ نستعمل مبدأ انحفاظ الطاقة لجملة (القمر الصناعي / الأرض) التي نعتبرها جملة معزولة طاقويا.

في الذروة ، $E_A = E_{C_A} + E_{PP_A}$ إذن $E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{mg_0R_T^2}{r_A}$

في الحضيض ، $E_P = E_{C_P} + E_{PP_P}$ إذن $E_P = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{mg_0R_T^2}{r_P}$

وحسب مبدأ انحفاظ الطاقة : $E_A = E_P$

ومنه : $\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{mg_0R_T^2}{r_A} = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{mg_0R_T^2}{r_P}$ إذن $v_A = \sqrt{v_P^2 - mg_0R_T^2(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A})}$

واخيرا : $\boxed{v_A \approx 8223m.s^{-1}}$

التمرين 11

حساب السرعة الكونية الثانية لكوكب الأرض والقمر والمريخ

كوكب كتلته (M) موزعة بانتظام على حجم كروي نصف قطره (R) وشدة حقل الجاذبية على سطحه (g_0) و G هو ثابت التجاذب الكوني يهمل الاحتكاك.

1/ نعتبر نقطة (A) من الفضاء تقع على بعد (z) من سطح هذا الكوكب. عبر عن شدة حقل جاذبية هذا الكوكب (g) في هذه النقطة بدلالة R ، g_0 ، z .

2/ إن الطاقة الكامنة الثقالية للجملة المؤلفة من الكوكب وجسم كتلته (m) موجود في النقطة (A) تعطى بالعبارة $E_{PP} = \frac{-GmM}{R_T+z}$.

أ/ على أي ارتفاع تنعدم الطاقة الكامنة الثقالية ؟

ب/ أعط تبريرا لوجود الإشارة $(-)$ في عبارة (E_{PP}) .

ج/ عبر عن (E_{PP}) بدلالة m ، g_0 ، R ، z.

3/ نهدف إلى حساب أقل قيمة للسرعة $\vec{v}_0$ والتي ينبغي إعطاؤها لجسم كتلته (m) يقع على سطح الكوكب حتى ينفلت من جاذبية الكوكب ليغادره إلى اللانهاية.

أ/ أعط عبارة الطاقة الميكانيكية للجملة (جسم — كوكب) في الوضعين التاليين :

- على سطح الأرض وينطلق بسرعة $\vec{v}_0$.
- على ارتفاع (z) من سطح الأرض وله سرعة $\vec{v}$.

ب/ باعتبار أن الجملة معزولة طاقويا ، استنتج عبارة v_0 بدلالة R ، g ، z ، v .

ج/ استنتج v_0 اللازمة للانفلات من جاذبية كوكب الأرض والقمر والمريخ علما بأن :

	الأرض	القمر	المريخ
$g_0 (m/s^2)$	9,80	1,67	3,69
$R (km)$	6400	1750	3424

الحل

1/ عبارة شدة حقل جاذبية الكوكب (g)

بنفس الطريقة التي اتبعناها في التمارين السابقة نكتب $\boxed{g = \frac{g_0R^2}{(R+z)^2}}$

2/ أ/ الارتفاع الذي تنعدم فيه الطاقة الكامنة الثقالية

لدينا $E_{PP} = \frac{-GmM}{R+z}$ و Z هو المتغير الوحيد.

فإذا كان $z \to \infty$ فإن $E_{PP_\infty} = 0J$ ، فالطاقة الكامنة الثقالية تنعدم في اللانهاية. وهذا معناه أنه تم اختيار اللانهاية كمرجع للطاقة الكامنة الثقالية.

ب/ تبرير وجود الإشارة السالبة في عبارة E_{PP}

بما أن اللانهاية هي مبدأ الطاقة الكامنة الثقالية، فكل ارتفاع عن سطح الأرض يكون فيه $\infty \geq z$ تكون الطاقة الكامنة الثقالية فيه سالبة.

ج/ عبارة E_{PP} الجديدة

لدينا حسب قانون نيوتن في الجاذبية $mg = \dfrac{GmM}{(R+z)^2}$

ونكتبه بالطريقة التالية:

$$mg = \frac{GmM}{R+z} \times \frac{1}{R+z} \quad ; \quad mg = -E_{PP}\frac{1}{R+z}$$

ومنه نكتب $E_{PP} = -mg(R+z)$

وبالتعويض بعبارة g المعطاة بـ $g = \dfrac{g_0 R^2}{(R+z)^2}$

$$E_{PP} = -m(R+z)\frac{g_0 R^2}{(R+z)^2}$$

نجد في الأخير $\boxed{E_{PP} = \dfrac{-mg_0 R^2}{(R+z)}}$ وهي العبارة المطلوبة.

3/أ/ عبارة الطاقة الكلية لجملة (جسم/ كوكب) على سطح الأرض

لدينا: $E_0 = E_{C_0} + E_{PP_0}$

وبما أن $\vec{v_0}$ هي سرعة الانطلاق، إذن: $E_{C_0} = \dfrac{1}{2}mv_0^2$

كما أن $Z = 0$ على سطح الأرض، إذن: $E_{PP_0} = \dfrac{-mg_0 R^2}{(R+0)}$

ومنه نكتب: $E_{PP_0} = -mg_0 R$

إذن: $\boxed{E_0 = \dfrac{1}{2}mv_0^2 - mg_0 R}$

3/ ب/ عبارة طاقة الجملة على ارتفاع (z) من سطح الأرض

$E = E_C + E_{PP}$ مع $E_C = \dfrac{1}{2}mv^2$

كما أن $E_{PP_0} = \dfrac{-mg_0 R^2}{(R+z)}$ إذن $\boxed{E = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{-mg_0 R^2}{(R+z)}}$

ب/ عبارة v_0

بما أن الجملة معزولة طاقويا فإن طاقة الجملة محفوظة، لذا نكتب $E = E_0$

ومنه: $\dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{-mg_0 R^2}{(R+z)} = \dfrac{1}{2}mv_0^2 - mgR$

إذن $\boxed{v_0 = \sqrt{v^2 + 2g_0 R(1 - \dfrac{R}{R+z})}}$

ج/ القيمة العددية لسرعة الإفلات من الكوكب (السرعة الكونية الثانية)

حتى ينفلت الجسم من جاذبية كوكب فإنه يجب أن يقذف بسرعة $\vec{v_0}$ انطلاقا من الكوكب تسمح له بمغادرة الكوكب إلى ما لا نهاية ! أي إلى بعد $z \to \infty$ وحتى تكون السرعة $\vec{v_0}$ أقل سرعة ممكنة فإن الجسم يصل إلى ما لا نهاية بسرعة $\vec{v}$ معدومة، أي $(v = 0m/s)$.

لنعوض في عبارة v_0 السابقة: $v_0 = \sqrt{0^2 + 2g_0 R(1 - \dfrac{R}{R+\infty})}$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2g_0 R}}$$

وهي السرعة اللازمة للانفلات، وتسمى أيضا السرعة الكونية الثانية.

لنحسب v_0 من أجل الكواكب الثلاثة وهي الأرض، القمر والمريخ:

	الأرض	القمر	المريخ
$v_0(m/s)$	11200	2417,6	5026,8

نلاحظ أن السرعة الكونية الثانية للأرض كبيرة، ولذا تستعمل الصواريخ ذات المراحل المتعددة حتى تستطيع الانفلات من جاذبية الأرض.

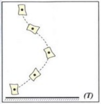
3 - دراسة حركة السقوط الشاقولي لجسم صلب في الهواء

1 / الدراسة التجريبية لحركة السقوط الشاقولي لجسم صلب في الهواء

1.1 - توطئة

سندرس حركة السقوط الشاقولي لجسم في الهواء دون إعطائه سرعة ابتدائية $\vec{v_0} = \vec{0}_0$، بجوار الأرض، اين نعتبر ان شعاع حقل جاذبية الأرض (ثابت $= \vec{g}$ $= \vec{G}$).

2.1 - تجربة : إظهار قوى احتكاك الهواء



- اترك ورقة تسقط في الهواء ماذا تلاحظ ؟
- أكيد ستلاحظ أن حركتها معقدة (أنظر الشكل المرفق)
- فهل خضعت الورقة لقوة الثقل $\vec{P}$ فقط ؟
- بالطبع لا، فلو خضعت لثقلها فقط لما كانت حركتها شاقولية.
- برأيك من الذي أثر عليها بقوة أو قوى أخرى ؟
- أكيد، الهواء هو الذي أثر على الورقة بقوى أخرى.
- هل أن القوى التي أثر بها الهواء تعرقل الحركة، أم تساعدها ؟ ما دليلك ؟
- إنها قوى تعرقل الحركة، بدليل أنها أنقصت من سرعة الورقة، فجعلت حركتها بطيئة.
- اقترح مصطلحا لتسمية هذه القوى.
- نقترح المصطلح : قوى مقاومة الهواء أو قوى احتكاك الهواء.

3.1 - نمذجة قوى احتكاك الهواء

رأينا في التجربة السابقة، أن سقوط الورقة لم يكن شاقوليا، وبالتالي فإن البحث عن قوى احتكاك الهواء، ونمذجتها، لا يكون أمرا يسيرا.

لذا نستعمل أجسام ثقيلة نسبيا، وذات حجم كبير المهم أن نضمن أن سقوطها يكون شاقوليا، ومن ثم يسهل نمذجة قوى احتكاك الهواء.

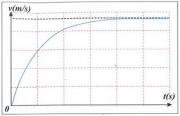
1 • تجربة

- نثبت بالونا بواسطة خيط ملتصق ببرغي$(boulon)$، نتركه يسقط في الهواء، فنلاحظ أن سقوطه شاقولي.
- ندرس تطور سرعة الجملة (برغي + بالون) $v(t)$ فنجد المنحنى التالي :

دراسة تطور السرعة $v(t)$

من خلال المنحني نميز مرحلتين :

- مرحلة الانطلاق (النظام الانتقالي)

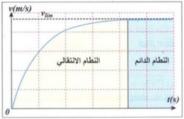


نلاحظ فيها أن السرعة تزداد بشكل غير منتظم، وهذا يدل على أن قوة ثقل الجملة $\vec{P}$ أكبر من مجموع قوى الاحتكاك $\boxed{\vec{P} > \Sigma\vec{F}_f}$

- مرحلة الحركة المنتظمة (النظام الدائم)

وفيها نلاحظ أن قيمة السرعة أصبحت ثابتة $v = cte$ عند حد معين نسميه السرعة الحدية $v = v_{lim}$ (أنظر الشكل الموالي).

وهذا يدل على أن القوة $\vec{P}$ أصبحت تساوي مجموع قوى الاحتكاك $\vec{P} = -\Sigma\vec{F}_f$



نتيجة

- إن قوة الاحتكاك الناتجة عن سقوط الجسم في الهواء، هي قوة معاكسة للحركة وتتعلق بالسرعة لذا يرمز لها بالرمز $\vec{f}\ (v)$.
- ولها عدة صيغ حسب سرعة الجسم فقد تكون من الشكل $\vec{f} = -K\vec{v}$ إذا كانت سرعة الجسم صغيرة في حدود (cm/s).
- وقد تكون من الشكل $f = -Kv^2$ إذا كانت سرعة الجسم كبيرة نسبيا.

2• نمذجة قوة الاحتكاك في الهواء

ننمذج قوة الاحتكاك في الهواء بقوة وحيدة $\vec{f}(v)$ تزداد قيمتها بزيادة السرعة $\vec{v}$ وتعطى بالعبارة $\vec{f}(v) = -K\vec{v}^{\,n}$

حيث n عدد حقيقي، وعادة ما يكون $1 \le n \le 2$.

K : ثابت يعتمد على طبيعة المائع (الهواء، الغاز، السائل).

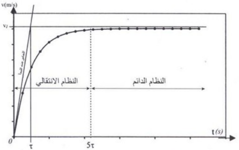
السرعة الحدية (v_{lim})

السرعة الحدية هي أكبر سرعة يبلغها الجسم الذي يسقط شاقوليا في الهواء (وبشكل عام المائع) وتكون عندها حركته مستقيمة منتظمة.

تحدد (v_{lim}) تجريبيا بالخط المقارب الأفقي لمنحنى تطور السرعة بدلالة الزمن V(t).

الزمن المميز (τ)

الزمن المميز يسمح بتقدير مقدار الزمن الذي يفصل بين النظام الانتقالي والنظام الدائم.
يعين بيانيا بلحظة تقاطع الخط المقارب الأفقي مع المماس عند المبدأ لمنحني تطور السرعة $v(t)$.



4-1. دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$

عندما يتمدد شخص فوق سطح ماء البحر، بشكل أفقي جيد، نلاحظ أنه يبقى طافيا فوق الماء.

هل معنى هذا أنه لم يخضع لقوة ثقله $\vec{P}$ التي تحاول أن تجعله يغوص داخل الماء ؟

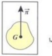
كلا، فإن الشخص يخضع لقوة ثقله $\vec{P}$ بالإضافة إلى قوة أخرى تدفعه من أسفل إلى الأعلى تسمى دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$.

تعريف

دافعة أرخميدس هي قوة معاكسة للثقل تدفع من أسفل إلى أعلى وتظهر في الهواء أو الماء.

خصائص دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$

دافعة أرخميدس هي قوة تلامس يمكن نمذجتها بشعاع $\vec{\pi}$ تحدد خصائصه بالنسبة لجسم متجانس موجود في الهواء كما يلي :



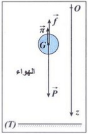
- نقطة التأثير : مركز عطالة الجسم (إذا كان الجسم مغمورا كليا داخل المائع).
- الحامل : هو الشاقول.
- الجهة : من الأسفل إلى الأعلى.
- القيمة : عندما يوجد جسم في الهواء فإنه يحتل جزءا منه، وبالتالي ينزاح هذا الجزء من الهواء، أي : $\pi = Mg$.

M : كتلة الهواء المزاح = الكتلة الحجمية للهواء × حجم الهواء المزاح.

$$M =_{air} .v$$

إذن $\boxed{\pi = \rho_{air} v g}$ حيث : ρ_{air} الكتلة الحجمية للهواء ، v حجم الهواء المزاح.

2/ المعادلة التفاضلية لحركة السقوط الشاقولي في الهواء



لنعين القوى التي يخضع لها جسم كتلته (m) يسقط شاقوليا في الهواء (الشكل).

- قوة الثقل $\vec{P}$ (قوة جذب الأرض $\vec{F}_{T/c}$)
  - حامله : الشاقول.
  - جهته : نحو الأسفل.
  - شدته : $\boxed{P = mg}$ حيث g شدة حقل جاذبية الأرض.
- مقاومة الهواء $\vec{f}(v)$
  - حاملها : الشاقول.
  - جهتها : نحو الأعلى.
  - شدتها : تعطى بالعبارة $\boxed{f = -Kv^{n}}$.

حيث : K ثابت يعتمد على طبيعة المائع (الهواء، السائل).
n عدد حقيقي عادة ما يكون $1 \le n \le 2$.

- دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$
  - حاملها : الشاقول.
  - جهتها : نحو الأعلى.
  - شدتها : تعطى بثقل الهواء المزاح $\pi = Mg$

حيث M كتلة المائع المزاح = الكتلة الحجمية للمائع × حجم المائع.

أي ، $M = \rho\, v$ إذن $\boxed{\pi = \rho\, v g}$

2● نمذجة قوة الاحتكاك في الهواء

تنمذج قوة الاحتكاك في الهواء بقوة وحيدة $\vec{f}(v)$ تزداد قيمتها بزيادة السرعة $\vec{v}$ وتعطى بالعبارة $\vec{f}(v) = -K\vec{v}^{\,n}$

حيث n عدد حقيقي، وعادة ما يكون $1 \leq n \leq 2$.

K : ثابت يعتمد على طبيعة المائع (الهواء، الغاز، السائل).

السرعة الحدية (v_{lim})

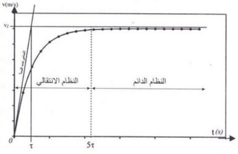
السرعة الحدية هي أكبر سرعة يبلغها الجسم الذي يسقط شاقوليا في الهواء (وبشكل عام المائع) وتكون عندها حركته مستقيمة منتظمة.

تحدد (v_{lim}) تجريبيا بالخط المقارب الأفقي لمنحنى تطور السرعة بدلالة الزمن $V(t)$.

الزمن المميز (τ)

الزمن المميز يسمح بتقدير مقدار الزمن الذي يفصل بين النظام الانتقالي والنظام الدائم.

يعين بيانيا بلحظة تقاطع الخط المقارب الأفقي مع المماس عند المبدأ لمنحني تطور السرعة $v(t)$.



1-4- دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$

المعادلات الزمنية لحركة السقوط الحر

لدينا المعادلة التفاضلية : $m\vec{a} = m\vec{g}$ أو $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g}$

بالإسقاط على معلم الحركة (O,z) السطحي الأرضي والذي نفرضه عطاليا نجد : $m\dfrac{dv}{dt} = mg$

ومنه نكتب : $\dfrac{dv}{dt} = g$

حل هذه المعادلة يعطي : $v = g\,t + B$

باعتبار أن السرعة في اللحظة الابتدائية $(t = 0s)$ هي v_0 والتي نسميها السرعة الابتدائية.

فعندما نعوض في المعادلة السابقة نجد : B ومنه : $v_0 = g(0) + B$ ؛ $B = v_0$

ونكتب المعادلة من جديد : $(1)\ ......\ \boxed{v = g\,t + v_0}$

والتي نسميها معادلة السرعة اللحظية v بدلالة الزمن.

كما أنه من المعلوم سلفا أن $v = \dfrac{dz}{dt}$

لذا نكتب $\dfrac{dz}{dt} = g\,t + v_0$

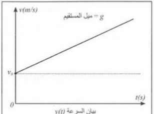
ومنه نجد :

$$(2)\ ......\ \boxed{z = \frac{1}{2}g\,t^2 + v_0\,t + z_0}$$

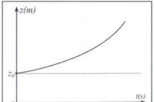
وهي معادلة الفاصلة اللحظية بدلالة الزمن.

z_0 هي الفاصلة في اللحظة الابتدائية $(t = 0s)$ (الفاصلة الابتدائية).

نسمي المعادلتين 1 ، 2 المعادلتين الزمنيتين لحركة السقوط الحر.



بيان السرعة $v(t)$

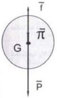


بيان الفاصلة $z(t)$

III/ دراسة حركة السّقوط الشاقولي لجسم صلب في الهواء

• القوى

كلّ جسم كتلته m، يتحرّك في الهواء، أو الماء، أو أي مائع، يخضع لثلاثة قوى هي :



قوة الثقل $\vec{P}$

- قيمتها : $\boxed{P = mg}$ حيث :

m : كتلة الجسم بـ (kg)

g : تسارع الجاذبية بـ $(m.s^{-2})$

- جهتها : شاقولية نحو الأسفل.

دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$

- قيمتها : $\boxed{\pi = \rho V g}$ حيث :

ρ : الكتلة الحجمية للمائع بـ .

V : حجم المائع المزاح = حجم الجسم إذا كان مغمورا كليا.

قوى احتكاك المائع $\vec{f}$

- قيمتها : $\boxed{f = k\,v^n}$ حيث :

$f = k\,v$ في حالة السرعة صغيرة.

$f = k\,v^2$ في حالة السرعة كبيرة.

- معاكسة لجهة الحركة.

• المعادلة التّفاضلية للحركة

- نطبّق القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P} + \vec{f} + \vec{\pi} = m\vec{a}_G = m\dfrac{d\vec{v}_G}{dt}$

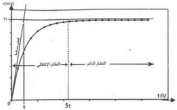
- بالإسقاط على معلم الحركة $(O, \vec{z})$: $P - f - \pi = m\dfrac{dv}{dt}$

$$\boxed{mg - k\,v^n - \rho v g = m\frac{dv}{dt}}$$

• الحلّ التّقريبي للمعادلة التّفاضلية

الحركة تتمّ وفق نظامين :

- النظام الانتقالي : فيه السّرعة تزداد.
- النّظام الدّائم : تثبت فيه قيمة السّرعة عند السّرعة الحدّية $v = v_{lim}$.



- τ : الزمن المميّز.

IV/ دراسة حركة السّقوط الحرّ

- في الخلاء (انعدام الهواء)، يخضع الجسم لقوة ثقله $\vec{P}$ فقط، فنقول إنه في حالة سقوط حرّ.
- القوى : $\vec{P}$ فقط.
- المعادلة التفاضلية : $\vec{P} = m\vec{a}_G = m\dfrac{d\vec{v}_G}{dt}$

$m\vec{g} = m\vec{a}$ أي : ثابت $\vec{a} = \vec{g} =$ ، $\boxed{\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}}$

• حلّ المعادلة التّفاضلية

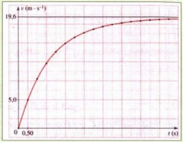
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}\left|\begin{array}{l}\dfrac{dv_z}{dt} = g\\ \dfrac{dv_y}{dt} = 0\\ \dfrac{dv_x}{dt} = 0\end{array}\right. \xrightarrow{\text{بالتكامل}} \vec{v}\left|\begin{array}{l}v_z = gt + v_{0_z}\\ v_y = 0\,m.s^{-1}\\ v_x = 0\,m.s^{-1}\end{array}\right. \xrightarrow{\text{بالتكامل}} \vec{r} = \overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l}z = \dfrac{1}{2}gt^2 + v_{0_z}t + z_0\\ y = 0\,m\\ x = 0\,m\end{array}\right.$$

- وإذا تمّ السّقوط الحرّ بدون سرعة ابتدائية فإنّ $v_{0_z} = 0\,m.s^{-1}$

ومنه نكتب : $\boxed{\begin{array}{l}z = \dfrac{1}{2}gt^2 + z_0\\ v_z = gt\\ a_z = g\end{array}}$ والتي تسمّى معادلات السقوط الحرّ، ومسارها يكون شاقوليا.

التمرين 1: الدراسة التجريبية للسقوط الشاقولي في الهواء

ندرس في معلم أرضي، نعتبره عطاليا، حركة السقوط الشاقولي لجسم في الهواء.
الوثيقة المرفقة تحدد تطور سرعة مركز عطالته $v(t)$ بدلالة الزمن من لحظة السقوط إلى لحظة وصوله إلى الأرض.



1/ حدد مراحل الحركة.
2/ عين السرعة الحدية v_{lim} لسقوط الجسم.
3/ استنتج الزمن المميز τ للانتقال من نظام لآخر.
4/ أ/ احسب التسارع الابتدائي a_0 لحركة الجسم. ماذا تستنتج ؟
ب/ استنتج التسارع النهائي a لحركة الجسم. ماذا تستنتج ؟
5/ إذا كان المنحنى البياني السابق ينمذج بالمعادلة التفاضلية $\frac{dv}{dt}+b\,v=C$ فعين المعنى الفيزيائي للثابتين b و C واحسب قيمتيهما، وكذا القوى المؤثرة على الجسم في كل مرحلة مع التبرير.
6/ مثل القوى المؤثرة على الجسم في كل مراحل الحركة.

الحل

1/ تحديد مراحل الحركة (أنظمة الحركة)

• مرحلة الانطلاق (أو النظام الانتقالي)

وتدوم من لحظة قذف الجسم $(t_0 = 0s)$ إلى لحظة ثبوت السرعة وهي اللحظة $(t = 8s)$.

• مرحلة الحركة المنتظمة (أو النظام الدائم)

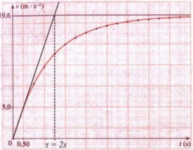
وتبدأ من لحظة ثبوت السرعة وهي اللحظة $(t = 8s)$ إلى اللحظة $(t = 8,5s)$ وهي لحظة وصول الجسم إلى الأرض.

2/ تعيين السرعة الحدية

تعين من الخط المقارب الأفقي للمنحنى البياني ؛
وهي القيمة $\boxed{v_{lim} = 19,6\ m.s^{-1}}$.

3/ استنتاج الزمن المميز τ

يعين τ بيانيا من نقطة تقاطع الخط المقارب الأفقي مع المماس عند المبدأ للمنحنى البياني.
نجد $\boxed{\tau = 2s}$



4/ أ/ قيمة التسارع الابتدائي a_0

a_0 هو التسارع في اللحظة الابتدائية $(t = 0s)$.

نعلم أن $a=\frac{dv}{dt}$

لكن المشتق $\frac{dv}{dt}$ بيانيا هو ميل المستقيم.

إذن a_0 هو قيمة $\frac{dv}{dt}$ في اللحظة $t = 0s$

أي : a_0 = ميل المماس للبيان في اللحظة $(t = 0s)$

إذن : $a_0 = \frac{19,6-0}{2-0}$ ، وأخيرا $\boxed{a_0 = 9,8\ m.s^{-2}}$

بما أن تسارع جاذبية الأرض $g = 9,8\ m.s^{-2}$ ، نستنتج إذن أن $\boxed{a_0 = g}$

وهذا يعني أنه في لحظة الانطلاق $(t = 0s)$ كان تسارع الجسم هو (g) وهذا متوقع لأنه في لحظة الانطلاق نعتبر الجسم خاضعا لقوة ثقله $\vec{P}$ فقط. (معلوم أن كل جسم خاضع لثقله فقط يكون تسارعه $a = g$ لأن $ma = m\,g$ ومنه $a = g$

ب/ التسارع النهائي a لحركة الجسم

في نهاية الحركة تكون السرعة ثابتة $v = v_{lim} = 19,6\ m.s^{-1}$

والحركة مستقيمة منتظمة إذن : $\boxed{a = 0\ m.s^{-2}}$

وبطريقة اخرى نقول إن : a = ميل المماس للمنحنى عندما $v = 19,6\ m.s^{-1}$

والمماس هو الخط المقارب $v = v_{lim}$ الأفقي وعليه فإن ميله معدوم.

إذن : $a = 0\ m.s^{-2}$

نستنتج أنه في نهاية الحركة، تكون الحركة مستقيمة منتظمة.

5/ المعنى الفيزيائي للثابت C

المعادلة التفاضلية المعطاة هي من الرتبة الأولى للسرعة v (المشتق الأول $\frac{dv}{dt}$)

$$\frac{dv}{dt} + b\,v = C$$

هذه المعادلة محققة في جميع اللحظات بما فيها اللحظة الابتدائية $t = 0s$.

لكن عند اللحظة $t = 0s$ لدينا $v = v_0 = 0\ m.s^{-1}$ لأن المتحرك انطلق بدون سرعة ابتدائية.

نعوض في المعادلة التفاضلية فنجد : $\frac{dv}{dt} + b \times 0 = C$

إذن : $\frac{dv}{dt} = C$ ، لكن هنا $\frac{dv}{dt}$ يمثل التسارع $a_0 = \frac{dv}{dt}$ ومنه : $\boxed{C = a_0 = g}$

فالثابت C هو التسارع الابتدائي a_0 وقيمته $\boxed{C = a_0 = 9,8\ m.s^{-2}}$

هذه المعادلة أيضا محققة في مرحلة الحركة المنتظمة والذي يكون فيه :

$$a = \frac{dv}{dt} = 0 m.s^{-2} \text{ و } v = v_{lim}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية فنجد : $0 + b\,v_{lim} = a_0$

إذن : $\boxed{b = \frac{a_0}{v_{lim}} = \frac{g}{v_{lim}}}$ قيمته $b = \frac{9,8\ m.s^{-2}}{19,6\ m.s^{-2}}$ اي $\boxed{b = 0,5\ s^{-1}}$

b له وحدة مقلوب الزمن.

تمثيل القوى المؤثرة على الجسم

القوى التي يخضع لها الجسم، أثناء حركة سقوطه الشاقولي في الهواء هي :

- قوة الثقل $\vec{P}$: قيمتها $P = m\,g$

وبما ان ثابت = g في مكان التجربة، إذن فشدتها ثابتة (بالطبع m ثابتة لأن السرع التي يكتسبها الجسم صغيرة مقارنة بسرعة الضوء).

- دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$: قيمتها هي $\pi = \rho_{air}\, v g$

حيث : ρ_{air} الكتلة الحجمية للهواء، v حجم الجسم، g تسارع حقل الجاذبية، وكلها مقادير ثابتة.

إذن قيمة $\vec{\pi}$ ثابتة.

قوة احتكاك الجسم بالهواء $\vec{f}$ قيمتها تتعلق بالسرعة $\vec{v}$:

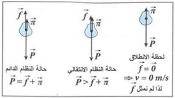
إما $f = -K\,v$

او $f = -K\,v^2$

وبشكل عام : $f = -K\,v^n$

وبما أن $\vec{v}$ تتغير فقوة الاحتكاك تتغير حتى تصبح :

$v = v_{lim}$ = ثابت



عندها تصبح قيمة f ثابتة. ولذا يأتي تمثيل القوى في كل مرحلة كما يلي :

- لحظة الانطلاق

$v = 0\ m.s^{-1}$ إذن $\vec{f} = \vec{0}$ لذا لم نمثل $\vec{f}$

- في حالة النظام الانتقالي : $\vec{P} > \vec{f} + \vec{\pi}$
- في حالة النظام الدائم : $\vec{P} = \vec{f} + \vec{\pi}$

ملاحظة

- في كل التمثيلات مثلنا $\vec{P}$ بشعاع طوله ثابت $(2cm)$.
- أيضا $\vec{\pi}$ مثلناه بشعاع طوله ثابت $(0,5cm)$.
- أما $\vec{f}$ فقيمته متغيرة على حسب السرعة، مع الانتباه إلى أنه في مرحلة النظام الدائم يكون $\vec{f}$ ثابت ويكون مجموع $\vec{f}$ و $\vec{\pi}$ يساوي $\vec{P}$ لذا مثلنا $\vec{f}$ بشعاع طوله $(1,5cm)$.

التمرين 2 : حل المعادلة التفاضلية لتطور سرعة سقوط جسم في الهواء

ندرس في معلم سطحي أرضي، نعتبره عطاليا، السقوط في الهواء لكرة معدنية، نصف قطرها $R=2cm$، وكتلتها الحجمية $\rho = 7,8\ g / cm^3$.

يعطى $\rho_{air} = 1,3 g.L^{-1}$ وحجم الكرة $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

1/ أ/ أعط العبارة الحرفية لكل من ثقل الكرة $\vec{P}$ ودافعة أرخميدس $\vec{\pi}$.

ب/ احسب قيمتيهما. ماذا تستنتج ؟ خذ $g = 9,8 m.s^{-2}$

2/ ننمذج قوة احتكاك الهواء بالقوة $\vec{f} = -K\vec{v}$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، جد المعادلة التفاضلية للسقوط الشاقولي للكرة.

3/ باعتبار أن السرعة الابتدائية معدومة تأكد من أن حل هذه المعادلة، يعطى بالعبارة :

$v(t) = \frac{(m-M).g}{K}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$ حيث : m كتلة الكرة، M كتلة الهواء المزاح.

4/ أ/ أعط عبارة السرعة الحدية v_{lim}.

ب/ استنتج قيمة K إذا علمت أن السرعة الحدية لكرة الحديد هي $80m/s$.
ج/ اعط إذن عبارة قوة احتكاك الهواء.
5/ احسب الزمن $t = t_{1/2}$ الذي تبلغ فيه السرعة نصف قيمة السرعة الحدية أي $V = \frac{V_{lim}}{2}$.

الحل

1/ أ/ العبارة الحرفية لثقل الكرة $\vec{P}$

$$P = mg$$

لكن الكتلة الحجمية $\rho = \frac{(m)\ \text{الكتلة}}{(V)\ \text{الحجم}}$

إذن $\rho = \frac{m}{V}$ ومنه نجد $m = \rho V$ و $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ إذن: $\boxed{P = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 g}$

العبارة الحرفية لدافعة أرخميدس $\vec{\pi}$

نعلم أن: دافعة أرخميدس = ثقل الهواء المزاح

إذن: دافعة أرخميدس (π) = كتلة الهواء المزاح (M) × الجاذبية (g)

أي: $\pi = Mg$

بالمثل: كتلة الهواء المزاح (M) = الكتلة الحجمية للهواء × حجم الهواء المزاح

$$M = \rho_{air} \times V_{air}$$

وبما أن الجسم موجود كليا في الهواء فإن: حجم الهواء المزاح V_A = حجم الكرة (V)

ومنه: $M = \rho_{air} \times V = \rho_{air}\frac{4}{3}\pi R^3$ وفي الأخير نكتب: $\boxed{\pi = \rho_{air}\times\frac{4}{3}\pi R^3 g}$

ب/ حساب قيمتي p و π

$$P = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g$$

$$R = 2cm = 2.10^{-2} m$$

$$g = 9,8\, m.s^{-2}$$

$$\rho = \frac{7,8\, g}{cm^3} = \frac{7,8\times10^{-3} kg}{(10^{-2} m)^3} = 7,8\times10^3 kg/m^3$$

إذن: $P = \frac{4}{3}(3,14)(2\times10^{-2})^3\times 7,8\times10^3\times 9,8$

$$\boxed{P \approx 2,56\, N}$$

$$\pi = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{air} g$$

$$\rho_{air} = 1,3\, g.L^{-1} = 1,3\,\frac{g}{L} = \frac{1,3\times10^{-3} kg}{10^{-3} m^3}$$

$$\rho_{air} = 1,3\, kg/m^3$$

نعوض فنجد: $\pi = \frac{4}{3}(3,14)(2.10^{-2})^3\times 3,3\times 9,8$

$$\boxed{\pi \approx 0,43\times10^{-3} N}$$

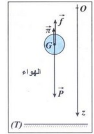
لو حسبنا النسبة $\frac{P}{\pi}$ لوجدنا: $\frac{P}{\pi} = \frac{2,56}{0,43\times10^{-3}} = 5,95\times10^3 \approx 6\times10^3$

أي $\boxed{P = 6000\,\pi}$ فالثقل أكبر بـ 6000 مرة من دافعة أرخميدس.

2/ إيجاد المعادلة التفاضلية

لكي نطبق القانون الثاني لنيوتن، يجب تحديد كل من الجملة، المعلم، القوى.

- الجملة: هي الكرة.
- المعلم: هو (O,z) معلم سطحي نفرضه عطاليا.
- القوى الخارجية: $\vec{P}$ ، $\vec{\pi}$ ، $\vec{f}$.
- القوى الداخلية: قوى تماسك أجزاء الجملة.



نطبق نظرية مركز العطالة (القانون الثاني لنيوتن) لنجد: $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{\pi} + \vec{f} + \vec{P} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على معلم الحركة (O,z): $-\pi - f + P = ma$

إذن: $-Mg - kv + mg = ma$

بالقسمة على m نجد: $a = g - \frac{Mg}{m} - \frac{Kv}{m}$

$$\frac{dv}{dt} = g\left[1 - \frac{M}{m}\right] - \frac{K}{m}v$$

إذن: $\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{K}{m}v = \left(\frac{m-M}{m}\right)g}$

وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة.

3/ حتى نتأكد من أن الحل: $v(t) = \frac{(m-M)}{K}g\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$ هو حل للمعادلة التفاضلية السابقة يكفي أن نعوض به فيها فنجد أنها محققة.

نعين في البداية المشتق $\frac{dv}{dt}$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(m-M)}{K}\,g\,\frac{K}{m}e^{-\frac{K}{m}t} = \frac{(m-M)}{m}\,g.e^{-\frac{K}{m}t}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{(m-M)}{m}g\frac{K}{m}e^{-\frac{K}{m}t}+\frac{k}{m}\frac{(m-M)}{K}g\frac{K}{m}\left(1-e^{-\frac{K}{m}t}\right)=\frac{(m-M)}{m}g$$

$$\frac{(m-M)}{m}g\,e^{-\frac{K}{m}t}-\frac{(m-M)}{m}g\,e^{-\frac{K}{m}t}+\frac{(m-M)}{m}g=\frac{(m-M)}{m}g$$

بالفعل ، $\frac{(m-M)}{m}g=\frac{(m-M)}{m}g$ ، فالمعادلة محققة.

4 / ا/ عبارة السرعة الحدية

- **الطريقة 1**

نحصل على السرعة الحدية عندما تصبح الحركة مستقيمة منتظمة، أي في حالة التسارع معدوم

$$a=\frac{dv}{dt}=0$$

نعوض في المعادلة التفاضلية فنجد ، $0+\frac{K}{m}v=\frac{(m-M)}{m}g$ ، إذن ، $\boxed{v_{lim}=\frac{m-M}{K}g}$

- **الطريقة 2**

نحصل على السرعة الحدية عندما يكون الزمن كبير نسبيا لذا نضع $t\to\infty$ في عبارة السرعة.

$$v_{lim}=\lim v_{t\to\infty}=\frac{(m-M)}{K}g\left(1-e^{-\frac{k}{m}\times\infty}\right)$$

$$v_{lim}=\frac{m-M}{K}g(1-0)$$

$\boxed{v_{lim}=\frac{(m-M)}{K}g}$ وهي نفس العبارة التي وجدناها بالطريقة 1

ب/ حساب K

$K=\frac{(m-M)}{v_{lim}}g$ وباعتبار $v_{lim}=80\,m.s^{-1}$ يكون ، $K=\frac{mg-Mg}{v_{lim}}$

$$K=\frac{P-\pi}{v_{lim}}=\frac{2,56-0,43.10^{-3}}{80}=0,032$$

ومنه ، $\boxed{K\approx 0,032SI}$ والمصطلح SI يعني وحدة دولية.

ج/ عبارة قوة احتكاك الهواء

حسب معطيات هذا التمرين فإن ، $\vec{f}=-K\vec{v}$ إذن ، $\boxed{\vec{f}=-0,032\vec{v}}$

وهكذا نستطيع حساب قيمة f في كل لحظة.

5/ حساب $t_{1/2}$

نعوض بـ $v=\frac{v_{lim}}{2}=\frac{80}{2}$ إذن $v=40m.s^{-1}$

نعوض في عبارة السرعة بعد تبسيطها ، $v=v_{lim}\left(1-e^{-\frac{K}{m}t}\right)$

$$1-e^{-\frac{K}{m}t}=\frac{v}{v_{lim}}=\frac{40}{80}=\frac{1}{2}$$

$$e^{-\frac{K}{m}t}=\frac{1}{2}\quad،\quad -\frac{K}{m}t=\lim\frac{1}{2}=-\lim 2$$

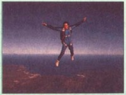
$$\boxed{t=t_{1/2}=\frac{m}{K}\ln 2}$$

لكن $m=\frac{p}{g}=\frac{2,56}{9,8}\approx 0,261\,kg$

$t_{1/2}=\frac{0,261}{0,027}\times 0,693$ أي ، $\boxed{t_{1/2}=6,7\,s}$

التمرين3 : نمذجة احتكاك الهواء على مظلي

يقفز مظلي من طائرة على ارتفاع قريب من سطح الأرض دون أن يفتح مظلته وبدون سرعة ابتدائية. عندما بقيت له مسافة $850\ m$ عن سطح الأرض فتح مظلته ويكون عندها قد قطع مسافة $2650\ m$.



1/ ا/ عندما نهمل قوة احتكاك الهواء $\vec{f}$ ودافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ أمام ثقل المظلي ومظلته $\vec{P}$.

ماذا نسمي هذا السقوط ؟ يؤخذ $g=9,8m.s^{-2}$.

ب/ احسب حينئذ الزمن المستغرق لقطع المسافة بين الارتفاعين المذكورين.

ج/ احسب سرعته حينئذ.

2/ في الواقع أثبتت الدراسات التجريبية أن قوة احتكاك الهواء $\vec{f}$ تنمذج بالعلاقتين التاليتين :

$\vec{f}=-K\vec{v}$ إذا كانت السرعة $\vec{v}$ صغيرة.

Hard_equation

$f = Kv^2$ إذا كانت السرعة $\vec{v}$ كبيرة نسبيا (أيضا شعاعيا نكتبها $\vec{f} = -K\vec{v}^2\vec{u}$ حيث $\vec{u}$ شعاع وحدة موجه بجهة الحركة.

أ/ بناء على هذه المعطيات، وأيضا على قيمة السرعة المستنتجة في السؤال (1 - ج) هل يمكن إهمال قوة احتكاك الهواء ؟ برر إجابتك.

ب/ أي النموذجين تختار للقوة $\vec{f}$ ؟

3/ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في معلم عطالي تحدده، جد المعادلة التفاضلية التي تعطي تطور سرعة المظلي (نهمل دافعة أرخميدس).

4/ إذا علمت أنه عند فتح المظلة، استقرت السرعة عند القيمة $180km/h$.

أ/ ماذا تسمى هذه السرعة ؟

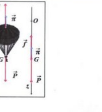
ب/ استنتج قيمة الثابت K علما أن كتلة المظلي ومظلته $(90kg)$.

ج/ احسب الفترة الزمنية لقطع هذه المرحلة.

الحل

1/ أ/ نوع السقوط

نمثل القوى المؤثرة على المظلي في الشكل الموالي.



$\vec{P}$: ثقل المظلي ومظلته.

$\vec{\pi}$: دافعة أرخميدس.

$\vec{f}$: قوة مقاومة الهواء.

نطبق القانون الثاني لنيوتن : $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{P} + \vec{\pi} + \vec{f} = m\vec{a}$$

حسب نص التمرين، نهمل $\vec{f}$ و $\vec{\pi}$، إذن $\vec{P} = m\vec{a}$.

بالإسقاط على المعلم (O,z) السطحي الأرضي الموجه نحو الأسفل والذي نفرضه عطاليا نجد : $+mg = ma$ ومنه : $\boxed{a = +g = +9,8\,m.s^{-2}}$

وأيضا فإن السقوط تم بدون سرعة ابتدائية $v_0 = 0\,m.s^{-1}$

إذن فنوع السقوط هو سقوط حر بدون سرعة ابتدائية.

ب/ حساب الزمن المستغرق

لدينا : $a = \dfrac{dv}{dt}$ لكن $a = g$ إذن : $\dfrac{dv}{dt} = g$ نحل هذه المعادلة التفاضلية بالمكاملة فنجد :

$\boxed{v = g\,t + v_0}$ وهي معادلة السرعة اللحظية.

كما أن $\dfrac{dz}{dt} = v$ إذن : $\dfrac{dz}{dt} = g\,t + v_0$

وأيضا حل هذه المعادلة التفاضلية يتم بالمكاملة فنجد : $\boxed{z = \dfrac{1}{2}g\,t^2 + v_0\,t + z_0}$

ننبه التلميذ إلى أنه يمكن استعمال هاتين المعادلتين المؤطرتين دون استنتاجهما.

مع العلم بأن : $v_0 = 0\,m.s^{-1}$ إذن : $\boxed{z = \dfrac{1}{2}g\,t^2 + z_0}$

نعتبر أن فاصلة الانطلاق هي $z_0 = 0\,m$ وأن $z = 2650\,m$ إذن : $\boxed{t = \sqrt{\dfrac{2z}{g}}}$

بالتعويض نجد : $t = \sqrt{\dfrac{2 \times 2650}{9,8}}$ إذن : $\boxed{t \approx 23,3\,s}$

ج/ حساب سرعة المظلي

نستعمل معادلة السرعة : $v = 9,8\,(23,3)$ ، $v = gt + v_0$ ومنه : $\boxed{v = 228,3\,m.s^{-1}}$

2/ أ/ لا يمكن إهمال قوة احتكاك الهواء، لأنها تتعلق بالسرعة.

كما أن السرعة المستنتجة $v = 228,3\,m.s^{-1}$ هي سرعة كبيرة نسبيا.

ب/ تنمذج هنا قوة احتكاك الهواء بالعبارة $\vec{f} = -K\,v^2\,\vec{u}$

$\vec{u}$ هو شعاع وحدة بجهة الحركة أي بجهة المعلم $(O,\,z)$.

3/ المعادلة التفاضلية لتطور السرعة

نطبق القانون الثاني لنيوتن : $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{P} + \vec{\pi} + \vec{f} = m\vec{a}$$

بإهمال دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ أمام $\vec{P}$ نجد : $\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$

بالإسقاط على معلم الحركة $(O,\,z)$ الذي أشرنا إليه في السابق نجد : $P - f = ma$

$$mg - K\,v^2 = m\frac{dv}{dt}.$$

بالقسمة على m نجد : $\boxed{\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{K}{m}v^2 = g}$

وهذه هي المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى للسرعة بوجود طرف ثاني.

4/ أ/ تسمى هذه السرعة، السرعة الحدية v_{lim}

ب/ استنتاج قيمة الثابت K

بما أن السرعة استقرت عند القيمة $v = v_{lim} = 180\,km\,/\,h$ فهذا يعني أنها أصبحت ثابتة، وبالتالي فالمظلي أصبحت حركته مستقيمة منتظمة، وعليه فإن التسارع معدوم، أي $a = \dfrac{dv}{dt} = 0$

نعوض في المعادلة التفاضلية فنجد : $0 + \dfrac{K}{m}v^2 = g$ إذن : $\boxed{K = \dfrac{gm}{v_{lim}^2}}$

$$v = 180\,km.h^{-1} = \frac{180}{3,6}\,m.s^{-1} = 50\,m.s^{-1}$$

$m = 90kg$ ، $g = 9{,}8m/s^2$ إذن ، $K = \dfrac{9{,}8 \times 90}{(50)^2} = 0{,}3528$

$$\boxed{K = 0{,}353\, N.s^2.m^{-2}}$$

ج/ حساب الفترة الزمنية المستغرقة لقطع مسافة $850m$ بحركة مستقيمة منتظمة

نعلم ان $v = \dfrac{dz}{dt}$

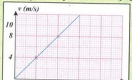
بالمكاملة نجد ، $z = vt + z_0$

باعتبار $z - z_0 = 850\,m$ ، إذن ، $t = \dfrac{z - z_0}{v_{lim}}$

$t = \dfrac{850}{50} = 17$ ومنه ، $\boxed{t = 17\,s}$

التمرين 4 : نمذجة قوة احتكاك الهواء على سقوط تفاحة

تسقط تفاحة صغيرة كتلتها $m = 40g$ شاقوليا من اعلى شجرة، بدون سرعة ابتدائية المنحني البياني الآتي يعطي تطور سرعة التفاحة $v(t)$ في معلم أرضي نعتبره عطاليا.



1/ من البيان استنتج طبيعة حركة التفاحة.

2/ استنتج بيانيا تسارع التفاحة (a).

3/ احسب قيمة قوة احتكاك الهواء $\vec{f}$ وبين انها ثابتة.

(يمكن إهمال دافعة ارخميدس، ويؤخذ $g = 10\ SI$).

4/ احسب المسافة الكلية التي قطعتها التفاحة.

5/ اعط المعادلة الزمنية للسرعة اللحظية $v(t)$.

الحل

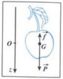
1/ طبيعة حركة التفاحة

إن البيان $v(t)$ هو خط مستقيم ميله موجب يمر من المبدأ فمعادلته هي من الشكل $v = at$ وهي معادلة حركة مستقيمة متغيرة بانتظام إذن فحركة الجسم متغيرة بانتظام.

2/ حساب التسارع a

نحسبه من ميل المستقيم $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ ، $a = \dfrac{8-4}{2-1} = 4$ ، $\boxed{a = 4m/s^2}$

3/ حساب قيمة قوة احتكاك الهواء $\vec{f}$



أهملنا قوة دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ لذا لم نمثلها.

نطبق نظرية العطالة (القانون الثاني لنيوتن) ، $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المعلم (O,z) الموجه نحو الأسفل والذي نفرضه عطاليا ،

$P - f = ma$ إذن ، $f = P - ma$

لكن ، $P = mg$ ، $\boxed{f = m(g-a)}$

نعوض فنجد ، $f = 0{,}04(10-4)$ وبالتالي ، $\boxed{f = 0{,}24N}$

لاحظ ان $\vec{f}$ ثابتة القيمة.

4/ المسافة الكلية التي قطعتها التفاحة

يمكن حساب المسافة بيانيا ،

$$\boxed{\text{المسافة} = \text{عدديا مساحة المثلث الذي يحصره مخطط السرعة مع محور الزمن} = \frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}}$$

$z = \dfrac{2{,}5 \times 10}{2} = 12{,}5\,m$ ، $\boxed{z = 12{,}5\,m}$

5/ المعادلة الزمنية للسرعة اللحظية

لدينا ، $v = at$ ، $\boxed{v = 4t}$ حيث ، t بالثانية (s) و v بـ (m/s)

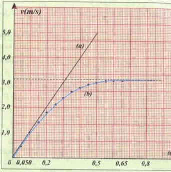
التمرين 5 : وضعية إدماجية

اراد استاذ الفيزياء في حصة الأعمال التطبيقية دراسة السقوط الشاقولي لجسمين في الهواء ومن ثم تحقيق عدة أهداف.

الجسم 1 ، عبارة عن كرية صغيرة من الحديد نصف قطرها $r_1 = 1cm$ ، والكتلة الحجمية للحديد $\rho_{fer} = 7{,}8g/cm^3$.

الجسم 2 ، عبارة عن قطرة مطر، تشبه كرية قطرها $(2r_2 = 1mm)$ ، والكتلة الحجمية للماء $\rho_{eau} = 1\,g/cm^3$.

I/ احضر الأستاذ كاميرا رقمية $(web\text{-}cam)$ بتواتر $\left(\frac{1}{15}s\right)$ بصورة 220×320 وصور حركة الجسمين (اللذين نعتبرهما نقطتين ماديتين) وسجلهما بالنسبة لمعلم مخبري نعتبره معلما عطاليا. ثم كلف مجموعة من التلاميذ بمعالجة التسجيلات المتحصل عليها باستعمال برنامج ملائم فحصل التلاميذ على النقاط (Z,t)، ثم طلب منهم نقل هذه النقاط على ورقة مجدول $Excel$ واعطيت التعليمات لرسم منحنى تطور السرعة $v(t)$ لكل جسم. فاتت كما هو موضح في البيان التالي. ثم طرح الأستاذ الأسئلة التالية ،



1/ أ/ إذا علمت ان حجم الكرة يعطى بالعلاقة $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ وان الكتلة الحجمية للهواء في شروط التجربة هو $\rho_{air}=1,3\,g.L^{-1}$ وان قوة احتكاك الهواء للجسمين تعطى بالعبارة $\vec{f}=6\pi\eta r\vec{v}$ او بالعبارة $\vec{f}=-Kv.\vec{v}$ حيث $\eta=1,8.10^{-5}\,SI$ لزوجة الهواء ($\vec{f}$ تسمى قوة ستوكس).
K ثابت مجهول.

ب/ احسب النسبتين $\frac{P}{\pi}$ و $\frac{P}{f}$ لكلا الجسمين وبرر إجابتك، علما بان : $\vec{P}$ ثقل الجسم ، $\vec{\pi}$ دافعة ارخميدس ، $\vec{f}$ مقاومة الهواء عند السرعة المشتركة $v=0\,m.s^{-1}$.

ج- ماذا تستنتج ؟

2/ أ/ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على كل جسم، جد المعادلة التفاضلية لتطور السرعة لكل منهما.

ب/ أرفق بكل متحرك المنحنى الموافق لتطور سرعته.

ج/ حدد طبيعة الحركة لكل منهما.

II/ لتفسير بيان المنحنى (b) ومن ثم معرفة النموذج الحقيقي لـ $\vec{f}$ اقترح الأستاذ على التلاميذ المعادلتين التفاضليتين التاليتين

$$\begin{cases}\frac{dv}{dt}+\frac{v}{3,1}=9,8\,......1\\ \frac{dv}{dt}+v^2=9,8\,......2\end{cases}$$

ثم طرح على التلاميذ الأسئلة التالية :

1/ أ/ ما هي قيمة التسارع الابتدائي a_0 لقطرة المطر ؟ في كل نموذج ؟ علّق على النتيجتين، وكيف تفسرهما ؟

ب/ برايك هل بتعيين a_0 نستطيع اختيار النموذج الصحيح لقوة الاحتكاك ؟

2/ أ/ ما هي قيمة السرعة الحدية V_{lim} التي يعطيها كل نموذج ؟

ب/ قارن القيمة المحسوبة للسرعة الحدية بالقيمة المسجلة في البيان (b).

ج/ برايك، هل بتعيين V_{lim} ، نستطيع اختيار النموذج الصحيح لقوة الاحتكاك ؟

3/ أ/ اختر الآن النموذج الصحيح لـ $\vec{f}$.

ب/ احسب الثابت K ، مع تحديد وحدته.

ج/ استنتج الزمن المميز τ .

III/ 1 / احسب الارتفاع الذي سقطت منه كرية الفولاذ وكذلك الارتفاع الذي بدئ منه تسجيل حركة قطرة المطر (لاحظ ان بدء تسجيل حركتيهما تم في نفس اللحظة الابتدائية $(t_0=0s$).

2/ ما هو الزمن الذي استغرقه كل متحرك في حركة سقوطه ؟

3/ هل ترافق الجسمان في حركتيهما ؟ إذا كان جوابك لا، فهل يعني هذا أن الجسم الأثقل هو الذي يسقط بسرعة أكبر حسب ما قاله ارسطو ؟ - اشرح واقترح تجربة تؤيد بها قولك.

4/ ما هي الأهداف المحققة في هذه التجربة ؟

الحل

I/ 1/ أ/ حساب النسبة $\frac{P}{\pi}$

نعلم ان قوة الثقل $P=mg$

إذن ، $m=\rho\frac{4}{3}\pi r_1^3=\rho\frac{4}{3}\pi r_1^3$ ، $\boxed{P=\rho\frac{4}{3}\pi r_1^3 g}$

كما أن دافعة أرخميدس ثقل الهواء المزاح $=\pi$

إذن ، $\pi=\rho_{air}Vg$ ومنه ، $\boxed{\pi=\rho_{air}\frac{4}{3}\pi r_1^3 g}$

بالنسبة للجسم 1 الذي هو كرية فولاذية $\rho=\rho_{fer}$ ،

$$\frac{P}{\pi}=\frac{\rho_{fer}\frac{4}{3}\pi r_1^3 g}{\rho_{air}\frac{4}{3}\pi r_1^3 g}=\frac{\rho_{air}}{\rho_{fer}}$$

$$\frac{P}{\pi}=\frac{\rho_{fer}}{\rho_{air}}=\frac{7,8\,g/cm^3}{1,3\,g/L}=\frac{7,8\,g/10^{-3}\,L}{1,3\,g/L}$$

$\boxed{\frac{P}{\pi}=6000}$ اي ان قوة الثقل $\vec{P}$ اكبر من دافعة ارخميدس $\vec{\pi}$ بـ 6000 مرة لذا نهمل $\vec{\pi}$ امام $\vec{P}$.

بالنسبة للجسم 2 الذي هو قطرة مطر كروية الشكل إذن $\rho=\rho_{eau}=1g/cm^3$ ،

نعوض فنجد ، $\frac{P}{\pi}=\frac{\rho_{eau}}{\rho_{air}}=\frac{1g/cm^3}{1,3g/L}=\frac{1g/10^{-3}L}{1,3g/L}$

$$\boxed{\frac{P}{\pi}=1000}$$

فقوة الثقل $\vec{P}$ اكبر من دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ بـ 1000 مرة لذا نهمل $\vec{\pi}$ امام $\vec{P}$.

النسبة $\frac{P}{f}$

نعلم أن $\vec{f}$ تعطى بنموذجين هما ،

$\vec{f}=-6\pi\eta r\vec{v}$ مع $\eta=1,8\times10^{-5}$ وهي لزوجة الهواء.

$\vec{f}=-Kv.\vec{v}$ مع K ثابت.

لم تعط قيمته لذا نفضل استعمال النموذج الأول لـ $\vec{f}$ حتى نستطيع تحديد النسبة ،

$$\frac{P}{f}=\frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3 g}{6\pi\eta r v}=\frac{2\rho r^2 g}{9\eta v} \text{ ، إذن } \frac{P}{f}=\frac{2\rho r^2 g}{9\eta v}$$

بالنسبة لكرية الفولاذ (الجسم 1)

نضع ، $\rho_1=\rho_{fer}$

$$\frac{P}{f}=\frac{2\rho_1 r_1^2 g}{9\eta v}$$

ناخذ قيمة السرعة $v=3,0\,m.s^{-1}$

نعوض بالقيم فنجد ، $\frac{P}{f}=\frac{2\times7,8.10^3\times(10^{-2})^2\times9,8}{9\times1,8.10^{-5}\times3}$

$\boxed{\frac{P}{f}=3,2\times10^4}$ لذا نهمل $\vec{f}$ امام $\vec{P}$.

بالنسبة لقطرة المطر (الجسم 2)

نضع ، $\rho_2=\rho_{eau}$

$$\frac{P}{f}=\frac{2\rho_2 r_2^2 g}{9\eta v}=\frac{2\times10^3\times(0,5.10^{-3})^2\times9,8}{9\times1,8.10^{-5}\times3}$$

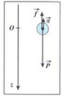
$$\boxed{\frac{P}{f}\approx10}$$

هنا لا نستطيع إهمال $\vec{f}$ امام $\vec{P}$.

ب/ الاستنتاج

- نستنتج أن دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ في الهواء عادة ما تهمل امام الثقل $\vec{P}$ لأي جسم ذو كثافة كبيرة.
- كرية الفولاذ نعتبر سقوطها الشاقولي في الهواء سقوطا حرا لأننا اهملنا $\vec{\pi}$ و $\vec{f}$ امام ثقلها $\vec{P}$.

2/ أ/ تطبيق القانون الثاني لنيوتن



- بالنسبة لكرية الفولاذ

$$\sum\vec{F}=m\vec{a}$$

$$\vec{P}+\vec{f}+\vec{\pi}=m\vec{a}$$

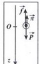
نهمل $\vec{\pi}$ و $\vec{f}$ امام $\vec{P}$ فنجد ، $\vec{P}=m\vec{a}$

بالإسقاط على المعلم (O,z) السطحي الأرضي الذي نفرضه عطاليا ،

$$P=ma\ ;\ mg=ma$$

إذن ، $\boxed{a=g=\text{ثابت}}$

وهي المعادلة التفاضلية لحركة كرية الفولاذ $\boxed{\frac{dv}{dt}=g}$



- بالنسبة لقطرة المطر

$$\sum\vec{F}=m\vec{a}$$

$$\vec{P}+\vec{f}+\vec{\pi}=m\vec{a}$$

نهمل فقط $\vec{\pi}$ امام $\vec{P}$ فنجد ، $\vec{P}+\vec{f}=m\vec{a}$

بالإسقاط على المعلم (O,z) الذي نفرضه عطاليا ، $P-f=ma......*$

لدينا هنا نموذجان لـ $\vec{f}$ وعليه نجد معادلتين تفاضليتين.

- بالنسبة للنموذج الأول ، $\vec{f}=-6\pi\eta r\vec{v}$

إذن قيمة f هي $f=6\pi\eta r v$ بدون إشارة $(-)$

نعوض في المعادلة (*) فنجد ، $mg-6\pi\eta r v=ma$ ومنه ، $\frac{dv}{dt}+\frac{6\pi\eta r}{m}v=g$

لنعين المقدار $\frac{6\pi\eta r}{m}$

$$\frac{6\pi\eta r}{m}=\frac{6\pi\eta r}{\frac{4}{3}\pi r^3\rho_2}=\frac{9\eta}{2r^2\rho_2}=\frac{9\times1,8.10^{-5}}{2(0,5.10^{-3})^2(10^3)}$$

$\frac{6\pi\eta r}{m}=0,324$ ومنه تكون المعادلة التفاضلية ، $\boxed{\frac{dv}{dt}+0,324v=g}$

- بالنسبة للنموذج الثاني ، $\vec{f}=-Kv.\vec{v}$ وقيمتها ، $f=+Kv^2$

عندما نعوض في المعادلة (*) نجد ، $mg-\frac{Kv^2}{m}=ma$

إذن : $\boxed{\frac{dv}{dt}+\frac{K}{m}v^2=g}$ وهي المعادلة التفاضلية بالنموذج الثاني.

ب/ إرفاق بكل متحرك منحني سرعته المناسب

• كرية الفولاذ منحنيها المناسب هو المنحني (a) لأن معادلته التفاضلية $\frac{dv}{dt}=g$ تؤدي إلى الحل

$$v=gt+v_0$$

ومعادلة المستقيم (a) هي نفسها هذه المعادلة مع $v_0=0\,m.s^{-1}$.

• قطرة المطر : منحني سرعتها هو المنحني b .

ج/ طبيعة الحركة

• كرية الحديد : حركتها مستقيمة وتسارعها (g) ثابت، فحركتها مستقيمة متغيرة بانتظام متسارعة (أو نقول سقوطا حرا).

• قطرة الماء : حركتها تتم في مرحلتين :

المرحلة الأولى : مرحلة النظام الانتقالي، وفيها تكون الحركة مستقيمة متسارعة.

المرحلة الثانية : مرحلة النظام الدائم ، وفيها تكون الحركة مستقيمة منتظمة.

II/ 1 / تعيين التسارع الابتدائي a_0 لقطرة المطر

• بالنسبة للنموذج الأول : نأخذ المعادلة التفاضلية 1.

$$\frac{dv}{dt}+\frac{v}{3,1}=9,8$$

نحصل على التسارع الابتدائي في حالة $v=0\,m.s^{-1}$

إذن : $\frac{dv}{dt}+\frac{0}{3,1}=9,8$ ومنه : $a_0=\frac{dv}{dt}=9,8$

$$\boxed{a_0=9,8\,m.s^{-2}}$$

• بالنسبة للنموذج الثاني : نأخذ المعادلة التفاضلية 2.

$$\frac{dv}{dt}+v^2=9,8$$

بوضع $v=0\,m.s^{-1}$ نجد ايضا : $a_0=\frac{dv}{dt}=9,8$

إذن : $\boxed{a_0=9,8\,m.s^{-2}}$

نلاحظ ان كلا النموذجين يعطيان نفس التسارع الابتدائي $a_0=g=9,8\,m.s^{-2}$

وهذا متوقع لأنه في لحظة الانطلاق تكون $\vec{f}=\vec{0}$ لأن $v=0\,m.s^{-1}$ وهذا بالنسبة للنموذجين وعليه تكون قطرة الماء خاضعة لثقلها فقط $\vec{P}$ (بإهمال $\vec{\pi}$). إذن بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في لحظة الانطلاق نجد : $ma=mg$ ومنه : $a=g=9,8\,m.s^{-2}$.

ب- لاحظ ان كلا النموذجين يعطيان نفس التسارع الابتدائي a_0 وعليه فإن معرفة (a_0) لا يؤدي بالضرورة إلى معرفة النموذج الصحيح.

2/ ا/ قيمة السرعة الحدية

سواء كان النموذج الأول أو الثاني فإن السرعة الحدية نحصل عليها في حالة النظام الدائم، اي في حالة الحركة المستقيمة المنتظمة، وهذا يؤدي إلى وضع $a=\frac{dv}{dt}=0$ في كل معادلة تفاضلية.

• بالنسبة للنموذج الأول

$$v_{lim}=3,1\times 9,8 \quad ، \quad 0+\frac{v}{3,1}=9,8$$

$$\boxed{v_{lim}\approx 30,4\,m.s^{-1}}$$

• بالنسبة للنموذج الثاني

$$v_{lim}=\sqrt{9,8}\approx 3,1 \quad ، \quad 0+v^2=9,8$$

$$\boxed{v_{lim}\approx 3,1\,m.s^{-1}}$$

ب/ مقارنة قيمة v_{lim} النظرية والبيانية

• بيانيا : لدينا من المنحني (b) : $v_{lim}=3,1\,m.s^{-1}$ فهي توافق تماما v_{lim} المحسوبة من النموذج الثاني بطريقة نظرية.

ج/ نعم، بتعيين v_{lim} نستطيع اختيار نموذج قوة احتكاك الهواء بالجسم.

3/ ا/ بناء على الإجابة السابقة (ب) نستطيع القول :

إن النموذج الثاني هو النموذج الصحيح $\vec{f}=-Kv.\vec{v}$ بمعنى : $\boxed{f=Kv^2}$

ب/ حساب الثابت K

من العلاقة السابقة نكتب : $\boxed{K=\frac{f}{v^2}}$

لذا يجب تعيين f و v

يسهل تعيين f و v في حالة مرحلة الحركة المستقيمة المنتظمة إذ ان $\sum\vec{F}=\vec{0}$

ومنه : $\vec{P}+\vec{f}=\vec{0}$.

وبالإسقاط على المحور (Oz) الموجه نحو الأسفل نجد : $P=f \quad ، \quad P-f=0$

لكن : $P=mg=\frac{4}{3}\pi r_2^3\rho g$

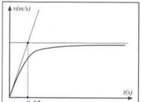
إذن : $f=\frac{4}{3}\times 3,14(0,5.10^{-3})^3\times 10^3\times 9,8$

$$f=5,13\times 10^{-6}\,N$$

لدينا أيضا : $v = v_{lim} = 3,1 m.s^{-1}$

الآن نعوض في عبارة K فنجد : $K = \frac{5,13 \times 10^{-6}}{(3,1)^2} = 5,34 \times 10^{-7} N.s^2.m^2$

ج/ استنتاج الزمن المميز τ

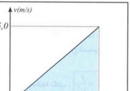


نعينه بيانيا من نقطة تقاطع الماس لمنحني تطور سرعة قطر المطر مع الخط المقارب الأفقي الذي معادلته $v = 3,1 m.s^{-1}$ لنفس المنحني
ولننتبه إلى أن منحني تطور سرعة كرية الفولاذ هو خط مستقيم ويشكل مماسا للمنحني $v(t)$ لقطرة المطر فلا داعي إذن لتمثيل الماس. إذن من الشكل المقابل نجد :

$\tau = 0,32 s$

III/ 1 / حساب الارتفاع الذي سقط منه كل جسم

تم بدء تسجيل حركتي الجسمين في نفس اللحظة $(t_0 = 0s)$، وعليه فإن الارتفاع الذي نحسبه متساو للجسمين.
لحساب الارتفاع الذي سقطت منه كرية الفولاذ نستعمل الطريقة البيانية، مادام أعطي لنا مخطط سرعته.



عدد مساحة المثلث $= \frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2} = z$

$z = \frac{0,5 \times 5}{2}$ ، $\boxed{z = 1,25 m}$

ب/ الزمن الذي استغرقه كل متحرك في حركته

- كرية الفولاذ

انظر البيان : $\boxed{t_1 = 0,5 s}$

- قطرة المطر

من البيان نجد أن : $\boxed{t_2 \approx 0,85 s}$

وعليه فإن كرية الفولاذ استغرقت مدة أقل في حركتها ولذا فإن الجسمين لم يترافقا في حركتيهما.
ظاهريا بدا أن الجسم الأثقل وهو الكرية هبط بسرعة أكبر من سرعة قطرة المطر. لكن إذ انتبهنا إلى أن الأول كان تأثير كل من مقاومة الهواء ودافعة أرخميدس عليه قليلا.
أما بالنسبة لقطرة المطر، فإن تأثير مقاومة الهواء عليها لا يمكن إهماله، وهذا هو السبب الذي جعل الجسمين لا يترافقان في حركتيهما.
فبمعزل عن الهواء تترافق الأجسام في حركتها، إذ من المعلوم أنه في تجربة أنبوب نيوتن الذي يفرغ من الهواء تترافق جميع الأجسام في حركاتها.
وعليه فإن فكرة أرسطو لا تتحقق إلا إذا كانت مقاومة الهواء كبيرة.

4/ الأهداف المحققة في هذه التجربة

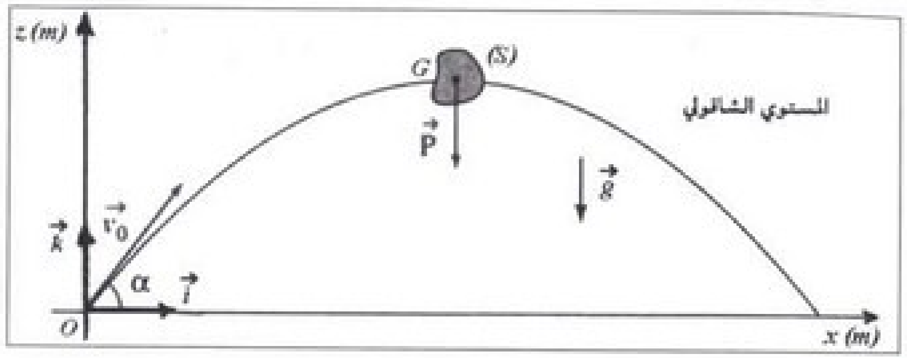
- الأجسام الكروية صغيرة الحجم وذات الكثافة الكبيرة مثل المعادن يمكن إهمال فيها مقاومة الهواء $\vec{f}$ وأيضا دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ وبالتالي يمكن اعتبار سقوطها في الهواء سقوطا حرا بتقريب جيد.
- يمكن تحديد بطريقة تجريبية نموذج قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- التحقق من القانون الثاني لنيوتن.

الوحدة 4

4- حركة قذيفة في حقل الجاذبية

1.4- حركة قذيفة في حقل الجاذبية

يقذف جسم بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$، تميل عن الأفق بزاوية α في مكان فيه حقل الجاذبية $\vec{g}$ منتظم في اللحظة الابتدائية $(t=0s)$ الجسم موجود في المبدأ O للمعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدراسة حركة مركز عطالة تتبع ما يلي :



الجملة : هي الجسم

- المعلم : $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم سطحي أرضي نفرضه عطاليا.
- القوى الخارجية : $\vec{P}$ ، $\vec{f}_{(V)}$ ، $\vec{\pi}$ ، نهمل $\vec{f}_{(V)}$ و $\vec{\pi}$ أمام $\vec{P}$ فالشروط المذكورة في الفقرة 3.
- القوى الداخلية : قوى تماسك أجزاء الجملة.

التسارع في حقل الجاذبية

نطبق القانون الثاني لنيوتن : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ حيث $\vec{a}$ تسارع مركز عطالة الجملة.

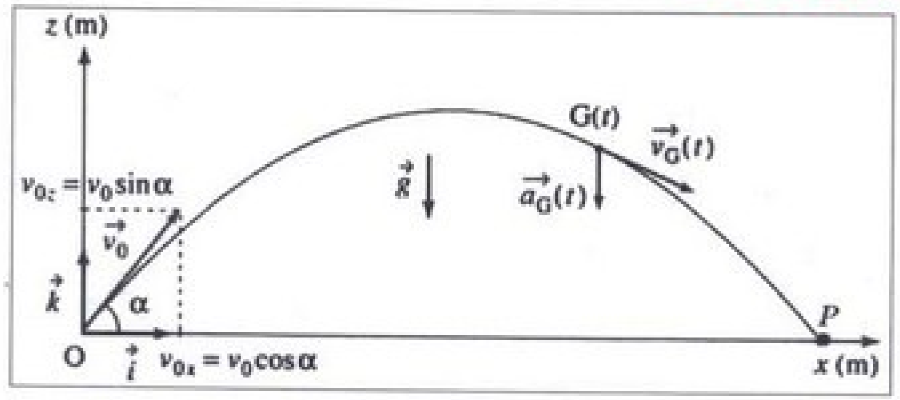
بإسقاط هذه العلاقة على المحور الأفقي (Ox) نجد : $P_x = ma_x$ أي $P_x = 0N$ إذن $ma_x = 0$

ومنه : $\boxed{a_x = 0\, m.s^{-2}}$

بالإسقاط على المحور الشاقولي (Oz) نجد : $P_z = ma_z$ لكن $P_z = -mg$

(لاحظ أن $\vec{P}_z$ معاكس لجهة (Oz) إذن $-mg = ma_z$ أي : $\boxed{a_z = -g}$.

المعادلات الزمنية للحركة



نعلم أن $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ ، وبما أن $a_x = 0\, m.s^{-2}$ ، إذن $\frac{dv_x}{dt} = 0$ ، ومنه نستنتج أن ثابت = v_x.

فالسرعة وفق (Ox) ثابتة في كل اللحظات الابتدائية بما فيها اللحظة الابتدائية.

إذن، مركبة السرعة الابتدائية وفق (Ox) هي v_{0x} بحيث : $v_{0x} = v_x(t=0)$

وكما هو موضح في الشكل، بمكن تعيين v_{0x}، فإنه لدينا : $\cos\alpha = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{v_{0x}}{v_0}$

إذن : $\boxed{v_{0x} = v_0 \cos\alpha}$

كما يمكن تعيين المركبة العمودية للسرعة الابتدائية v_{0x}، وأيضا لدينا $\sin\alpha = \frac{v_{0z}}{v_0}$

فنجد : $\boxed{v_{0z} = v_0 \sin\alpha}$ وفي الأخير نكتب : $v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha$

لكن $v_x = \frac{dx}{dt}$، إذن : $x = v_x t + x_0$ فهي دالة تآلفية حيث x_0 فاصلة المتحرك في اللحظة الابتدائية $(t=0s)$، ومن الشكل لدينا $x_0 = 0m$ ، نعوض في معادلة x فنجد :

$x = v_0 \cos\alpha t + 0$ أي : $\boxed{x = (v_0 \cos\alpha)t}$

بالمثل لدينا : $a_z = -g$، إذن : $\frac{dv_z}{dt} = -g$، ومنه نجد : $v_z = gt + v_{0z}$

وبالتعويض عن v_{0z} نجد : $\boxed{v_z = gt + v_0 \sin\alpha}$

كما أن $\frac{dz}{dt} = v_z$ ، إذن : $\frac{dz}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha$

ومنه : $z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t + z_0$ حيث z_0 الترتيبة الابتدائية، وهنا $z_0 = 0m$

لذا نكتب : $\boxed{z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t}$

نلخص المعادلات الزمنية كما يلي :

- معادلات السرعة اللحظية على المحورين

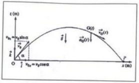
$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\alpha \\ v_z &= -gt + v_0 \sin\alpha \end{aligned}}$$

- معادلات الإحداثيتين (الفاصلة والرتيبة)

$$\boxed{\begin{aligned} x &= (v_0 \cos\alpha)t \,......(1) \\ z &= -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t \,......(2) \end{aligned}}$$

إذا تمّ السّقوط الحرّ بسرعة ابتدائية غير شاقولية، فتسمّى حركة القذيفة

يقذف جسم كتلته m بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ ، تصنع زاوية α مع الأفق. لندرس حركة الجسم.



- المعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم سطحي أرضي نفترضه عطاليا.
- القوى : $\vec{P}$.
- نطبّق القانون الثاني لنيوتن : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

نجد : $\vec{P} = m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

ومنه : $\boxed{\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}}$

- الشروط الابتدائية :

$$\vec{v}_0 \begin{vmatrix} v_{0_z} = v_0 \sin\alpha \\ v_{0_y} = 0 m.s^{-1} \\ v_{0_x} = v_0 \cos\alpha \end{vmatrix} \quad \text{بالتكامل :} \quad \vec{r}_0 = \overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} z = 0m \\ y = 0m \\ x = 0m \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \begin{vmatrix} a_z = -g \\ a_y = 0m.s^{-2} \\ a_x = 0m.s^{-2} \end{vmatrix} \quad \text{بالتكامل :} \quad \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \begin{vmatrix} v_z = -gt + v_{0_z} \\ v_y = 0m.s^{-1} \\ v_x = v_{0_x} = v_0 \cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0_z}t + z_0 \\ y = 0m \\ x = (v_{0_x})t + x_0 \end{vmatrix} \quad \text{بالتكامل :} \quad \begin{vmatrix} z = -\frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 \sin\alpha ......(1) \\ y = 0m......(2) \\ x = (v_0 \cos\alpha)t......(3) \end{vmatrix}$$

معادلة المسار $z = f(x)$

نجد (t) من المعادلة (3) ، ونعوّضها في المعادلة (1) ، فنجد معادلة المسار.

معادلة مسار القذيفة $z = f(x)$

إيجاد معادلة المسار، معناه إيجاد علاقة مباشرة بين x و z دون وجود الزمن t، أي علاقة $.z = f(x)$

من المعادلة 1 نكتب : $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$ ، نعوض في المعادلة 2 نجد :

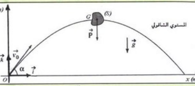
$$z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha\left(\frac{x}{v \cos\alpha}\right)$$

$$\boxed{z = -\left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\right)x^2 + (v_0 tg\alpha)x}$$

وهذه المعادلة من الشكل $z = ax^2 + bx$ مع a سالب، فهي معادلة قطع مكافئ، وعليه فإن مسار القذيفة هو قطع مكافئ.

التمرين 1

I/ يقذف جسم صلب (S) كتلته $m=100g$ من سطح الأرض بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$، شدتها $v_0 = 20m.s^{-1}$، وحاملها يصنع زاوية $\alpha = 30°$ مع الأفق.



1/ بتطبيق ن.م.ع عل الجسم، مع إهمال مقاومة الهواء $\vec{f}$ ودافعه ارخميدس $\vec{\pi}$.

أ. ادرس طبيعة الحركة (S) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{k})$ (الشكل1).

ب. أعط معادلة المسار. ما نوعه ؟

2/ احسب كلا من المدى، والذروة اللذين تبلغهما القذيفة بطريقتين :

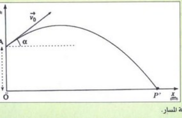
أ- حسابية،

ب- بيانية.

واحسب الزمن اللازم لبلوغ كل من المدى، والذروة.

3/ احسب سرعة الجسم (S) لحظة سقوطه على الأرض.

II/ يعاد قذف الجسم (S) بنفس السرعة السابقة $\vec{v}_0$ على الأرض وبنفس زاوية القذف α لكن من ارتفاع $H=2m$ عن سطح الأرض (الشكل2).



1/ جد معادلة المسار.

2/ احسب قيمة كل من المدى والذروة.

3/ احسب سرعة (S) عندما يسقط على الأرض مباشرة. $g=10m/s^2$.

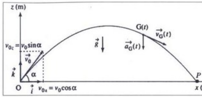
الحل

I/ أ/ دراسة طبيعة حركة (S)

الجملة : هي الجسم S .

المعلم : $(O,\vec{i},\vec{k})$ معلم سطحي ارضي نعتبره عطاليا.

القوى الخارجية : $\vec{P}$ ، $\vec{\pi}$ (تهمل) ، $\vec{f}$.(تهمل).



نطبق القانون الثاني لنيوتن (نظرية مركز العطالة) : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{P} + \vec{\pi} + \vec{F} = m\vec{a}$ والجسم لا يخضع إلا لثقله $(\vec{P})$، وهذا بإهمال مقاومة الهواء $\vec{f}$ ودافعة ارخميدس $\vec{\pi}$، لذا نكتب : $\vec{P} = m\vec{a}$، وبما ان حركة (S) تتم في المستوي (O,x,z)، لذا نسقط العبارة السابقة على المحورين (Ox) و (Oz).

بالإسقاط على (Ox) : $0 = ma_x$

$\boxed{a_x = 0m.s^{-2}}$ فالحركة وفق (Ox) مستقيمة منتظمة.

بالإسقاط على (Oz) : لاحظ ان $\vec{P}$ معاكس للمحور (Oz)،

لذا فإن مسقطه على (Oz) هو : $-mg = ma_z$

إذن ، $\boxed{a_z = -g = Cte}$ فالحركة وفق (Oz) مستقيمة متغيرة بانتظام.

المعادلات الزمنية للحركة :

لدينا $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$ وبما ان $a_x = 0m.s^{-2}$ إذن $\dfrac{dv_x}{dt} = 0$ ومنه ثابت $= v_x$

فالسرعة وفق (Ox) ثابتة وبالتالي $v_x(t) = v_x(t=0)$ اي $v_x = v_{0x}$

من الشكل نجد مركبة السرعة الابتدائية v_{0x} وفق (Ox) ، $\boxed{v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha}$

نعلم ان $v_x = \dfrac{dx}{dt}$، وبالمكاملة ، $x = v_x t + x_0$ حيث x_0 فاصلة المتحرك في اللحظة $t = 0s$، ومن الشكل نجد $x_0 = 0m.s^{-1}$ إذن ، $x = v_0 \cos\alpha t$ ، $x = 20\cos 30° t$

$\boxed{x = 17,32t}$ ......(1) وهي معادلة الفاصلة في اللحظة t .

بالمثل، على المحور (Oz) لدينا $\frac{dv_z}{dt} = -g$ وبالمكاملة : $v_z = -gt + v_{0z}$ حيث v_{0z} السرعة الابتدائية وفق v_z، فنجد $v_z = -gt + v_0 \sin\alpha t$، وبالتعويض : $v_z = -10t + (20\sin 30°)t$

إذن : $\boxed{v_z = -5t + 10}$ ......(2) ، $v_z = \frac{dz}{dt}$ وبالمكاملة : $z = -5t^2 + 10t^2 + z_0$

لكن $z_0 = 0m$ (الانطلاق من المبدا)، وبالتالي : (3)...... $\boxed{z = -5t^2 + 10t}$

نلخص النتائج كما يلي :

$$\begin{cases} a_x = 0m.s^{-2} \\ a_z = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_z = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha)t ......(1) \\ z = \frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t ......(3) \end{cases}$$

معادلة المسار $z = f(x)$

بحذف الزمن t بين المعادلتين (1) و (2) نجد ما يلي.

من (1) : $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$

نعوض في (2) فنجد : $z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$

إذن : $z = \left(\frac{-g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\right)x^2 + (tg\alpha)x$

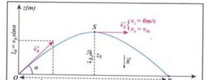
وعندما نعوض بالأعداد : $z = \left(\frac{-10}{2(20)^2(\cos 30°)^2}\right)x^2 + (tg 30°)x$

$$\boxed{z = -0,017x^2 + 0,577x}$$

المسار معادلته من الشكل $z = ax^2 + bx$ فهو إذن قطع مكافئ.

1/2/ تعيين المدى x_p بطريقة حسابية

نعلم أن المدى هو أقصى مسافة أفقية x_p تبلغها القذيفة. لكن أقصى نقطة يبلغها الجسم (S) هي النقطة (p) التي إحداثياها $(x_p, 0)$ أي $z = 0m$، فنضع $z = 0m$ في معادلة المسار لنجد : $x = x_p$.



$$-0,017x^2 + 0,577x = 0 \;;\; x(-0,017 \times 0,577) = 0$$

إما $x = 0m$ (مرفوض)، أو $-0,017x + 0,577 = 0$ إذن $x = \frac{0,577}{0,017}$ ومنه $x = 33,94m$.

$$\boxed{x = x_p \approx 33,94m}$$

أما الزمن اللازم لبلوغ القذيفة مداها، فيكفي أن نعوض عن قيمة x_p في المعادلة (1) :

$t = \frac{x_p}{17,3} = \frac{34}{17,3} = 1,96s$ إذن : $\boxed{t = 1,96s}$

تعيين الذروة z_s بطريقة حسابية

نعلم أن الذروة هي أقصى ارتفاع شاقولي z_s تبلغه القذيفة، والنقطة s هي الذروة.

تعين الذروة بعدة طرق، إحداها نعتبر النقطة s هي نهاية عظمى للدالة $z = f(x)$.

ولإيجاد إحداثيي النهاية العظمى، نضع $\frac{dz}{dx} = 0$ (مشتق z بالنسبة لـ x معدوم).

لدينا : $z = -0,017x^2 + 0,577x$، وبالاشتقاق نجد : $\frac{dz}{dx} = -0,034x + 0,577$

إذن : $-0,034x + 0,577 = 0$ ، ومنه : $x = \frac{0,577}{0,034}$ إذن : $\boxed{x \approx 17m}$

نعوض عن قيمة x في معادلة المسار فنجد : $z = -0,017(17)^2 + 0,577(17)$

والنتيجة : $\boxed{z \approx 4,9m}$.

الطريقة الثانية

عند الذروة : $v_z = 0m.s^{-1}$ (انظر الشكل المقابل)

إذ أن : $\vec{v} = \vec{v}_x$، فلا يوجد مركبة للسرعة اللحظية $\vec{v}$ وفق (Oz).

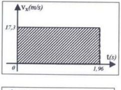
نعوض في المعادلة (3)، لنجد : $-10t + 10 = 0$

إذن : $t = \frac{10}{10}$ ، $t = 1s$ وهو زمن بلوغ القذيفة ذروتها.

ولإيجاد z_s، نعوض عن t في المعادلة (3) :

$z = -5(1)^2 + 10(1)$ ، $\boxed{z = z_s = 5m}$

وهي تقريبا نفس النتيجة التي حسبناها بالطريقة السابقة (والاختلاف البسيط يعود إلى أن الطريقة الأولى تمت فيها بعض التقريبات الحسابية).



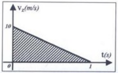
ب/ حساب x_p و z_s بطريقة بيانية

نمثل بيان $v_x(t)$

لدينا : $v_x = 17,3m.s^{-1} = Cte$

نمثلها في المجال الزمني $[0s; 1,96s]$،

حيث $t = 1,96s$ وهو زمن الوصول إلى المدى.



x_p هي مسافة نعينها من مساحة الشكل المظلل

$x_p =$ عدد مساحة المستطيل $= 1,96 \times 17,3 \approx 33,9$ إذن ، $x_p \approx 34m$

نمثل الآن بيان $v_z(t)$ في المجال الزمني $[0s;1s]$

حيث أن $t = 1s$ هو زمن الوصول إلى الذورة.

لدينا ، $v_z = -10t + 10$

$t(s)$	0	1
$v_z\,(m/s)$	10	0

$$z_F = \text{عدد مساحة المثلث} = \frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}$$

$z_s = \dfrac{1 \times 10}{2}$ ، لأن $\boxed{z_s = 5\,m}$ ، وهي تقريبا نفس النتيجة السابقة.

3/ حساب سرعة الجسم لحظة سقوطه على الأرض

نطبق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الوضعين O و P لجملة الجسم ، $E_{\text{نهائية}} = E_{\text{مقدمة}} - E_{\text{مستقبلة}} + E_{\text{ابتدائية}}$

$$E_{c(O)} + W(\vec{P}) - 0 = E_{c(P)} \quad , \quad \frac{1}{2}mv_O^2 + mgz = \frac{1}{2}mv_P^2$$

لكن الارتفاع z بين نقطة القذف O ونقطة السقوط P معدوم، إذن $z = 0m$

ومنه ، $\frac{1}{2}mv_O^2 = \frac{1}{2}mv_P^2$ إذن $v_P = v_O$ وبالتالي ،

$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0$ اي $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$ واخيرا ، $\boxed{v = v_0 = 20\,m.s^{-1}}$

II/ 1/ معادلة المسار

في هذه الحالة الجسم (S) قذف من علو $(2m)$

فلإيجاد معادلة المسار، يجب إجراء نفس الدراسة السابقة كما في السؤال (I-1) مع اختلاف بسيط وهو انه في هذه الحالة $z_0 = 2\,m$ إذن ، $x = 17,3t$

$$z = -5t^2 + 10t + 2 \,......(2)$$

من المعادلة (1) لدينا ، $t = \dfrac{x}{17,3}$ نعوض في (2) فنجد $\boxed{z = -0,017x^2 + 0,577x + 2}$

فالمسار قطع مكافئ.

2/ حساب المدى x'_p

في هذه الحالة الجسم يسقط في النقطة P' التي ترتيبها $z = 0\,m$ ، نعوض في معادلة المسار فنجد ،

$$-0,017x^2 + 0,577x + 2 = 0$$

$$\Delta = (0,577)^2 - 4(-0,017)(2) \approx 0,469$$

$$\sqrt{\Delta} = 0,685$$

• الحل الأول ، $x = \dfrac{-0,577 + 0,685}{2(-0,017)} \approx -3,176\,m$

وهذه النتيجة مرفوضة لأن النقطة P' يجب أن تكون فاصلتها موجبة كما هو واضح في الشكل.

• الحل الثاني ، $x = \dfrac{-0,577 - 0,685}{2(-0,017)}$ ومنه $x \approx 37,1m$ اي $\boxed{x = x'_p \approx 37,1m}$

حساب الذروة z_s

نضع ، $v_z = 0\,m.s^{-1}$ (كما رأينا في السؤال I-1)

فنجد ، $-10t + 10 = 0$ ، $t = 1s$

نعوض في المعادلة (2) فنجد ، $z_s = 7\,m$

3/ حساب سرعة (S) عندما يسقط على الأرض

نطبق قانون انحفاظ الطاقة بين نقطة الانطلاق ونقطة السقوط لجملة الجسم ،

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgz = \frac{1}{2}mv^2$$

هنا $z = 2m$ وبالتالي $v^2 = v_0^2 + 2gz$

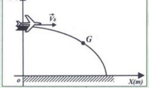
$$v^2 - v_0^2 = 2gz \quad ; \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2gz}$$

عندما نعوض نجد ، $v = \sqrt{(20)^2 + 2(10)(2)}$ اي $v \approx 20,98\,m.s^{-1}$

$$\boxed{v \approx 21\,m.s^{-1}}$$

التمرين 2

طائرة مقنبلة تسير في مسار مستقيم أفقي بسرعة ثابتة تساوي $720km/h$ تترك قذيفة تسقط سقوطا حرا من علو $10km$.



1/ أ/ ما هي قيمة السرعة الابتدائية $\vec{V_0}$ التي انطلقت بها القذيفة وهذا بالنسبة لمعلم سطحي ارضي، نعتبره عطاليا (انظر الشكل).

ب/ ما هي زاوية القذف ؟ حدد قيمة v_{0x} و v_{0z} .

2/ بتطبيق نظرية مركز العطالة على القذيفة، في المعلم السطحي الأرضي، وهذا بإهمال مقاومة الهواء ودافعة أرخميدس.

أ/ أعط معادلات الحركة في هذا المعلم.
ب/ اكتب معادلة مسار القذيفة

3/ باعتبار لحظة انطلاق القذيفة هي مبدأ الأزمنة، حدد لحظة سقوطها على الأرض.

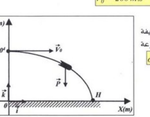
4/ إذا علمت أن القذيفة صوبت نحو هدف أرضي محدد في المكان $8000\,m \le x \le 9000\,m$ ، هل تصيب القذيفة هدفها ؟ برر إجابتك. $g = 10\,m.s^{-2}$.

الحل

1/ أ/ قيمة v_0

إن سرعة القذيفة لحظة تركها تسقط بالنسبة للمعلم العطالي الممثل في الشكل هي نفسها سرعة الطائرة $\vec{v_0}$.

$v_0 = 720\,km.h^{-1} = \frac{720}{3,6}$ ومنه ، $\boxed{v_0 = 200\,m.s^{-1}}$



ب/ زاوية القذف

بالنسبة لمعلم سطحي أرضي، تنطلق القذيفة بسرعة $\vec{v_0}$ أفقية (لأن للقذيفة نفس سرعة ومسار الطائرة قبل القذف). إذن ، $\boxed{\alpha = 0°}$

ج/ تحديد مركبتي $\vec{v_0}$

لدينا ، $\boxed{v_{0x} = v_0 = 200\,m.s^{-1}}$

$\boxed{v_{0z} = 0\,m.s^{-1}}$

2/ أ/ معادلات الحركة

نطبق ن.م.ع على القذيفة ، $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ فينتج ، $\vec{F} + \vec{\pi} + \vec{P} = m\vec{a}$

وبإهمال مقاومة الهواء $\vec{F}$ ودافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ أمام ثقل القذيفة $\vec{P}$ نجد ، $\vec{P} = m\vec{a}$

إذن ، $m\vec{a} = m\vec{g}$ ، $\vec{a} = \vec{g}$

بإسقاط هذه العلاقة على المحورين (Ox) و (Oz) نجد ،

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 m/s^2 \\ a_z = -g \end{cases} \xrightarrow{\text{بالتكامل}} \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_z = -gt + v_{0z} \end{cases} \xrightarrow{\text{بالتكامل}} \begin{cases} x = v_{0x}t + x_0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0 \end{cases}$$

لكن $x_0 = 0\,m$ و $z_0 = 10\,km$ و $v_{0z} = 0\,m.s^{-1}$

$$\begin{cases} a_x = 0\,m.s^{-2} \\ a_z = -g = -10\,m.s^{-2} \end{cases} \to \begin{cases} v_x = v_{0x} = 200\,m.s^{-1} \\ v_z = -10t \end{cases} \to \begin{cases} x = 200t \,......(1) \\ z = -5t^2 + 10000 \,......(2) \end{cases}$$

ب/ معادلة المسار $z = f(x)$

بحذف الزمن بين المعادلتين (1) و(2) نجد ،

من المعادلة (1) ، $t = \frac{x}{200}$ ، نعوض عن t في المعادلة (2) ،

$$z = -5\left(\frac{x}{200}\right)^2 + 10000 \quad ، \quad \boxed{z = -1,25.10^{-4}x^2 + 10^4}$$

3/ لحظة سقوط القذيفة على الأرض

عندما تسقط القذيفة على الأرض في النقطة (H) (انظر الشكل السابق) تكون ترتيبها $z = 0\,m$ ،

نعوض في المعادلة (2) نجد ، $0 = 5t^2 + 10^4 \;;\; 5t^2 = 10^4 \;;\; t = \sqrt{\frac{10^4}{5}} \;;\; \boxed{t = 44,7\,s}$

4/ لكي تصيب القذيفة هدفها، يجب أن يكون مداها (x) يحقق المتراجحة ،

$8000\,m \le x \le 9000\,m$

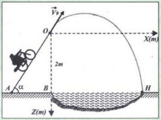
لنعين إذن المدى (x)، وهذا بتعويض $t = 44,7\,s$ في المعادلة (1) فنجد ، $x = 200 \times 44,7$

$\boxed{x = 8940\,m}$

هذه القيمة محتواة في المجال $8000\,m \le x \le 9000\,m$ فالقذيفة تصيب هدفها.

التمرين 3

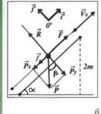
ينطلق دراج من السكون، من نقطة (A) تقع أسفل طريق صاعد (AO) زاوية ميله $\alpha = 30°$.



احسب قيمة $\vec{v_0}$ التي يكتسبها الدراج في النقطة (O) علما بأن القوة المحركة التي انطلق بها الدراج ثابتة تساوي $1000N$ وأن قوة الاحتكاك موجودة فقط على طول الطريق (AO) وشدتها ثابتة $f = 50\,N$. تعطى كتلة الدراج مع دراجته $m=100kg$ ويعطى $g=10SI$.

لما يصل الدراج إلى النقطة (O) يصادف حفرة (BH) مملوءة بالماء. تأكد من أنه يجتاز الحفرة عندما ينطلق بالسرعة $\vec{v_0}$. احسب قيمة أصغر سرعة ممكنة $\vec{v}_{0m}$ تجعل الدراج يجتاز الحفرة. تعطى طول الحفرة $BH = 4\,m$

الحل



1/ حساب v_0

نمثل جملة (الدراج/الدراجة) بنقطة (G) هي مركز عطالة الجملة، ونمثل عليها القوى.

- $\vec{F}$: القوة المحركة،
- $\vec{f}$: قوة الاحتكاك،
- $\vec{R}$: قوة التلامس ،
- $\vec{P}$: ثقل الجملة.

من الأفضل دومًا في المستوى المائل أن نحلل $\vec{P}$ إلى مركبتين $\vec{P}_x$ و $\vec{P}_y$.

- لاحظ أن الزاويتين $\alpha = \beta$ لتعامد أضلاعهما.

لدينا $sin\,\alpha = \frac{P_x}{P}$ ، إذن $\boxed{P_x = P\,sin\,\alpha}$ وكذلك لدينا : $\boxed{P_y = P\,cos\,\alpha}$

- الجملة : (الدراج + الدراجة).
- المعلم : $(O, \vec{i}, \vec{j})$ معلم أرضي، نفرضه عطاليا.
- القوى الخارجية : $\vec{P}$ ، $\vec{F}$ ، $\vec{f}$ ، $\vec{R}$.
- القوى الداخلية : قوى تماسك أجزاء الجملة.

نطبق القانون الثاني لنيوتن : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ، إذن $\vec{R} + \vec{P} + \vec{f} + \vec{F} = m\vec{a}$

بالإسقاط على المعلم $(O, \vec{i})$ نجد : $F - f - P_x = ma_x$

لكن $P_x = mg\,sin\,\alpha$ ، إذن $F - f - mg\,sin\,\alpha = ma_x$

ومنه نجد a_x : $\boxed{a_x = \frac{F - f}{m} - g\,sin\,\alpha}$

نعوض فنجد : $a_x = \frac{100 - 50}{100} - 10\,sin\,30°$ أي : $\boxed{a_x = 4,5\,m.s^{-2}}$

بالإسقاط على $(O, \vec{j})$ نجد : $R - P_{y'} = ma_y$

لكن $a_y = 0\,m.s^{-2}$ لأنه لا توجد حركة وفق المعلم $(O, \vec{j})$

إذن : $P_{y'} = R$ ، $P\,sin\,\alpha = R$

$$a_y = 0\,m.s^{-2}$$

بما أن ثابت $= a_x$ فبالتكامل نجد : $v_x = a_x t + v_{0x}$ مع $v_{0x} = 0\,m.s^{-2}$ ، لأن الجملة انطلقت بدون سرعة ابتدائية، ومنه نجد : $v_x = a_x t ......(1)$

وبالتكامل مرة أخرى نجد : $x = \frac{1}{2}a_x t^2 + x_0$

نعتبر $x_0 = 0\,m$ ، الانطلاق تم من النقطة (A) التي نعتبرها مبدأ للفواصل،

إذن : $x = \frac{1}{2}a_x t^2 ......(2)$

وبحذف الزمن بين المعادلتين (1) و (2) نجد : $t = \frac{v_x}{a_x}$

نعوض في (2) : $x = \frac{1}{2}a\left(\frac{v_x}{a_x}\right)^2$ إذن $v_x^2 = 2a_x x$

عند النقطة (0) لدينا $v_x = v_0$ إذن $v_x^2 = 2a_x x$

في الأخير نكتب : $\boxed{v_x = \sqrt{2a_x x}}$

مع $x = AO$ والذي نحسبه كما يلي : $sin\,\alpha = \frac{OB}{AO}$

إذن : $AO = \frac{OB}{sin\,\alpha}$ ، $AO = \frac{2}{sin\,30}$ ، $AO = 4\,m$

إذن : $v_0 = \sqrt{2 \times 4,5 \times 4}$ ، $\boxed{v_0 = 6\,m.s^{-1}}$

2/ لما يصل الدراج إلى النقطة (0)، يغادرها بسرعة $\vec{v_0}$ نعتبرها سرعة ابتدائية للحركة الموالية التي يكون فيها خاضعا لثقله فقط. وعليه فإن حركته ستكون حركة سقوط حر (قذيفة) بسرعة ابتدائية $\vec{v_0}$ تصنع زاوية هي نفسها زاوية ميل المستوي α.

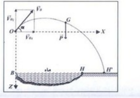
لاحظ أن السرعة $\vec{v_0}$، يجب أن تكون مماسية للمسار المستقيم (AO). ولذا يجب أن تكون زاوية ميلها هي الزاوية α.

$$\vec{v_0}\begin{cases} v_{0x} = v_0\,cos\,\alpha = 6\,cos\,30 = 5,2 m.s^{-1} \\ v_{0z} = v_0\,sin\,\alpha = -6\,sin\,30 = 3 m.s^{-1} \end{cases}$$

لاحظ أن v_{0z} لها إشارة $(-)$ لأن جهتها تعاكس جهة المحور (Oz).

كي نتأكد من أن الدراج يجتاز الحفرة، يجب إثبات أن المدى $x_{H'} \geq BH$

نطبق القانون الثاني لنيوتن : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ، $\vec{P} = m\vec{a}$ مع إهمال مقاومة الهواء ودافعة أرخميدس.



$$\vec{a}\begin{cases}a_x = 0m/s^2\\ a_z = g = 10m/s^2\end{cases} \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \begin{cases}v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha\\ v_z = gt + v_{0z}\end{cases}$$

ومنه نجد :

• شعاع السرعة :
$$\vec{v}\begin{cases}v_x = v_0\cos\alpha = 5,2\,m.s^{-1}\\ v_z = gt - v_0\sin\alpha = 10t - 3\end{cases}$$

• شعاع الموضع :
$$\overrightarrow{OG}\begin{cases}x = v_x t + x_0\\ z = \dfrac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0\end{cases}$$

بما أن الانطلاق تمّ من المبدأ (O)، فإن $x_0 = 0m$ و $z_0 = 0m$ ، لذا نكتب :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OG}\begin{cases}x = v_x t\\ z = \dfrac{1}{2}gt^2 - v_0\sin\alpha t\end{cases}$$ وبالتعويض : $$\vec{r} = \overrightarrow{OG}\begin{cases}x = 5,2t ......(1)\\ z = 5t^2 - 3t ......(2)\end{cases}$$

لإيجاد المدى xH' يمكن استعمال المعادلة (1)، لكن الزمن t مجهول، فلكي نعوضه نلجأ إلى المعادلة (2) مع الانتباه إلى أن لنقطة السقوط H' ترتيبة هي $z = 2m$. إذن : $2 = 5t^2 - 3t$

ومنه : $5t^2 - 3t - 2 = 0$.

لحل هذه المعادلة نحسب المميز Δ : $\Delta = (-3)^2 - 4(-2)(5) = 49$ ، $\sqrt{\Delta} = 7$

حلاّ هذه المعادلة هما :

• الحل الأول هو $t_1 = \dfrac{+3-7}{2(5)}$ ، $\boxed{t_1 = -0,4m}$ وهو حل مرفوض لأن t_1 سالب، على أساس أن لحظة قفز الدراج هي مبدأ الأزمنة $(t_0 = 0s)$ وكل لحظة قبلها تكون حينئذ مرفوضة.

• الحل الآخر هو $\boxed{t_2 = \dfrac{3+7}{2(5)} = 1s}$ وهو حل مقبول.

الآن نعوّض في معادلة x لنجد المدى $x_{H'}$ ، إذن $x = 5,2 \times 1$ ومنه : $\boxed{x = x_{H'} = 5,2m}$

نلاحظ أن $x_{H'} > BH$ فالدراج يجتاز الحفرة.

3/ حساب قيمة أصغر سرعة ابتدائية $\vec{v}_{0m}$

أصغر سرعة v_{0m} تجعل الدراج يجتاز الحفرة هي السرعة التي بها يكون المدى ، $x_{H'} = x_H = 4m$

أما z فهي نفسها ، $z = 2m$.

في هذه الحالة $\vec{v}_0$ مجهولة القيمة. لنعوض في معادلات الحركة :

$$\begin{cases}x = v_0\cos\alpha t \;\; ; \;\; 4 = v_0\cos 30t\\ z = \dfrac{1}{2}gt^2 - v_0\sin\alpha t \;\; ; \;\; 2 = 5t^2 - v_0\sin 30t\end{cases}$$

$$\begin{cases}4 = v_0 \times 0,866t ......(3)\\ 2 = 5t^2 - 0,5v_0 t ......(4)\end{cases}$$

لحساب v_0 يجب حذف الزمن من جملة المعادلتين :

من المعادلة (3) لدينا : $t = \dfrac{4}{v_0 \times 0,866}$ ، إذن : $t = \dfrac{4,62}{v_0}$

نعوض في (4) فنجد : $2 = 5\left(\dfrac{4,62}{v_0}\right)^2 - 0,5v_0\left(\dfrac{4,62}{v_0}\right)$

$$2 = \frac{106,7}{v_0} - 2,31 \;\; ; \;\; v_0 = \sqrt{\frac{106,7}{4,31}}$$

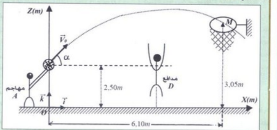
$$\boxed{v_0 = v_{0min} \approx 4,98m.s^{-1}}$$

لاحظ أن المتحرك لو ينطلق من النقطة (O) بسرعة $\vec{v}_0$ قيمتها أصغر من $4,6\,m.s^{-1}$ فسيسقط في الحفرة ... مسكين !

التمرين 4

نهدف إلى دراسة حركة ومسار مركز عطالة كرة سلة، يقذفها لاعب مهاجم (A)، نحو حلقة السلة، والتي يحاول أن يعترضها لاعب مدافع (D).

نفرض أن المهاجم قذف الكرة من نقطة (H)، ترتفع عن سطح الأرض ارتفاعا $z_H = 2,50\,m$ ، وسرعة القذف هي $\vec{v}_0$ اما زاويته فهي $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{4}$، والحركة تتم في المستوي الشاقولي $(O, \vec{i}, \vec{k})$ والممثل في الشكل المقابل :



1/ ادرس حركة مركز عطالة الكرة وجد معادلة المسار بدلالة الوسيط (v_0).

يؤخذ $g = 10\,m.s^{-2}$ ونهمل مقاومة الهواء وحركة دوران كرة السلة.

ب/ احسب قيمة السرعة الابتدائية $\vec{v}_0$ التي تسمح لكرة السلة بالمرور من مركز حلقة (M) (استعمل معطيات الشكل).

2/ نفترض أن المدافع (D) كان يبعد بمسافة أفقية تساوي $1,00m$ عن المهاجم لحظة قذفه الكرة، فقفز شاقوليا نحو الأعلى ليعترض الكرة، فبلغت رؤوس أصابعه علوا $z = 3,20\,m$ (انظر الشكل).

أ/ في هذه الحالة، بيّن أن المدافع لا يستطيع لمس الكرة.

ب/ كم تكون أقصى مسافة أفقية بين المدافع والمهاجم، حتى يلمس كرة السلة ؟ مع افتراض أنه يقفز العلو $3,20\,m$.

يعطى نصف قطر كرة السلة $R = 12,5\,cm$.

الحل

1/ أ/ دراسة حركة مركز عطالة الكرة

- الجملة : الكرة.
- المعلم : $(O, \vec{i}, \vec{k})$ معلما أرضيا، نعتبره غاليليا.
- القوى الخارجية : قوة الثقل $\vec{P}$، ونهمل كلا من قوة احتكاك الهواء $\vec{f}$ ودافعة أرخميدس $\vec{\pi}$.
- القوى الداخلية : قوى تماسك أجزاء الجملة.

نطبق القانون الثاني لنيوتن على مركز عطالة الكرة (G) : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ، $\vec{P} = m\vec{a}$

إذن : $m\vec{g} = m\vec{a}$ ، ومنه $\boxed{\vec{g} = \vec{a}}$

قصد السهولة نستعمل هذا الجدول :

	على المحور (Ox)	على المحور (Oz)
التسارع $\vec{a}$	$0\,m.s^{-2}$	$-g = -10\,m.s^{-2}$
السرعة الابتدائية $\vec{v}_0$	$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$	$v_{0z} = v_0 \sin\alpha$
السرعة اللحظية $\vec{v}$	$v_x = v_0 \cos\alpha\, t$	$v_z = -gt + v_{0z}$
شعاع الموضع $\overrightarrow{OG}$ المعادلات الزمنية	$x = v_x t + (x_0 = 0)$ $x = (v_0 \cos\alpha) t \ldots (1)$	$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z} t + z_0$ $z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha) t + z_0 \ldots (2)$

معادلة المسار

نحذف الزمن بين معادلتي x و z

لدينا : $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$ ، نعوض في معادلة z فنجد :

$$z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha} + z_0$$

$$\boxed{z = -\left(\frac{-g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\right) x^2 + (tg\alpha) x + z_0}$$

عدديا، لدينا $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ، $g = 10\,m.s^{-2}$ ، $z_0 = 2,5\,m$

نعوض فنجد : $$z = -\left(\frac{-10}{2v_0^2 \cos^2 \frac{\pi}{4}}\right) x^2 + \left(tg\,\frac{\pi}{4}\right) x + 2,50$$

إذن : $$\boxed{z = \frac{-10}{v_0^2} x^2 + x + 2,50}$$

وهي معادلة مسار مركز عطالة الكرة بدلالة الوسيط (V_0)

ب/ حساب v_0

عندما يمر مركز عطالة كرة السلة من النقطة (M) مركز الحلقة فهذا يعني أن إحداثيي الكرة هما نفس النقطة M وهما $(6,10\,m\ ;\ 3,05\,m)$.

إذن، نعوض في معادلة المسار بـ $x = 6,10\,m$ و $z = 3,05\,m$ فنجد :

$$3,05 = \frac{-10}{v_0^2}(6,10)^2 + 6,10 + 2,5 \quad ، \quad -5,55 = \frac{-10}{v_0^2}(6,10)^2$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{10(6,10)^2}{5,55}} \ ; \ \boxed{v_0 = 8,19\,m}$$

2/ أ/ إثبات أن المدافع لا يستطيع لمس كرة السلة

حتى يستطيع المدافع لمس الكرة وإبعادها عن مسارها الطبيعي (القطع المكافئ) $(\widehat{HM})$. يجب أن يقفز في الوقت المناسب ومن المكان المناسب. وهنا إحداثيات المدافع هي : $x_D = 1,00m$ ، $z_D = 3,20\,m$.

لنعوض عن قيمة $x_D = 1m$ في معادلة المسار، فإذا وجدنا $z > z_D$ قلنا إن الكرة تمر من نقطة تقع أعلى النقطة التي يصلها المدافع.

لدينا : $v_0 = 8,19m.s^{-1}$ ، $x = 1,00\,m$ ، نعوض في معادلة المسار فنجد :

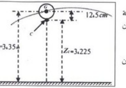
$$z = \frac{-10}{(8,19)^2}(1)^2 + 1 + 2,5 \ ; \ \boxed{z = 3,35m}$$

فمركز عطالة الكرة (G) يمر من علو $z_G = 3,35\,m$، أما أسفل نقطة (C) من محيط كرة السلة، فتكون على ارتفاع $z_C = 3,35 - R$

إذن : $z_C = 3,35 - 0,125$ ، ومنه نجد : $z_C = 3,255\,m$

بينما المدافع أثناء قفزه وصلت رؤوس أصابعه إلى علو $z_D = 3,20\,m$

و بما أن $z_D > z_C$ فالمدافع لا يستطيع لمس الكرة (انظر الشكل المقابل).



ب/ حساب أقصى مسافة أفقية

في هذه الحالة نفترض أن $x_D \neq 1,00\,m$ فهي مجهولة ونريد تعيينها. فلكي يلمس المدافع (D) الكرة يجب أن تمر النقطة (C) من الكرة من الارتفاع ،

$$z \le z' = 3,2\,m$$

أما مركز عطالة كرة السلة، فيجب أن يمر من نقطة ارتفاعها $z = 3,325m$ ،

$$z = 3,2 + R \;;\; z = 3,2 + 0,125$$

إذن، نعوض عن $z = 3,325m$ في معادلة مسار مركز عطالة الكرة وهي ،

$z = \dfrac{-10}{v_0^2}x^2 + x + 2,5$ مع $v_0 = 8,10\,m.s^{-1}$ التي حسبناها سابقا

$$3,325 = \frac{-10}{(8,19)^2}x^2 + x + 2,5$$

$$-0,149x^2 + x + 0,825 = 0$$

$$0,149x^2 - x + 0,825 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(0,149)(0,825) = 0,5083 \;;\; \sqrt{\Delta} = 0,173$$

فحلاً هذه المعادلة هما ، $\begin{cases} x \approx 5,75m \\ x \approx 0,963m \end{cases}$

إذن، يمكن للمدافع اعتراض كرة السلة في الحالتين التاليتين ،

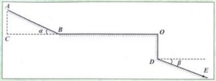
- 1• عندما يكون على بعد $x = x_D = 0,963\,m$ من اللاعب المهاجم.
- 2• عندما يكون على بعد $x = x_D = 5,75\,m$ من اللاعب المهاجم.

ملاحظة

- في الحالة 1 يكون المدافع قد اعترض الكرة في حالة صعودها، وهذا مسموح به حسب قواعد لعبة كرة السلة.
- أما في الحالة 2 فيكون المدافع قد اعترض الكرة في حالة هبوطها، وهذا مرفوض حسب قواعد لعبة كرة السلة.

التمرين 1

طريق ثلجي يمكن تجزئته حسب الشكل المرفق.
انطلق متزحلق من أعلى قمة (A) ومن السكون، فإذا أهملنا مقاومة الهواء والاحتكاك وافترضنا أن كتلة المتزحلق بما فيها الزلاجات تساوي m وأن $AB=90m$ ، $AC=45m$ ، $OD=5,25m$ ، $g=10m/s^2$ ، $tg\beta=0,80$.



1/ ما طبيعة الحركة خلال قطع المسافة (AB)؟ ما سرعته حينئذ ؟ احسب v_B.

2/ أ/ ما طبيعة الحركة خلال قطع المسافة (BO) ؟

ب/ أي المبادئ تحقق ؟

ج/ هل يمكن اعتبار المتزحلق جملة شبه معزولة ميكانيكيا على طول المسار الأفقي (BO) ؟

3/ لما يصل المتزحلق إلى النقطة O ، أي طريق يسلكه ؟ دعم إجابتك بالمعادلات. احسب بعد النقطة E التي يسقط فيها عن النقطة D. كم تكون سرعته في النقطة E (نقطة السقوط) ؟

الحل

1/ طبيعة حركة المتزحلق على طول الطريق المائل (AB)

- الجملة ، المتزحلق وزلاجته.
- المعلم ، $(O_1, \vec{i}_1)$ سطحي أرضي نفترضه عطاليا.
- القوى الخارجية ، $\vec{P}$ ، $\vec{R}_1$.
- القوى الداخلية ، لم تمثل.

نطبق القانون الثاني لنيوتن على مركز عطالة الجملة (G) (الشكل 1) ،

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} \quad ، \quad \vec{P} + \vec{R}_1 = m\vec{a}$$

بالإسقاط على معلم الحركة $(O_1, \vec{i}_1)$ نجد ، $P_x = ma$

لكن ، $P_x = P\sin\alpha$ ، إذن $P\sin\alpha = ma$ ومنه ، $mg\sin\alpha = ma$

إذن ، $\boxed{a = g\sin\alpha}$ مع ، g ثابت و $\sin\alpha$ = ثابت

إذن ، a = ثابت ، فالحركة مستقيمة متغيرة بانتظام على طول المسار (AB).

قيمة التسارع (a)

لدينا ، $a = g\sin\alpha$ مع $\sin\alpha = \frac{AC}{AB}$ وبالتالي ، $a = g\frac{AC}{AB}$

نعوض فنجد ، $a = 10 \times \frac{45}{90}$ ، إذن ، $\boxed{a = 5\, m.s^{-2}}$

حساب v_B

نطبق مبدأ انحفاظ الطاقة على جملة الدراج ودراجته بين الموضعين (A) و (B) ؛

$$E_{\text{نهائية}} = E_{\text{ابتدائية}} + E_{\text{مستقبلة}} - E_{\text{مقدمة}}$$

$$E_{c(A)} + W(\vec{P}) + W(\vec{R}) = E_{c(B)} \quad \text{اي} \quad \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh - 0 = \frac{1}{2}mv_B^2$$

لاحظ ان $W_{(\vec{R})} = 0J$ لأن $\vec{R}$ عمودي على الانتقال $\overline{AB}$.

كما ان $h = AC$ و $v_A = 0\, m.s^{-1}$ لأن الانطلاق تم من السكون بالنسبة لمعلم الحركة، إذن ؛

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \; ; \; \boxed{v_B = \sqrt{2g[AC]}}$$

بالتعويض نجد ، $v_B = \sqrt{2 \times 10 \times 45}$ اي ، $\boxed{v_B = 30\, m.s^{-1}}$

ملاحظة هامة

لو اعتبرنا الجملة المدروسة هي (العربة + الأرض) لوجب إدخال الطاقة الكامنة الثقالية E_{pp}، وفي هذه الحالة تعتبر الأرض تابعة للجملة، وبالتالي تكون الطاقة المستقبلة معدومة. إذن ؛

$$E_{c(A)} + E_{pp(A)} + W(\vec{R}) = E_{c(B)} + E_{pp(B)} \quad \text{اي} \quad \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh + 0 = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0$$

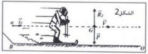
$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$ وهو ما وجد سابقا.

2/ أ/ طبيعة الحركة في المسار الأفقي (BO)

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على جملة المتزحلق وزلاجته (انظر الشكل 2) ؛ $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{P} + \vec{R}_2 = m\vec{a}$$

بنفس الطريقة السابقة نحدد معلم الحركة الجديد $(O_2, \vec{i}_2)$ الموجه بجهة الحركة، وبالإسقاط على معلم الحركة ؛ $0 + 0 = ma$ اي ، $\boxed{a = 0\, m.s^{-2}}$. فالحركة وفق المسار الأفقي (BO) مستقيمة منتظمة (نستبعد أن يكون الجسم ساكنا ، لأن له سرعة ابتدائية $\vec{v}_B$.



ب/ المبدأ الذي نحقق على طول المسار (BO)

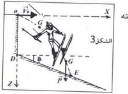
وجدنا $a = 0\, m.s^{-2}$

ومنه ، $\boxed{\sum \vec{F} = \vec{0}}$ وهذا هو مبدأ العطالة.

ج/ يمكن اعتبار المتزحلق جملة شبه معزولة ميكانيكيا على طول المسار (BO) لأنه يحقق الشرط $\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}}$

3/ حركة المتزحلق ابتداء من النقطة O

يصل المتزحلق إلى النقطة O بسرعة $v_0 = v_B = 30\, m.s^{-1}$ لأن الحركة وفق (BO) مستقيمة منتظمة فهي ثابتة السرعة. لذا يغادر المتزحلق النقطة O بسرعة $\vec{v}_B$ نعتبرها ابتدائية $v_0 = 30\, m.s^{-1}$ ويكون في حركته هذه خاضعا لثقله فقط، وتتم الحركة في المستوي المحدد بالمحورين (Ox) و (Oz).



نطبق القانون الثاني لنيوتن على جملة المتزحلق وزلاجته (الشكل 3) ؛ $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

الجملة خاضعة لثقلها $\vec{P}$ وهذا بإهمال قوة احتكاك الهواء $\vec{f}$ ودافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ ، إذن ؛ $\vec{P} = m\vec{a}$.

وبالتالي ، $m\vec{a} = m\vec{g}$ ومنه ، $\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$.

تسهل الدراسة باستعمال الجدول التالي ؛

	على المحور (Ox)	على المحور (Oz)
التسارع $\vec{a}$	$a_X = 0\, m.s^{-2}$	$a_z = g = 10\, m.s^{-2}$
السرعة الابتدائية $\vec{v}_0$	$v_{0x} = v_0 = 30\, m.s^{-1}$	$v_{0z} = 0\, m.s^{-1}$
السرعة اللحظية $\vec{v}$	$v_x = v_0 = 30\, m.s^{-1}$	$v_z = gt = 10t$
شعاع الموضع $\overline{OG}$	$x = v_0 t + (x_0 = 0)$	$z = \frac{1}{2}gt^2 + (z_0 = 0)$
المعادلات الزمنية للحركة	$x = 30t$	$z = 5t^2$

معادلة المسار

لكي نعين المسار الذي يسلكه المتحرك يجب تحديد معادلة المسار، لذلك نحذف الزمن بين x و z ،

فمن معادلة x نكتب ، $t = \frac{x}{30}$ ونعوض في معادلة z فنجد ؛ $z = 5\left(\frac{x}{30}\right)^2$ ، $z = \frac{5}{900}x^2$

ومنه ، $\boxed{z = \frac{x^2}{180}}$ ، فالمسار (OE) قطع مكافئ.

حساب البعد (DE)

باعتبار ان النقطة E هي نقطة سقوط المتزحلق على الطريق (DE) المائل بزاوية β بالنسبة للأفق. فهي إذن نقطة تقاطع القطع المكافئ (OE) مع المستقيم (DE).

لنشكل معادلة المستقيم (DE) بالنسبة للمعلم السابق ، $z = (tg\beta)x + OD$

إذن، $z = 0,8x + 5,25$

عندما يتقاطع المستقيم مع القطع المكافئ يتحقق : z (المستقيم) $= z$ (القطع المكافئ)

ومنه، $x^2 - 144x - 945 = 0$

حل هذه المعادلة يستدعي تعيين المميز، $\Delta' = (-72)^2 - 1(-945) = 6129$

$\sqrt{\Delta'} = 78,3$

للمعادلتين جذران هما : $\boxed{x_1 = 150,3\,m}$ و $\boxed{x_2 = -6,3\,m}$

يرفض الحل x_2 لأن موضع النقطة E موجود في الجهة الموجبة للمحور، لذا يجب أن تكون فاصلة النقطة موجبة، ومنه نقبل الحل الأول : $\boxed{x_1 = x_E = 150,3\,m}$.

لتعيين (DE) نستعمل المثلث (DHE) الموضح في الشكل المقابل :

لدينا، $\cos\beta = \dfrac{DH}{DE}$، إذن، $\cos\beta = \dfrac{x}{DE}$، ومنه، $DE = \dfrac{x_E}{\cos\beta}$

ولدينا، $tg\beta = 0,80$، إذن، $\beta \approx 38,7°$، ومنه، $\cos\beta \approx 0,78$

إذن، $DE = \dfrac{150,3}{0,78}$، $\boxed{DE \approx 192,6\,m}$

تعيين v_E

نطبق مبدأ انحفاظ الطاقة لجملة الجسم :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_E^2$$

$\boxed{v_E = \sqrt{v_0^2 + 2gh}}$ مع $h = z_E$

z_E هي ترتيبة نقطة السقوط E ونعينها كالتالي :

يكفي التعويض عن x_E في معادلة المستقيم أو معادلة القطع المكافئ :

$$z_E = \frac{1}{180}(150,3)^2 = 125,5\,m$$

إذن، $v_E = \sqrt{(30)^2 + 2(10)(125,5)}$، $\boxed{v_E = 58,4\,m.s^{-1}}$

التمرين 2

I/ عربة صغيرة ذات كتلة m يمكنها أن تتحرك بلا احتكاك على خط الميل الأعظمي لمستو مائل زاوية ميله φ يمكن أن تحدد حركة العربة بالإحداثي x على المحور (Ox).

1/ تدفع العربة نحو الأعلى بسرعة $\vec{v}_0$ انطلاقا من المبدأ (O).

حدد قيمة السرعة $\vec{v}_0$ التي من أجلها تصل العربة إلى أقصى نقطة فاصلتها $x = l$ حيث x هو إحداثي مركز عطالة العربة منسوبا إلى O (في اللحظة $t = 0s$ كان $x = 0\,m$) وهذا باستعمال القانون الثاني لنيوتن.

2/ أعط معادلة الحركة $x = f(t)$، ثم احسب الزمن المستغرق منسوبا إلى لحظة البدء لرجوع العربة إلى النقطة O، $m = 4kg$ ، $g = 10N/kg$ ، $l = 40m$ ، $\sin\varphi = 0,04$.

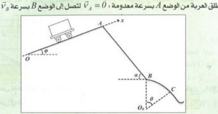
II/ توضع الآن العربة في النقطة A وبإمكانها أن تقطع المسار AC الذي يمكن تجزئته إلى ما يلي :

الجزء طوله d نعتبره ممرا مستقيما يميل عن الأفق بزاوية α.

أما الجزء $\widehat{BC}$ فهو دائري الشكل مركزه O_0 ونصف قطره r أفقي عند B .

لتسهيل الحسابات نعتبر أن العربة جسم نقطي، وأن المستوى AB هو مستو خشن قوة الاحتكاك فيه $\vec{f}$ ثابتة. أما الجزء $\widehat{BC}$ فهو زلق، لذا فقوى الاحتكاك به مهملة، كما تهمل مقاومة الهواء.

1/ تنطلق العربة من الوضع A بسرعة معدومة، $\vec{v}_A = \vec{0}$ لتصل إلى الوضع B بسرعة $\vec{v}_B$.



أعط عبارة شدة قوة الاحتكاك f بدلالة : m، g، d، α و v_B . استنتج قيمتها إذا علمت أن :

$v_B = 18m.s^{-1}$ ، $d = 500m$ ، $g = 10SI$ ، $r = 100m$ ، $m = 4kg$ ، $\alpha = 10°$.

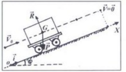
2/ أ/ جد عبارة السرعة v_C في الوضع C المحدد بالزاوية θ وذلك بدلالة : v_B، g، r، θ .

ب- بالمثل، جد عبارة رد الفعل $\vec{R}$ التي تؤثر بها الطريق على الغربة عند النقطة C .

ج- جد القيمة العددية للزاوية θ التي من أجلها تغادر العربة الطريق الدائري.

الحل

1/ حساب v_0



قبل أن نطبق القانون الثاني لنيوتن نحدد ما يلي :

- الجملة : العربة.
- المعلم : $(O,\vec{i})$ معلم أرضي نفرضه عطاليا.
- القوى الخارجية : $\vec{R}$ ، $\vec{p}$.
- القوى الداخلية : قوى تماسك أجزاء الجملة.

نطبق القانون الثاني لنيوتن : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ فنجد، $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

بالإسقاط على المعلم $(O,\vec{i})$: $-P\sin\varphi = ma$

$-mg\sin\varphi = ma$

ومنه ، $\boxed{a=-g\sin\varphi}$ ، وبالتعويض ، $a=-10\times 0,04$ اي ، $\boxed{a=-0,4m.s^{-2}}$

لكن $a=\frac{dv}{dt}$ ، فبالتكامل نجد ، $v=at+v_0$

كما ان $x=\frac{dv}{dt}$ ، وبالتكامل نجد ، $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$

لدينا ، $x_0=0m$ لأن الانطلاق تم من النقطة O وهي مبدا الفواصل، إذن ، $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t$

من معادلة السرعة v يمكن أن نستخرج ، $t=\frac{v-v_0}{a}$ ، نعوض في معادلة x لنجد ،

$$x=\frac{1}{2}a\left(\frac{v-v_0}{a}\right)^2+v_0\left(\frac{v-v_0}{a}\right)=\frac{v-v_0}{a}\left[\frac{v-v_0}{2}+v_0\right]$$

$$x=\frac{v-v_0}{a}\left[\frac{v-v_0}{2}\right]$$

$$\boxed{v^2-v_0^2=2ax}$$

نعلم ان اقصى نقطة تصلها العربة هي النقطة التي فاصلتها $x=40m$ وفيها تكون $v=0m.s^{-1}$.

عندما نعوض في المعادلة نجد ، $0-v_0^2=2(-0,4)40$ إذن ، $\boxed{v_0\approx 5,7m.s^{-1}}$

2/ المعادلة الزمنية للحركة

لدينا ، $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t$ إذن ، $x=\frac{1}{2}(0,4)t^2+5,7t$ ومنه ، $\boxed{x=-0,2t^2+5,7t}$

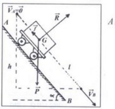
زمن الصعود والهبوط

تنطلق العربة من المبدا O الذي فاصلته $x=0m$ وتعود إلى نفس الفاصلة بعد زمن t نحسبه كالتالي ،

نضع $x=0m$ في معادلة الحركة فنجد ، $0=-0,2t^2+5,7t$ اي ، $t(-0,2t+5,7)=0$

فإما $t=0s$ وهي لحظة الانطلاق، او $-0,2t+5,7=0$ إذن $t=\frac{5,7}{0,2}$ ومنه ، $\boxed{t=28,5s}$

II/ 1/ عبارة f



- يمكن استعمال مبدا انحفاظ الطاقة لجملة العربة بين الموضعين A و B (الشكل المقابل) ، $E_{\text{نهائية}}=E_{\text{ابتدائية}}+E_{\text{مقدمة}}-E_{\text{مستقبلة}}$

إذن ، $E_{c(A)}+W(\vec{P})+W(\vec{R})+W(\vec{f})=E_{c(B)}$

$$\frac{1}{2}mv_A^2+W(\vec{P})+W(\vec{R})+W(\vec{f})=\frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\frac{1}{2}m(0)^2+mgh+0-f\,d=\frac{1}{2}mv_B^2$$

$\frac{1}{2}mv_B^2=mgh-f\,d$ مع $h=d\sin\alpha$

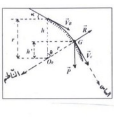
إذن ، $\frac{1}{2}mv_B^2=mgd\sin\alpha-f\,d$

$$f\,d=mds\left(g\sin\alpha-\frac{{v_B}^2}{2}\right)$$

في الأخير نكتب ، $\boxed{f=m\left(g\sin\alpha-\frac{v_B^2}{2d}\right)}$ وبالتعويض ، $f=4\left(10\sin 10^\circ-\frac{(18)^2}{2(v)}\right)$

$$\boxed{f\approx 5,6N}$$

2/ أ/ عبارة v_C



بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على جملة العربة بين الوضعين B و C (انظر الشكل المقابل) نكتب ،

$$E_{c(B)}+W(\vec{P})+W(\vec{R})=E_{c(C)}$$

مع ملاحظة عدم وجود احتكاك في هذا المسار، لذا نكتب ،

$$W(\vec{R})=0J$$

ومنه ، $\frac{1}{2}mv_B^2+mgh+0=\frac{1}{2}mv_C^2$

إذن ، $v_B^2+2gh=v_C^2\ ;\ v_C=\sqrt{v_B^2+2gh}$

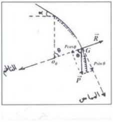
لنعين عبارة h

لدينا ، $h=r-h'$ مع $h'=r\cos\theta$

إذن $h=r-r\cos\theta$ اي $h=r(1-\cos\theta)$ نعوّض في عبارة v_C السرعة السابقة فنجد ،

$$\boxed{v_C=\sqrt{v_B^2+2gr(1-\cos\theta)}}$$

ب/ عبارة شدة رد الفعل $\vec{R}$



بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على جملة العربة ،

$\sum\vec{F}=m\vec{a}$ ، إذن $\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}$

ننبه إلى أنه إذا كان المسار دائريا، يفضل أن نستعمل معلم فريني (محور مماسي للمسار ومحور ناظمي، كما هو موضح في الشكل المقابل).

$\vec{R}$ محمول كله على الناظم، لذا يتم إسقاط العلاقة السابقة على الناظم فقط ، $-R+P\cos\theta=ma_N$

$$-R=m(a_N+g\cos\theta)......(*)$$

لكن a_N في الوضع C يعطى بالعبارة $a_N = \frac{v_C^2}{r}$

ومع التعويض بعبارة v_C السابقة نجد :

$$a_N = \frac{v_B^2 + 2gr(1-\cos\theta)}{r} \text{ ، اي } a_N = \frac{v_B^2}{r} + 2gr(1-\cos\theta)$$

نعوض في المعادلة (*) لنجد : $-R = m\left[\frac{v_B^2}{r} + 2gr(1-\cos\theta) + g\cos\theta\right]$

$$\boxed{R = m\left[3g\cos\theta - 2g - \frac{v_B^2}{r}\right]}$$

ج/ إيجاد زاوية الخروج θ

عندما تغادر العربة المسار الدائري تصبح غير مستندة عليه وهذا معناه : $R = 0N$

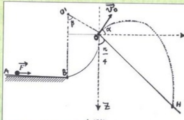
إذن ، $0 = m\left(3g\cos\theta - 2g - \frac{v_B^2}{r}\right)$ وبالتالي ، $\boxed{\cos\theta = \frac{2}{3} + \frac{v_B^2}{3gr}}$

بالتعويض نجد ، $\cos\theta = \frac{2}{3} + \frac{(18)^2}{3(10)(100)}$ إذن ، $\cos\theta = 0,774$

ومنه : $\boxed{\theta = 39,3°}$

التمرين 3*

جسم نقطي كتلته $m=0,5kg$ يتحرك على مسار ABO وواقع في مستو شاقولي، يهمل فيه الاحتكاك. الجزء AB مستقيم وأفقي، أم الجزء BO فهو قوس من دائرة مركزها O ونصف قطرها $r = 1m$. هذا القوس يحصر زاوية $\beta = 60°$ (انظر الشكل).



الشكل 1

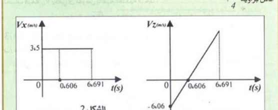
1/ يؤثر على الجسم بقوة ثابتة $\vec{F}$ على طول المسار AB فقط.
ادرس طبيعة حركة الجسم على طول المسار AB ثم جد عبارة v_B في الوضع B بدلالة l ، m ، F علما بان $v_A = 0m.s^{-1}$ ، $AB = l = 4m$ ، $F = 4N$ ثم احسب قيمتها.
(خذ $g = 10m.s^{-2}$.

2/ تنزع القوة $\vec{F}$ ابتداء من النقطة B . عين عبارة v_0 في النقطة O بسرعة $\vec{v_0}$، فيصبح خاضعا لثقله فقط.

ا/ بين أن زاوية القذف $\alpha = \beta$.

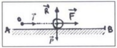
ب/ اكتب معادلة مساره بالنسبة للمعلم المحدد في الشكل، الذي نفترضه عطاليا.

ج/ إذا علمت أن v_x و v_z هما مركبتا سرعة الجسم على طول مساره، نمثل مخططيهما في الشكل 2 ابتداء من لحظة قذفه بالسرعة $\vec{v_0}$ حتى لحظة سقوطه. استنتج أعلى ارتفاع يبلغه الجسم (الذروة) بيانيا. احسب طول القطعة OH حيث H نقطة سقوط الجسم على المستوي المائل بزاوية $\frac{\pi}{4}$.



الشكل 2

الحل



سنقوم بحل هذا التمرين حلا مختصرا.

1/ طبيعة الحركة AB

نطبق القانون الثاني لنيوتن

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a} \text{ ، } \sum\vec{F} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على $(O, \vec{i})$، $F = ma$ ومنه ، $\boxed{a = \frac{F}{m}}$ اي ، $a = \frac{4}{0,5}$ إذن ، $\boxed{a = 8m.s^{-2}}$

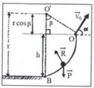
نلاحظ أن ثابت $= a$ ، فالحركة مستقيمة متغيرة بانتظام.

عبارة v_B

يمكن الاستفادة من المعادلة التي استنتجناها في التمرين السابق وهي ، $v^2 - v_0^2 = 2ax$

هنا ، $v_B^2 - v_A^2 = 2ax$ مع $v_A = 0m.s^{-1}$

إذن $\boxed{v_B = \sqrt{2ax}}$ ، وبالتعويض نجد : $v_B = \sqrt{2 \times 8 \times 4}$ ، $\boxed{v_B = 8\, m.s^{-1}}$



2/ عبارة v_0

نطبق مبدأ انحفاظ الطاقة على جملة الكرية بين B و O :

$$E_{c(B)} + W(\vec{P}) + W(\vec{R}) = E_{c(O)}$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - mgh + 0 = \frac{1}{2} m v_O^2$$

إذن : $v_0 = \sqrt{v_B^2 - 2gh}$ مع $h = r - r\cos\beta$

ومنه : $h = r(1 - \cos\beta)$

نعوض في v_0 فنجد : $\boxed{v_0 = \sqrt{v_B^2 - 2gt(1 - \cos\beta)}}$

وهي عبارة v_0 .

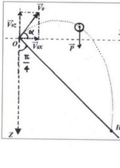
لحساب قيمة v_0 يكفي أن نعوض بالقيم العددية فنجد :

$$v_0 = \sqrt{8^2 - 2 \times 10 \times 1(1 - \cos 60°)} = \sqrt{54} = 7{,}4 m.s^{-1}$$

3/ أ/ الزاويتان α و β مستويتان لتعامد ضلعيهما مثنى مثنى

ب/ معادلة المسار

نطبق القانون الثاني لنيوتن فنجد $\vec{P} = m\vec{a}$ إذن $m\vec{g} = m\vec{a}$ ، $\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$



نلخص الدراسة في جدول :

	على المحور (Ox)	على المحور (Oz)
$\vec{v}_0$	$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$	$v_{0z} = v_0 \sin\alpha$
القوة $\vec{F}$	0	$+P$
التسارع $\vec{a}$	$a_x = 0\, m.s^{-2}$	$a_z = +g = 10\, m.s^{-2}$
المعادلات الزمنية للحركة	$x = (v_0 \cos\alpha)\, t$	$z = \frac{1}{2} g t^2 - (v_0 \sin\alpha) t$

ومنه معادلة المسار : $\boxed{z = \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 - (tg\alpha) x}$

ج/ حساب الذروة z_C

z_C عدديا = مساحة مخطط v_z في المجال $[0s\,;\,0{,}606\,s]$

$$z_C = \frac{0{,}606 \times 6{,}06}{2} \quad , \quad \boxed{z_C = 1{,}84\, m}$$

حساب المدى OH

لدينا :

$$x_P = OH \cos\frac{\pi}{4} \;\; ; \;\; \cos\frac{\pi}{4} = \frac{x_P}{OH}$$

$$\boxed{x_P = 0{,}707\,[OH]}$$

لكن : $[OH]$ عدديا = مساحة v_z في المجال $[0s\,;\,0{,}691s]$

$$[OH] = 3{,}5 \times 6{,}691 = 23{,}2\, m$$

ومنه : $x_P = 0{,}707 \times 23{,}2$

$$\boxed{x_P = 16{,}4\, m}$$

مراقبة تطور جملة كيميائية خلال تحول كيميائي

الوحدة 1 ■ التطور التلقائي لجملة كيميائية- الأعمدة

كل جملة كيميائية تتطوّر تلقائيا نحو حالة توازنها

1- تذكرة

كسر التفاعل Q_r

يتميّز التفاعل $\alpha A + \beta B = \gamma C + \delta D$ في وسط متجانس بكسر التفاعل

$$Q_r = \frac{[C]^\gamma [D]^\delta}{[A]^\alpha [B]^\beta}$$

ثابت التوازن K ، $K = \dfrac{[C]_f^\gamma [D]_f^\delta}{[A]_f^\alpha [B]_f^\beta}$.

2- مقياس التطوّر التلقائي

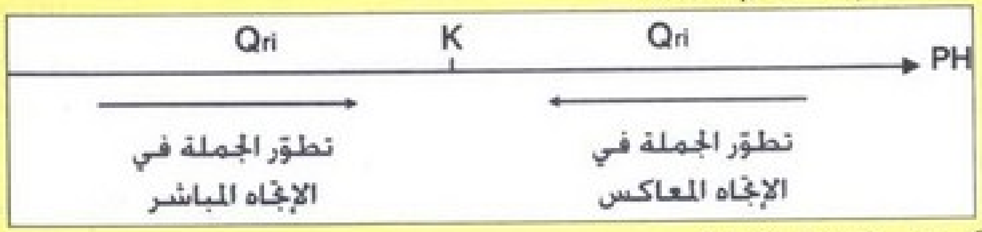
كيف يمكن معرفة اتجاه تطوّر التفاعل المتوازن السابق ؟ هل في الاتجاه المباشر $\alpha A + \beta B \rightarrow \gamma C + \delta D$ أم في الاتجاه المعاكس $\gamma C + \delta D \rightarrow \alpha A + \beta B$؟

إذا كانت الجملة الكيميائية لا تتبادل المادّة مع الوسط الخارجي، فإنّ كسر التفاعل (نسبة التفاعل) Q_r هو المقياس الذي يعتمد عليه للتنبؤ بجهة تطوّر التفاعل.

إذا كان $Q_r \neq K$ ، فإنه يوجد على الأقل نوع كيميائي واحد من الأنواع A ، B ، C ، D له تركيز $[\ ]$ يختلف عن تركيزه النهائي $[\ ]_f$ اي $[\ ]_f \neq [\ ]$ ، وعليه فإن الجملة الكيميائية لم تبلغ حالة توازنها.

تعريف

- إذا كان $Q_{r,i} < K$ ، الجملة تتطوّر في الاتجاه المباشر $\alpha A + \beta B \rightarrow \gamma C + \delta D$.
- إذا كان $Q_{r,i} > K$ ، الجملة تتطوّر في الاتجاه المعاكس $\gamma C + \delta D \rightarrow \alpha A + \beta B$.
- إذا كان $Q_{r,i} = K$ ، الجملة لا تتطوّر فهي في حالة توازن كيميائي $\alpha A + \beta B \rightarrow \gamma C + \delta D$.



Q_{r_i} كسر التفاعل الابتدائي.

ملاحظة هامة

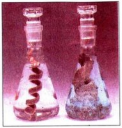
الدراسة السابقة تنطبق على التحولات **حمض/ أساس** .
كما تنطبق على التحوّلات **أكسدة / إرجاع** .

3- تطبيق على الأعمدة

3-1- التحوّل الكيميائي التلقائي بتحويل إلكتروني مباشر

نشاط 1

ضع شريطا من النحاس Cu في دورق يحتوي على محلول نترات الفضة $(Ag^+ + NO_3^-)_{(aq)}$ (الوثيقة المرفقة).



ماذا تلاحظ ؟

ستلاحظ أنه بعد مدّة :

◄ يتلوّن المحلول بالأزرق، دلالة على ظهور شوارد النحاس الثنائي $Cu^{2+}_{(aq)}$.

◄ تترسّب شعيرات الفضة Ag على شريط النحاس.

كيف تفسر ذلك ؟

◄ الشوارد Cu^{2+} أتت من معدن النحاس Cu ولا يمكن أن تأتي من شيء آخر. وهذا حسب التحوّل الكيميائي : $Cu_{(s)} = Cu^{2+}_{(aq)} + 2e^-$ (المعادلة النصفية للأكسدة).

◄ معدن الفضة Ag أتى من شوارد الفضة Ag^+ حسب التحوّل الكيميائي : $Ag^+_{(aq)} + 1e^- = Ag_{(s)}$ (المعادلة النصفية للإرجاع).

أما معادلة التفاعل النمذج للتحول الكيميائي الحادث فنحصل عليها بجمع المعادلتين السابقتين :

$$Cu_{(s)} = Cu^{2+}_{(aq)} + 2e^-$$

$$2 \times [Ag^+_{(aq)} + 1e^- = Ag_{(s)}]$$

معادلة الأكسدة-الإرجاعية : $Cu_{(s)} + 2Ag^+_{(aq)} = Cu^{2+}_{(aq)} + 2Ag_{(s)}$

عيّن الكسر الابتدائي Q_{r_i} للتفاعل.

نعلم أن $Q_{r_i} = \dfrac{[Cu^{2+}][Ag]^2}{[Cu][Ag^+]^2}$

لكن في بداية التفاعل لا يوجد النوعان الكيميائيان Ag و Cu^{2+}، وعليه فإن $[Cu^{2+}] = 0\,mol.L^{-1}$ و $[Ag] = 0\,mol.L^{-1}$ إذن، $\boxed{Q_{r_i} = 0}$

حدّد اتجاه تطوّر التفاعل.

بما أن $K > Q_{r_i}$ فإن التفاعل يتطوّر في الاتجاه المباشر، الذي نحصل به على الشوارد Cu^{2+} الزرقاء، ومعدن النحاس Cu . وهذا يتوافق تماما مع التجربة الملاحظة.

نتيجة

إنّ التحويل الإلكتروني (انتقال الإلكترونات) تمّ بصورة تلقائية من المرجع $Cu_{(s)}$ إلى المؤكسد $Ag^+_{(aq)}$ بطريقة مباشرة.

ملاحظة هامة

◄ إنّ التلامس المباشر بين شريط النحاس Cu ومحلول نترات الفضة $(Ag^+ + NO_3^-)_{(aq)}$ جعل الالكترونات (e^-) تنتقل مباشرة من $Cu_{(s)}$ إلى $Ag^+_{(aq)}$، وبالتالي لا نحصل على تيار كهربائي. فإذا جعلنا الإلكترونات تتحرّك في دارة مغلقة، حصلنا على تيار كهربائي، وبالتالي نستطيع أن نحوّل الطاقة الداخلية للجملة الكيميائية إلى طاقة كهربائية.

◄ فكيف يمكن إذن الحصول على ذلك ؟

هذا ما سنتطرّق إليه في الفقرة الموالية، بصناعة العمود الكهربائي (الحاشدة).

3-2- التحوّل الكيميائي التلقائي بتحويل الكتروني غير مباشر في عمود

نشاط 2 : تحقيق عمود دانيال

◄ اغمس صفيحة النحاس Cu في بيشر به محلول كبريتات النحاس $(Cu^{2+}_{(aq)} + SO^{2-}_{4(aq)})$

واغمس صفيحة الفضة Zn في بيشر آخر به محلول كبريتات الزنك $(Zn^{2+} + SO_4^{2-})$.

◄ صل بين المحلولين بواسطة جسر مؤلّف من أنبوب به مادّة شاردية هلامية شفافة مثل كلور البوتاسيوم $(K^+ + Cl^-)$.

◄ اربط بين الصفيحتين فولطمتر أو مقياس ميلي أمبير وصل بينهما بواسطة أسلاك توصيل (الوثيقة).

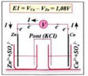
◄ ماذا تلاحظ ؟

◄ ستلاحظ تسجيل مرور تيار كهربائي.

◄ كيف تفسر ذلك ؟

◄ تنتقل الإلكترونات (e^-) التي تفقدها صفيحة Zn عبر سلك التوصيل إلى صفيحة النحاس (Cu) فينشأ تيار كهربائي (I) جهته الاصطلاحية هي عكس جهة حركة الإلكترونات. ومن المعلوم أن التيار ينتقل من القطب $(+)$ للمولّد إلى قطبه السالب $(-)$

وعليه فإننا نكون قد حصلنا على مولد كهربائي قطبه الموجب $(+)$ هو صفيحة Cu وقطبه السالب $(-)$ هو صفيحة Zn .



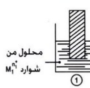
- أعط الرّمز الاصطلاحي لهذا العمود.
- رمز هذا العمود : $^{-}Zn / Zn^{2+} // Cu^{2+} / Cu^{+}$

الدراسة النظرية للأعمدة (الحاشدات)

1/ تركيب العمود

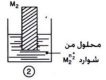
يتركّب العمود من نصفين :

نصف العمود الأول



- يتألف من صفيحة معدنية M_1 مغموسة في محلول من شوارد هذا المعدن M_1 والتي نرمز لها بالرّمز $M_1^{n_1^+}$ (الشكل 1)، وبالتالي فهو يتميّز بالثنائية مؤكسد مرجع $(M_1^{n_1^+} , M_1)$.
- المعادلة النصفية الالكترونية (معادلة الإرجاع) : $M_{1(s)} = M_{1(aq)}^{n_1^+} + n_1 e^-$.

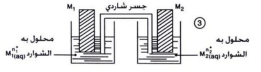
نصف العمود الثاني



- يتألف من صفيحة معدنية M_2 مغموسة في محلول من شوارد هذا المعدن M_2 أي $M_2^{n_2^+}$ (الشكل 2) يتميّز بالثنائية مرجع/مؤكسد : $(M_2^{n_2^+} / M_2)$.
- المعادلة النصفية الإلكترونية للأكسدة :
$M_{2(aq)}^{n_2^+} + n_2 e^- = M_{2(s)}$.

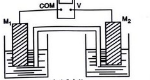
جسر التوصيل

- يتألف إما من غشاء مسامي كوعاء دانيال التاريخي أو من أنبوب يحتوي على محلول شاردي هلامي مثل $(K^+ + Cl^-)$ ، أو ورق ترشيح مبلّل بمحلول شاردي مثل $(K^+ + Cl^-)$. هذا الجسر يصل بين نصفي العمودين فنحصل على عمود واحد (الشكل 3).



2/ قطبية العمود

- تحليليا : الصفيحة M_1 تخرج منها الـ e^- فهي القطب $(-)$ للمولد، و M_2 هو القطب $(+)$ للمولد.
- تجريبيا : عندما يربط فولطمتر بين الصفيحتين M_1 و M_2 (الشكل 4) :



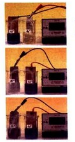
الشكل 4

- فإذا كان القياس موجبا فإن الفولطمتر يكون قد ربط بشكل صحيح، بمعنى أن القطب $(+)$ للعمود موصول إلى قطب القياس V للفولطمتر، والقطب $(-)$ للعمود موصول بالقطب COM للفولطمتر.
- المعادلة المنمذجة للتحوّل الكيميائي هي :

$$n_2 [M_{1(s)} = M_{1(aq)}^{n_1^+} + n_1 e^-]$$
$$n_1 [M_{2(aq)}^{n_2^+} + n_2 e^- = M_{2(s)}]$$
$$n_2 M_{1(s)} + n_1 M_{2(aq)}^{n_2^+} = n_2 M_{1(aq)}^{n_1^+} + n_2 M_{2(s)}$$

- الرّمز الاصطلاحي للعمود : $M_1 / M_1^{n_1^+} // M_2^{n_2^+} / M_2^+$

القوّة المحرّكة الكهربائية للعمود E



E تمثل فرق الكمون الكهربائي بين صفيحتي العمود M_1 و M_2 عندما تكون دارة العمود مفتوحة (بمعنى شدّة التيار معدومة) : $\boxed{E = V_+ - V_-}$

- قيم E لبعض الأعمدة

العمود	$E(V)$
$Cu / Cu^{2+} // Ag^+ / Ag$	$0,459 \approx 0,46$
$Pb / Pb^{2+} // Cu^{2+} Cu$	$0,471 \approx 0,47$
$Fe / Fe^{2+} / Cu^{2+} / Cu$	$0,772 \approx 0,77$
$Cu / Cu^{2+} // Zn^{2+} / Zn$ عمود دانيال	$1,08V$

سلّم الكمونات

كمية الكهرباء التي ينتجها العمود

تعريف

الفاراداي F هو كمية الكهرباء التي تنتج من 1 مول $(1\,mol)$ من الإلكترونات أثناء حركتها ، $1F = N_A \times |e^-|$ حيث N_A عدد أفوغادرو.

كمية الكهرباء التي ينتجها العمود أثناء التقدم X للتفاعل

كمية الكهرباء بالكولون $Q(C)$

$\boxed{Q = Z.X.F}$

$Z = n_1 n_2^*$ = عدد الالكترونات المحوّلة أثناء التفاعل

تقدّم التفاعل بـ (mol).

$F = 96500\,C.mol^{-1}$

ملاحظة : إذا كان $n_1 n_2^* = n_1 \times n_2$ و (n_1) و (n_2) أوليين فيما بينهما.

$n_1 n_2^* = PPCM(n_1,n_2)$ إذا لم يكن (n_1) و (n_2) أوليين فيما بينهما.

$PPCM$ هو المضاعف المشترك الأصغر لـ (n_2,n_1)

إذا كان التقدم أعضميا فإن ، $\boxed{Q_{max} = Z.X_{max}.F}$.

مدة اشتغال العمود Δt

شدة التيار الكهربائي التي ينتجها العمود هي (I) خلال مدة زمنية Δt فإن : $Q = I\,\Delta t$

ومنه : $\boxed{\Delta t = \frac{Q}{I}}$

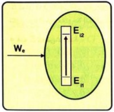
وعليه فإن مدة اشتغال العمود هي : $\Delta t = \frac{Q_{max}}{I}$

إذن : $\Delta t = \frac{Q_{max}}{I} = \frac{ZX_{max}F}{I}$.

الحصيلة الطاقوية للعمود

معادلة انحفاظ الطاقة : $E_{i_1} - W_e = E_{i_2}$

التحويل الكهربائي : W_e .



التمرين 1

نعتبر التفاعل $Cu_{(s)} + 2Ag^+_{(aq)} = Cu^{2+}_{(aq)} + 2Ag_{(s)}$

نسمي $Q_{r,i}$ كسر التفاعل الابتدائي و k ثابت التوازن.

أجب بصحيح أو خطأ، وصحح العبارة الخاطئة.

أ/ إذا كان $Q_{r,i} < k$ ، يتطور التفاعل في الاتجاه المباشر، أي في اتجاه استهلاك المتفاعلات.

ب/ إذا كان $Q_{r,i} > k$ ، يتطور التفاعل في اتجاه تشكل راسب الفضة $Ag_{(s)}$.

ج/ إذا كان $Q_{r,i} = k$ ، فالجملة الكيميائية السابقة تكون في توازن كيميائي.

الحل

أ/ صحيح.

ب/ خطأ ، إذا كان $Q_{r,i} > k$ ، فإن التفاعل يتطور في الاتجاه العكسي، أي في اتجاه استهلاك $Ag_{(s)}$ و $Cu^{2+}_{(aq)}$ ، وبالتالي تشكل $Ag^+_{(aq)}$ و $Cu_{(s)}$.

ج/ صحيح.

التمرين 2

تعطى الثنائيتان مر/مؤ : $S_2O^{2-}_{(aq)} / S_4O^{2-}_{6(aq)}$ و $I^-_{(aq)} / I_{2(aq)}$

1/أ/ اكتب المعادلتين النصفيتين الإلكترونيتين.

ب/ استنتج معادلة الأكسدة الإرجاعية.

2/ يعطى المزيج الابتدائي المؤلف من :

$V_{I^-} = 4.0mL$ ، $n_{I^-} = 5.10^{-3}mol.L^{-1}$ ، $V_{S_2O_3^{2-}} = 20mL$ ، $n_{S_2O_3^{2-}} = 4.10^{-3}mol.L^{-1}$

$V_{I_2} = 15mL$ ، $n_{I_2} = 4.10^{-3}mol.L^{-1}$ ، $V_{S_4O_6^{2-}} = 20mL$ ، $n_{S_4O_6^{2-}} = 2.10^{-3}mol.L^{-1}$.

أ/ احسب التراكيز الابتدائية لهذه الأنواع الكيميائية.

ب/ استنتج قيمة كسر التفاعل الابتدائي $Q_{r,i}$.

3/ إذا علمت أن ثابت التوازن k لهذا التفاعل هو $k = 10^8$ ، فحدد في أي جهة يتطور التفاعل.

الحل

1/أ/ المعادلتان النصفيتان الإلكترونيتان

$2S_2O^{2-}_{3(aq)} = S_4O^{2-}_{6(aq)} + 2e^-$

$I_{2(aq)} + 2e^- = 2I^-_{(aq)}$

ب/ بجمع هاتين المعادلتين نحصل على معادلة الأكسدة الإرجاعية :

$$2S_2O_{3(aq)}^{2-} + I_{2(aq)} = S_4O_{6(aq)}^{2-} + 2I^-_{(aq)}$$

2/أ/ حساب التراكيز الابتدائية للأنواع الكيميائية

نعلم أن التركيز [ ] لأي نوع كيميائي يعطى بالعلاقة $[\ ] = \frac{n}{V_{\text{محلول}}} = \frac{n}{V_1+V_2+V_3+V_4}$

• بالنسبة للنوع ($S_2O_{3(aq)}^{2-}$)

i معناه ابتدائي (initial)

$$[S_2O_3^{2-}]_i = \frac{n_{S_2O_3^{2-}}}{(20+40+5+15).10^{-3}} = \frac{4.10^{-3}}{100.10^{-3}} = 4.10^{-2}mol.L^{-1}$$

• بالنسبة للنوع ($I_{2(aq)}$)

$$[I_2]_i = \frac{n_{I_2}}{100.10^{-3}} = \frac{4.10^{-3}}{100.10^{-3}} = 4.10^{-2}mol.L^{-1}$$

• بالنسبة للنوع ($I^-_{(aq)}$)

$$[I^-]_i = \frac{n_{I^-}}{100.10^{-3}} = \frac{5.10^{-3}}{100.10^{-3}} = 5.10^{-2}mol.L^{-1}$$

• بالنسبة للنوع ($S_4O_{6(aq)}^{2-}$)

$$[S_4O_6^{2-}]_i = \frac{n_{S_4O_6^{2-}}}{(20+40+5+15).10^{-3}} = \frac{2.10^{-3}}{100.10^{-3}} = 2.10^{-2}mol.L^{-1}$$

ب/ حساب الكسر الابتدائي للتفاعل $Q_{r,i}$

نعلم أن $Q_{r,i} = \frac{[S_4O_6^{2-}]_i[I^-]_i^2}{[I_2]_i[S_2O_3^{2-}]_i^2}$ أي $Q_{r,i} = \frac{(2.10^{-2})(5.10^{-2})^2}{(4.10^{-2})(4.10^{-2})^2} = 0,781$

$$\boxed{Q_{r,i} = 0,781}$$

3/ تحديد جهة تطور التفاعل

بما أن $Q_{r,i} = 0,781$ و $k = 10^{18}$ فإن $Q_{r,i} << k$، ومنه فإن التفاعل يتطور في اتجاه تشكل كل من I^- و $S_4O_6^{2-}$ أي في الاتجاه المباشر.

التمرين 3

نمزج 1,0g من مسحوق الحديد $Fe_{(s)}$ و 1,0g من مسحوق النحاس $Cu_{(s)}$ مع 20,0mL من محلول كلور النحاس الثنائي ($Cu^{2+}_{aq} + 2cl^-_{(aq)}$) و 20,0mL من محلول كلور الحديد الثنائي ($Fe^{2+}_{(aq)} + 2cl^-_{(aq)}$)، تركيز كلا المحلولين يساوي $5,0.10^{-1}mol.L^{-1}$.

يعطى ثابت التوازن $k = 10^{26}$ للمعادلة : $Cu^{2+}_{(aq)} + Fe_{(s)} = Cu_{(s)} + Fe^{2+}_{(aq)}$

1/أ/ احسب قيمة $Q_{r,i}$.

ب/ حدد في أي جهة تطور التفاعل.

2/أ/ احسب التقدم النهائي x_f للتفاعل (استعن بجدول التقدم).

ب/ هل التفاعل تام ؟

ج/ احسب قيمة $Q_{r,f}$.

3- استنتج m(Fe) و m(Cu) عند التوازن.

يعطى، $M(Cu) = 63,5g.mol^{-1}$ ، $M(Fe) = 56g/mol$.

الحل

1/أ/ حساب قيمة $Q_{r,i}$

$Q_{r,i} = \frac{[Fe^{2+}_{(aq)}]_i[Cu_{(s)}]_i}{[Fe_{(s)}]_i[Cu^{2+}_{(aq)}]_i}$ لكن $[Cu_{(s)}] = 1$ وكذا $[Fe_{(s)}] = 1$ لأنهما في الحالة الصلبة (S).

إذن $Q_{r,i} = \frac{[Fe^{2+}_{(aq)}]_i}{[Cu^{2+}_{(aq)}]_i}$ لكن $[Cu^{2+}_{(aq)}]_i = \frac{n_{Cu^{2+}}}{V_{\text{محلول}}} = \frac{5.10^{-1}.20.10^{-3}}{(20+20).10^{-3}}$

$$[Cu^{2+}_{(aq)}]_i = 2,5.10^{-1}mol.L^{-1}$$

كذلك $[Fe^{2+}_{(aq)}]_i = \frac{n_{Fe^{2+}}}{V_{\text{محلول}}} = \frac{5.10^{-1}.20.10^{-3}}{(20+20).10^{-3}} = 2,5.10^{-1}mol.L^{-1}$

نعوض فنجد : $Q_{r,i} = \frac{2,5.10^{-1}}{2,5.10^{-1}} = 1$ ومنه ، $\boxed{Q_{r,i} = 1}$

ب/ تحديد جهة تطور التفاعل

بما ان $Q_{r,i} < 1$ فالتفاعل يتطور في الاتجاه المباشر، أي في اتجاه تشكل $Cu_{(s)}$ و $Fe^{2+}_{(aq)}$.

2/أ/ حساب التقدم النهائي x_f للتفاعل

نحسب كمية المادة الابتدائية لكل نوع كيميائي :

$$n_{0(Cu^{2+})} = n_0(Fe^{2+}) = 5.10^{-1}.20.10^{-3} = 10^{-2}mol$$

$$n_{0(Cu)} = \frac{m(Cu)}{M(Cu)} = \frac{1}{63,5} \approx 1,57.10^{-2}mol$$

$$n_{0(Fe)} = \frac{m(Fe)}{M(Fe)} = \frac{1}{56} \approx 1,78.10^{-2}mol$$

ننشئ جدول التقدم :

المعادلة	$Cu^{2+}_{(aq)} + Fe_{(s)} = Cu_{(s)} + Fe^{2+}_{(aq)}$			
الحالة الابتدائية	10^{-2} mol	$1,78.10^{-2}$ mol	$1,57.10^{-2}$	10^{-2} mol
الحالة النهائية	$10^{-2} - x_f$	$1,78.10^{-2} - x_f$	$1,57.10^{-2} + x_f$	$10^{-2} + x_f$

عند التوازن لدينا $k = \frac{[Fe^{2+}]_{eq}}{[Cu^{2+}]_{eq}}$ إذن $k = \frac{\frac{10^{-2} + x_f}{V}}{\frac{10^{-2} - x_f}{V}}$ ومنه $k = \frac{10^{-2} + x_f}{10^{-2} - x_f}$

$10^{-2}(k-1) = x_f(k+1)$ ، $k(10^{-2} - x_f) = 10^{-2} + x_f$

$x_f = \frac{10^{-2}(k-1)}{(k+1)} = 10^{-2}\frac{(10^{26}-1)}{(10^{26}+1)} \approx 10^{-2}\,mol$ إذن $\boxed{x_f \approx 10^{-2}\,mol}$

ب/ نحسب τ_f

$\tau_f = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{10^{-2}}{n_{0(Cu^{2+})}} = \frac{10^{-2}}{10^{-2}} = 1$ ، $\boxed{\tau_f = 1}$ فالتفاعل تام.

ج/ حساب قيمة $Q_{r,f}$

لدينا $Q_{r,f} = \frac{[Fe^{2+}]_f}{[Cu^{2+}]_f} = k$ اي $\boxed{Q_{r,f} = k = 10^{26}}$

3/ حساب $m(Fe)$ و $m(Cu)$ عند التوازن

نستعين بخانات الحالة النهائية من جدول التقدم.

لدينا $n = \frac{m}{M}$ إذن $m = n.M$ ومنه $m(Cu) = n_{(Cu)}.M(Cu)$

$$M(Cu) = 63,5g.mol^{-1}$$

$$n(Cu) = 1,57.10^{-2} + x_f = 1,57.10^{-2} + 10^{-2} = 2,57.10^{-2}\,mol$$

$$m(Cu) = 2,57.10^{-2}.63,5 = 1,63g$$

بالمثل نجد : $m(Fe) = (10^{-2} - x_f).56$ اي $m(Fe) = (10^{-2} - 10^{-2}).56 = 1,12g$

التمرين 4

اختر الإجابة الصحيحة.

أ/ حاملات الشحنة في الدارة الخارجية للعمود الكهربائي هي الشوارد / الإلكترونات.

ب/ حاملات الشحنة في الدارة الداخلية للعمود الكهربائي هي الشوارد / الإلكترونات.

ج/ تنتقل الإلكترونات من المسرى الموجب إلى المسرى السالب / من المسرى السالب إلى المسرى الموجب.

د/ الجسر الملحي يعمل على عزل محلولي العمود عن بعضهما / وصل محلولي العمود ببعضهما.

هـ/ يعمل الجسر الملحي على هجرة الشوارد بين المحلولين / توقف الشوارد.

و/ القطب الموجب للعمود هو المسرى الذي تخرج منه الإلكترونات / تدخل إليه الإلكترونات.

ي/ المسرى الموجب هو المصعد / المهبط.

ك/ العمود الكهربائي يعمل بالتحول القسري / التلقائي.

الحل

أ/ الإلكترونات. ب/ الشوارد. ج/ من المسرى الموجب إلى المسرى السالب. د/ وصل محلولي العمود ببعضهما. هـ/ هجرة الشوارد بين المحلولين. و/ تدخل إليه الإلكترونات. ي/ المصعد. ك/ التلقائي.

التمرين 5

أجب بصحيح أو خطأ على المقترحات التالية.

القوة المحركة الكهربائية لعمود دانيال تتعلق بـ :

أ/ تركيز محلول كبريتات النحاس $(Cu^{2+}_{aq} + SO^{2-}_{4(aq)})$.

ب/ تركيز محلول كبريتات الزنك $(Zn^{2+}_{aq} + SO^{2-}_{4(aq)})$.

ج/ حجم هذين المحلولين.

د/ نوع الشوارد المتواجدة في الجسر الملحي.

الحل

أ/ صحيح. ب/ صحيح. ج/ خطأ. د/ خطأ.

التمرين 6

كسر التفاعل Q_r الحادث في عمود كهربائي يساوي ثابت التوازن الكيميائي لهذا التفاعل :

أ/ عندما يكون العمود في الحالة الابتدائية ؟

ب/ عندما يكون العمود في الحالة الانتقالية ؟

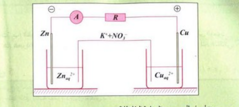
ج/ عندما يكون العمود في الحالة النهائية (العمود تفرغ كلية) ؟

الحل

- يكون $Q_r = Q_{r,f} = k$ في الحالة النهائية، وعندما يتوقف التفاعل، وبالتالي يتوقف اشتغال العمود.
- أما في الحالة الابتدائية فإن $Q_{r,i} = 0$ وبالتالي $Q_{r,i} < k$ ، لذا يسرى التفاعل في الاتجاه المباشر.
- وايضا في الحالة الانتقالية، يكون $Q_r < k$ ، وبالتالي فإن العمود، مازال في حالة اشتغال.

التمرين 7

نحقق تركيب الدارة المؤلفة من عمود دانيال يسري في ناقل أومي R .



احبب بصحيح أو خطأ، وصحح العبارة الخاطئة :

أ/ الإلكترونات تنتقل من مسرى Cu إلى مسرى Zn .

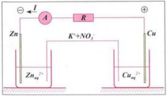
ب/الشوارد $Zn^{2+}_{(aq)}$ و $Cu^{2+}_{(aq)}$ تنتقل في الجهة الاصطلاحية للتيار الكهربائي.

ج/ رمز العمود هو : $\theta_{Zn_{(s)}/Zn^{2+}_{(aq)}} // Cu^{2+}_{(aq)} / Cu^{+}_{(s)}$.

هـ/ القوة المحركة للعمود $E = V_+ - V_- = 1{,}08V$.

الحل

أ/ خطأ. والصحيح هو : الالكترونات تنتقل من مسرى Zn إلى مسرى Cu ، إذ يحدث عند المسرى Zn تفاعل أكسدة ذلك لأن Zn هو الذي يفقد الالكترونات وهذه الإلكترونات تنتقل عبر الدارة الخارجية للعمود (عبر أسلاك التوصيل)، فتصل إلى مسرى النحاس Cu ، فيحدث عنده تفاعل إرجاع من قبل شوارد $Cu^{2+}_{(aq)}$.



ب/ صحيح. إذ أن كل الشوارد الموجبة وهي $Zn^{2+}_{(aq)}$ ، $Cu^{2+}_{(aq)}$ و $k^{+}_{(aq)}$ ، تنتقل عكس جهة حركة الإلكترونات، وبالتالي بالجهة الاصطلاحية للتيار الكهربائي (I)، كما هو موضح في الشكل المقابل.

ج/ صحيح. د/ صحيح.

التمرين 8

نعتبر العمود (نيكل- فضة) $\ominus Ni_{(s)} / Ni^{2+}_{(aq)} // Ag^{+}_{(aq)} / Ag_{(s)} \oplus$

هذا العمود يمكن أن يشتغل لمدة 30 min ، معطيا تيارا شدته ثابتة، وقيمتها $I = 10mA$.

1/ أ/ اكتب المعادلتين النصفيتين الإلكترونيتين الحادثتين عند المسريين، وصف كيفية نشوء التيار الكهربائي في هذا العمود.

ب/ استنتج معادلة الأكسدة الإرجاعية، التي تحدد اشتغال هذا العمود.

2/ احسب كمية الشحنة الكهربائية Q التي ينتجها هذا المولد خلال مدة اشتغاله.

3/ استنتج قيمة التقدم النهائي x_f عند انتهاء مدة اشتغال العمود.

4/ احسب مقدار تغير كتلته مسرى الفضة $\Delta m(Ag)$.

معطيات : $M(Ag) = 108g.mol^{-1}$ ، $F = 96500c.mol^{-1}$.

الحل

1/ أ/ المعادلة النصفية للأكسدة

• عند المهبط : ذرات معدن النيكل $Ni_{(s)}$ تفقد كل ذرة $2e^{-}$ حسب المعادلة النصفية :

$$Ni_{(s)} = Ni^{2+}_{(aq)} + 2e^{-}$$

هذه الأزواج الإلكترونية تنتقل عبر المهبط لتصل إلى المصعد عبر أسلاك التوصيل.

• عند المصعد : ذرات معدن الفضة $Ag_{(s)}$ المؤلفة للمصعد تصلها الإلكترونات التي فقدتها من المهبط، وهذه الإلكترونات تكتسبها الشوارد الموجبة من المحلول $Ag^{+}_{(aq)}$ المحيطة بالصعد، فتتحول إلى ذرات متعادلة كهربائيا، حسب المعادلة النصفية : $Ag^{+}_{(aq)} + 1e^{-} = Ag_{(s)}$

ب/ معادلة الأكسدة الإرجاعية

$$Ni_{(s)} = Ni^{2+}_{(aq)} + 2e^{-}$$

$$\underline{2\times(Ag^{+}_{(aq)} + 1e^{-} = Ag_{(s)})}$$

$$Ni_{(s)} + 2Ag^{+}_{(s)} = Ni^{2+}_{(aq)} + 2Ag_{(s)}$$

2/ حساب كمية الشحنة الكهربائية Q

تعطى قيمة Q خلال المدة $\Delta t = 30\ min$ لاشتغال العمود الذي يعطي تيارا $I = 10mA$ بالعلاقة :

$\boxed{Q = I.\Delta t}$ إذن $Q = (10.10^{-3})\times(30.60)$ أي $\boxed{Q = 18C}$

3/ حساب قيمة التقدم النهائي x_f

نعلم أن $Q = Z\times F$ ومنه $\boxed{X = x_f = \dfrac{Q}{Z.F}}$ حيث $Z = 2$ وهو عدد الإلكترونات المتبادلة (المحولة) أثناء التفاعل. $F = 96500C$ وهو الفارادي.

نعوض فنجد $x_f = \frac{18}{2\times 96500} = 9{,}3.10^{-5}\,mol$

4/ حساب مقدار تغير كتلة الفضة $\Delta m_{(Ag)}$

ننشئ جدول التقدم لمعرفة كمية مادة الفضة (Ag) المترسبة :

المعادلة	$Ni_{(s)} + 2Ag^+_{(s)} = Ni^{2+}_{(aq)} + 2Ag_{(s)}$			
الحالة الابتدائية	$n_0(Ni)$	$n_0(Ag^+)$	$n_0(Ni^{2+})$	$n_0(Ag)$
الحالة النهائية	$n_0(Ni) - 2x_f$	$n_0(Ag) - 2x_f$	$n_0(Ni^{2+}) + 2x_f$	$n_0(Ag) + 2x_f$

نلاحظ من هذا الجدول أن $2x_f$ + هي كمية مادة الفضة Ag التي زادت (ترسبت).

وبما أن $n = \frac{m}{M}$ إذن $m = nM$ وهنا $m_{Ag} = \Delta m_{(Ag)} = 2x_f.M(Ag)$

إذن $\Delta m_{(Ag)} = 2.9{,}3.10^{-5}.108$ وأخيرا $\boxed{\Delta m_{(Ag)} = 2{,}0.10^{-2}\,g}$

التمرين 9

إن عمود لكلانشي (Leclanché) هو عمود يتألف من أسطوانة من الزنك Zn ومحلل كهربائي حمضي هلامي من ثنائي أكسيد المنغنيز MnO_2 ومسرى غير متأثر من الغرافيت C (الكربون).

1/ أ/ حدد مسربي هذا العمود.

ب/ ماذا يقصد بمسرى الغرافيت أنه غير متأثر ؟

2/ أ/ لماذا يسمى عمود لكلانشي بالعمود الجاف ؟

ب/ لماذا يقال عن هذا العمود أنه حامضي؟

3/ الثنائيتان (مر/مؤ) الداخلتان في اشتغال هذا العمود هما $Zn^{2+}_{(aq)} / Zn_{(s)}$ و $MnO_2 / MnOOH$.

أ/ اكتب المعادلتين النصفيتين للأكسدة والإرجاع وهذا في وسط حمضي $H^+_{(aq)}$.

ب/ استنتج معادلة التفاعل المنمذج للتحول الكيميائي في العمود.

ج/ أعط رمز هذا العمود.

4/ هذا النوع من الأعمدة يحمل المعلومات : $750mAh\ ;\ 1{,}5V$

أ/ ماذا تحمل هذه الخصائص ؟

ب/ احسب المدة الزمنية Δt التي يشتغل فيها العمود علما بأنه يعطي تيارا ثابت الشدة قيمته $I = 0{,}1A$.

5/ أعط الحصيلة الطاقوية لهذا العمود وبين أنه تحول تلقائي.

6/ احسب الكتلة المستهلكة من قبل كل من Zn و MnO_2 في هذه المدة الزمنية Δt .

يعطى : $M(Zn) = 65{,}4 g.mol^{-1}$ ، $M(MnO_2) = 86{,}9 g.mol^{-1}$

الحل

1/ أ/ تحديد مسربي العمود : مسرى Zn ومسرى C .

ب/ مسرى الغرافيت غير متأثر، يعني أنه لا يتفاعل.

2/ أ/ يسمى عمود لكلانشي بالعمود الجاف، لأنه لا يحتوي على محاليل، بل على مادة هلامية (gel).

ب/ يقال عن هذا العمود أنه حامضي، لأن التفاعل عند السربين يتم في وسط حمضي ($H^+_{(aq)}$)

3/ أ/ المعادلتان النصفيتان للأكسدة والإرجاع

$$Zn = Zn^{2+} + 2e^-$$

$$(MnO_2 + H^+ + e^- = MnOOH) \times 2$$

ب/ $\boxed{Zn + 2MnO_2 + 2H^+ = Zn^{2+} + MnOOH}$

رمز العمود هو : $\ominus Zn / Zn^{2+} // MnOOH / MnO_2 / C \oplus$

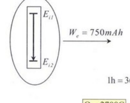
4/ أ/ العدد 1,5V يمثل القوة المحركة الكهربائية للعمود أي $E = 1{,}5V$. العدد 750mAh وحدته هي mAh أي الميلي أمبير ساعي وبالتالي فهو يمثل القيمة الأعظمية لكمية الكهرباء.

ب/ حساب المدة الزمنية لاشتغال هذا العمود

$$\Delta t = \frac{Q}{I} = \frac{750.10^{-3}\,Ah}{0{,}1A} = 7{,}5h$$

$$\boxed{\Delta t = 7{,}5h}$$

5/ الحصيلة الطاقوية لعمود لكلانشي



6/ الكتلة المستهلكة من قبل كل من Zn و MnO_2

لدينا $Q = 750mAh = 750.10^{-3}\,Ah$ لكن $1h = 3600s$

إذن $Q = 0{,}750 \times 3600 A.s$

وبما أن $1Amper \times 1Seconde = 1Coulomb$ إذن $\boxed{Q = 2700C}$

من المعادلتين النصفيتين السابقتين نلاحظ أن كل 1 ذرة من Zn تحرر $2e^-$

أي : $n_{(\bar{e})} = 2n_{(Zn)}$ ، $n_{(Zn)} = \frac{1}{2} n_{(\bar{e})}$ كما نستنتج من المعادلة الثانية أن $n_{(MnO_2)} = n_{(\bar{e})}$

لنحسب إذن عدد الإلكترونات المحولة :

نعلم أن $\boxed{n_{(\bar{e})} = \frac{Q}{F}}$ نعوض فنجد : $n_{(\bar{e})} = \frac{2700}{96500} = 2{,}8.10^{-2}\,mol$

فنكتب : $\boxed{n_{(MnO_2)} = 2{,}8.10^{-2}\,mol}$ و $\boxed{n_{(Zn)} = 1{,}4.10^{-2}\,mol}$

وبالتالي : $m_{(Zn)} = n_{(Zn)} M_{(Zn)} = 1{,}4.10^{-2}.65{,}4 = 0{,}92g$

$$m_{(MnO_2)} = n_{(MnO_2)} M_{(MnO_2)} = 2{,}8.10^{-2}.86{,}9 = 2{,}43g$$

الوحدة 2 ■ مراقبة تحول كيميائي – الأسترة وإماهة الاستر

1/ تحوّلات الأسترة وإماهة الاستر

1/1/ تفاعل الاسترة

تعريف

تفاعل الأسترة هو تفاعل حمض كربوكسيلي مع كحول، فينتج استر وماء.

ماء + أستر = كحول + حمض كربوكسيلي

الصيغة الجزيئية نصف المفصلة للاستر

$$R-C\begin{matrix} \diagup O-H \\ \diagdown\!\!\diagdown O \end{matrix} + R'-OH = R-C\begin{matrix} \diagup O-R' \\ \diagdown\!\!\diagdown O \end{matrix} + H_2O$$

الصيغة الجزيئية المجملة للاستر : $C_n H_{2n} O_2$ مع $2 \leq n$

1-2- تفاعل إماهة الاستر

تعريف

تفاعل إماهة الاستر هو تفاعل استر مع الماء، فيعطي حمضا كربوكسيليا وكحولا.

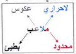
$$R-C\begin{matrix} \diagup O-R' \\ \diagdown\!\!\diagdown O \end{matrix} + H_2O = R-C\begin{matrix} \diagup O-H \\ \diagdown\!\!\diagdown O \end{matrix} + R'-OH$$

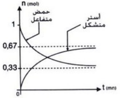
كحول + حمض كربوكسيلي = ماء + أستر

1-3- خصائص تفاعلي الاسترة وإماهة الاستر :

محدود (غير تام) – لا حراري – عكوس – بطيئ.

نلاحظها في كلمة **ملاعب** :





2- مراقبة الحالة النهائية

2-1- جدول التقدّم لتفاعل الاسترة

	$R-COOH$	$+\ R'-OH$	$= RCOOR'$	$+\ H_2O$
الحالة الابتدائية	n_0	n_0	$0\,mol$	$0\,mol$
الحالة النهائية	$n_0 - X_f$	$n_0 - X_f$	X_f	X_f

2-2- مردود الاسترة

في حالة مزيج ابتدائي متساوي كمية المادة (متساوي عدد المولات) من الحمض الكربوكسيلي والكحول فإن مردود الاسترة يتعلّق بصنف الكحول.

$$\text{مردود الاسترة} = \frac{\text{كمية المادة للكحول أو الحمض المتفاعل}}{\text{الكمية الابتدائية للحمض أو الكحول}} = \frac{n}{n_0} = \frac{X_f}{X_{max}} = r_{\text{استرة}}$$

مردود الاسترة يساوي النسبة النهائية لتقدّم التفاعل : $r_{\text{استرة}} = \tau_f = \dfrac{X_f}{X_{max}}$

إذا كان الكحول أوليا : $r_{\text{استرة}} = 67\% = 0,67$

إذا كان الكحول ثانويا : $r_{\text{استرة}} = 60\% = 0,60$

إذا كان الكحول ثالثيا : $r_{\text{استرة}} \approx 5\%$ إلى 10%

2-3- مردود إماهة الاستر

$$\text{مردود إماهة الاسترة} = \frac{\text{كمية المادة للاستر أو الماء المتفاعل}}{\text{الكمية الابتدائية للاستر أو الماء}} = \frac{n}{n_0} = \frac{X_f}{X_{max}} = \tau'_f = r_{\text{إماهة}}$$

إذا كان الكحول الناتج أوليا : $r_{\text{إماهة الاستر}} = 33\%$

إذا كان الكحول الناتج ثانويا : $r_{\text{إماهة الاستر}} = 40\%$

إذا كان الكحول الناتج ثالثيا : 5% إلى 95% من $r_{\text{إماهة الاستر}}$

2-4- ثابت التوازن K

في حالة تفاعل الاسترة :

$$K = \frac{[\text{الاستر}]_f\,[\text{الماء}]_f}{[\text{الحمض}]_f\,[\text{الكحول}]_f}$$

ويتحول إلى :

$$K = \frac{n_{\text{استر}} \times n_{\text{ماء}}}{n_{\text{حمض}} \times n_{\text{كحول}}}$$

مراقبة سرعة تفاعل الاسترة (أو إماهة الأسترة)

تزداد سرعة التفاعل دون تغيير المردود :

1/ إذا زادت درجة حرارة المزيج.

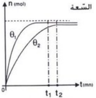
2/ إضافة قطرات من حمض الكبريت المركّز (زيادة الشوارد H^+).

3- مراقبة مردود التفاعل

يزداد مردود التفاعل في الحالات التالية :

1/ المزيج الابتدائي غير متساوي كمية المادة.

2/ إجراء تفاعل الاستر بكلور الاسيل بدل الحمض الكربوكسيلي، يجعل التفاعل تاما.



$t_1 < t_2 \qquad \theta_1 < \theta_2$

التمرين 1

اختر الإجابة الصحيحة، وصحح الخاطئة.

1/ تفاعل الأسترة هو :

أ/ تفاعل بطئ

ب/ تفاعل تام

ج/ تفاعل ناشر للحرارة

2/ يمكن زيادة نسبة تقدم تفاعل الأسترة إذا،

أ/ رفعنا درجة الحرارة

ب/ أضفنا قطرات من حمض الكبريت المركز.

ج/ استعملنا كحولا أوليا، بدل كحولا ثالثيا.

د/ أنقصنا كمية المادة لأحد المتفاعلات.

الحل

تذكرة : تفاعل الأسترة هو تفاعل يتم بين حمض كربوكسيلي وكحول. أما تفاعل إماهة الاستر، فيتم بين الاستر والماء. وخصائص كل تفاعل هي : لاحراري، بطيئ، عكوس، محدود.

1/ أ/ صحيح. ب/ صحيح.

ج/ خطأ، والصحيح هو أن تفاعل الأسترة هو تفاعل لاحراري، لا ينتج عنه انتشار اي حرارة إضافية، فبقدر ما يعطى له حرارة أثناء التفاعل بقدر ما يعطي هو حرارة، عند انتهاء التفاعل (عند التوازن).

2/ تذكرة : كلا التفاعلين (أسترة، إماهة الاستر) يصل إلى حالة التوازن، فإذا أردنا تغيير حالة التوازن نقوم بما يلي :

- كلما ظهر ناتج، ننزعه، وهذا بتقدم التفاعل.
- نضيف بزيادة أحد المتفاعلات.

أ/ خطأ : فالحرارة عامل حركي، تغير فقط من سرعة التفاعل، فكلما زادت الحرارة زادت سرعة التفاعل.

ب/ خطأ : فحمض الكبريت المركز هو عامل مساعد يزيد من سرعة التفاعل فقط.

ج/ خطأ : فالاسترة لا تتقدم عمليا إذا استعملنا كحولا ثالثيا، بدل كحول أولي.

التمرين 2

حدد المعادلات التي تعطي تفاعلات أسترة وإماهة أستر من بين التفاعلات التالية :

أ/ $R-COOH + R'-OH = R-COO-R' + H_2O$

ب/ $H-COOH + H-CH_2-OH = H-COOCH_3 + H_2O$

ج/ $CH_3COOH + C_2H_5OH = CH_3COOC_2H_5 + H_2O$

د/ $CH_3COOH + C_2H_5OH = C_2H_5COOCH_3 + H_2O$

هـ/ $CH_3COOH + HO^- = CH_3COO^- + H_2O$

و/ $CH_3COOC_3H_7 + H_2O = C_2H_5COOH + C_3H_7OH$

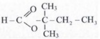
ي/ $CH_3-(CH_2)_5-C(=O)-O-C_2H_5 + H_2O = CH_3-(CH_2)_5-C(=O)-OH + C_2H_5OH$

الحل

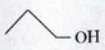
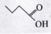
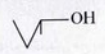
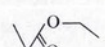
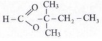
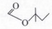
تفاعلات الأسترة هي: ماء + أستر = كحول + حمض كربوكسيلي.
فتفاعلات الأسترة هي التفاعلات (أ)، (ب)، (ج). أما (د) فهو أيضا تفاعل أستر، لكن تم فيه تغيير صيغة الأستر الناتج، فالأستر يجب ألا تكون صيغته $C_2H_5-COOCH_3$، بل يجب أن تكون صيغته $CH_3-COOC_2H_5$، ويمكنك المقارنة بين المعادلتين (ج) و(د).
التفاعل (د) هو تفاعل حمض بأساس، فهو ليس تفاعل أسترة.
تفاعلات إماهة الأستر يجب أن تحقق: كحول + حمض كربوكسيلي = ماء + أستر
فالتفاعلان (و) و(هـ) هما تفاعلا إماهة أستر.

التمرين 3

املأ الجدول التالي.

الصيغة نصف المفصلة	الصيغة الطوبولوجية	الاسم	الوظيفة الكيميائية
CH_3-CH_2-OH			
			
$CH_3-CHOH-CH_3$			
			
$CH_3-COO-CH_2-CH_3$			
		ميثانوات البروبيل	
			

الحل

الصيغة نصف المفصلة	الصيغة الطوبولوجية	الاسم	الوظيفة الكيميائية
CH_3-CH_2-OH		إيثان-1-اول	كحول اولي
$CH_3-CH_2-CH_2-COOH$		حمض البوتانويك	حمض كربوكسيلي
$CH_3-CHOH-CH_3$		بروبان-2-اول	كحول ثانوي
$CH_3-CH_2-CH_2COO^-$		شاردة البوتانوات	شاردة
$CH_3-COO-CH_2-CH_3$		إيثانوات الإيثيل	أستر
$H-COO-CH_2CH_2-CH_3$		ميثانوات البروبيل	أستر
		ميثانوات مثيل-2-البوتيل-2	

التمرين 4

I/ نحقق تجريبيا أسترة بتفاعل حمض الإيثانويك مع الإيثانول.
1/ ماذا نقصد بتفاعل أسترة؟
2/ اكتب معادلة التفاعل الكيميائي الحادث.
3/ يجري التفاعل بمزيج ابتدائي متساوي عدد المولات يتالف من 1mol حمض و 1mol كحول. عند حدوث حالة التوازن، يكون المزيج مؤلفا من 0,33mol من الحمض و 0,33mol من الكحول، و 0,67mol من الاستر و 0,67mol ماء.
أ/ أنشئ جدول التقدم.
ب/ احسب مردود التفاعل r، وتأكد من أن الكحول المتفاعل اولي.

ج/ احسب $Q_{r,eq}$ وثابت التوازن k .

II/ نضيف للمزيج السابق عند حالة التوازن 1mol من حمض الإيثانويك.

1/ احسب الكسر الابتدائي للتفاعل $Q_{r,i}$.

2/ حدد جهة تطور التفاعل.

3/ اعط من جديد جدول التقدم.

4/أ/ اعط عبارة $k = Q_{r,eq}$ بدلالة x_f .

ب/ احسب قيمة x_f .

5/ اعط التركيب النهائي للمزيج عند التوازن.

الحل

I/1/ تفاعل الأسترة هو تفاعل حمض كربوكسيلي مع كحول فينتج أستر وماء.

2/ معادلة التفاعل

نعين صيغة حمض الإيثانويك :

• كل حمض يتميز بالمجموعة الوظيفية $-C\begin{array}{l}\diagup O-H\\ \diagdown\!\!\diagdown O\end{array}$

• وبما أنه حمض الإيثانويك، فكلمة إيث تعني اثنان، أي 2 ذرة كربون C ، فهذا الحمض يجب أن يحتوي على 2 ذرة C ، لذا نضيف إلى المجموعة الوظيفية ذرة C أخرى فيكون من الشكل

$$C-C\begin{array}{l}\diagup O-H\\ \diagdown\!\!\diagdown O\end{array}$$

• وذرة C المضافة ينقصها 3 روابط، لأن كل ذرة C تنشئ 4 روابط، لذا يجب إضافة 3 ذرات H إلى C المضافة، فتصبح صيغة الحمض الكربوكسيلي هي $CH_3-C\begin{array}{l}\diagup O-H\\ \diagdown\!\!\diagdown O\end{array}$

أما الإيثانول، فهو كحول والمجموعة الوظيفية للكحول هي $-\overset{|}{\underset{|}{C}}-OH$

وبما أنه إيثانول، أي إيث، فيجب أن تكون له 2 ذرة C ، لذا وجب إضافة ذرة C أخرى كما يلي :

$$C-\overset{|}{\underset{|}{C}}-OH$$

ثم نكمل الروابط بذرات H كما يلي : $C-C-OH$ أو CH_3-CH_2-OH

فتكون المعادلة الكيميائية كما يلي :

$$\underset{\text{الحمض}}{CH_3-C\begin{array}{l}\diagup O-H\\ \diagdown\!\!\diagdown O\end{array}} + \underset{\text{الكحول}}{CH_3-CH_2-OH} = \underset{\text{أستر (إيثانوات الإيثيل)}}{CH_3-C\begin{array}{l}\diagup O-CH_2-CH_3\\ \diagdown\!\!\diagdown O\end{array}} + \underset{\text{ماء}}{H_2O}$$

3/أ/ جدول التقدم

نعلم في هذه الحالة كميات المادة في الحالتين الابتدائية والنهائية، لذا يأتي جدول التقدم كما يلي :

	الحمض الكربوكسيلي +	الكحول (الأولي) =	الاستر +	الماء
الحالة الابتدائية	1mol	1mol	0mol	0mol
الحالة النهائية	0,33mol	0,33mol	0,67mol	0,67mol

ب/ حساب مردود التفاعل τ

$$r_{\text{استر}} = \tau_f = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{n(\text{حمض أو كحول متفاعل})}{n_0(\text{حمض أو كحول ابتدائي})}$$

$$r_{\text{استر}} = \tau_f = \frac{1-0,33}{1} = 0,67$$

$$r_{\text{استر}} = \tau_f = 0,67 = 67\%$$

بما أن $r = 67\%$ ، فهذا يدل على أن الكحول المتفاعل أولي. فلو كان الكحول ثانويا لوجدنا ، $r_{\text{استر}} = 60\%$

ج/ حساب كسر التفاعل عند التوازن $Q_{r,eq}$

$$Q_{r,eq} = \frac{[\text{الأستر}]_{eq}[\text{الماء}]_{eq}}{[\text{الحمض الكربوكسيلي}]_{eq}[\text{الكحول}]_{eq}}$$

$$Q_{r,eq} = \frac{\frac{n_{\text{استر}}}{V}\times\frac{n_{\text{ماء}}}{V}}{\frac{n_{\text{حمض}}}{V}\times\frac{n_{\text{كحول}}}{V}} = \frac{n_{\text{استر}}\times n_{\text{ماء}}}{n_{\text{حمض}}\times n_{\text{كحول}}}$$

نعوض فنجد $Q_{r,eq} = \frac{0,67\times0,67}{0,33\times0,33} = 4$

ثابت التوازن k

$\boxed{k = Q_{r,eq} = 4}$ ولو كان الكحول ثانويا لوجدنا $k = Q_{r,eq} = 2,25$.

II/1/ حساب الكسر الابتدائي للتفاعل $Q_{r,i}$

$$Q_{r,i} = \frac{n_{أستر} \times n_{ماء}}{n'_{حمض} \times n_{كحول}} = \frac{0,67\times0,67}{(0,33+1)\times0,33} \quad أي \quad \boxed{Q_{r,i}=1,02}$$

2/ تحديد جهة تطور التفاعل

بما أن $Q_{r,i} < k$ فهذا يعني أن التفاعل يتم في الاتجاه المباشر، أي في اتجاه تفاعل الأسترة، وليس في الاتجاه العكسي، أي في اتجاه إماهة الاستر. ولذا نتوقع زيادة كمية المادة لكل من الأستر والماء.

3/ جدول التقدم

في هذه الحالة، نعلم فقط كميات المادة في الحالة الابتدائية، لا نعرف كمياتها في الحالة النهائية لذا يأتي جدول التقدم بدلالة x_f كالتالي:

	الحمض الكربوكسيلي +	الكحول (الأولي) =	الأستر +	الماء
الحالة الابتدائية	1,33mol	0,33mol	0,67mol	0,67mol
الحالة النهائية	$1,33-x_f$	$0,33-x_f$	$0,67+x_f$	$0,67+x_f$

4/ عبارة k

$$k = \frac{(0,67+x_f)(0,67+x_f)}{(1,33-x_f)(0,33-x_f)}$$ ونعلم أن $k=4$ إذن $$\frac{(0,67+x_f)^2}{(1,33-x_f)(0,33-x_f)} = 4$$

وبعد التبسيط نجد $9x_f^2 - 24x_f + 4 = 0$

ثم نحسب المميز: $\Delta = (-24)^2 - 4(9)(4)$ فنجد $\Delta = 432$ أي $\sqrt{\Delta} = 20,78$

ومنه: $x_{f_1} = \frac{24-20,78}{2(9)} = 0,178mol$ ، وهو مقبول كيميائيا. إذن $\boxed{x_f = 0,178mol}$

5/ التركيب النهائي للمزيج

$n_{f(حمض)} = 1,33-0,178 = 1,15mol$

$n_{f(كحول)} = 0,33-0,178 = 0,15mol$

$n_{f(أستر)} = 0,67-0,178 = 0,848mol$

$n_{f(ماء)} = 0,67-0,178 = 0,848mol$

التمرين 5

نريد تحضير نوع كيميائي عضوي E، وهو إيثانوات البنزيل (أسيتات البنزيل) كثافته $d = 1,06$، الموجود في عطر الياسمين.

1/ إذا علمت أن صيغة المركب E هي $CH_3COOCH_2C_6H_5$،

أ/ حدد الوظيفة الكيميائية للمركب E.

ب/ ما هما النوعان الكيميائيان (A) و (B) اللذان تأتي منهما E، علما بأن $M(A) > M(B)$

2/ نضع في حوجلة (0,50mol) من المركب (B) و (0,20mol) من المركب (A)، ثم نضيف قطرات من حمض الكبريت المركز، نسد الحوجلة، ونضعها في فرن درجة حرارته $180°C$.

أ/ ما الهدف من إضافة قطرات من حمض الكبريت المركز والتسخين؟

ب/ عند حدوث حالة التوازن يكون $\tau_f = 0,88$. لم لا يكون $\tau_f = 0,67$ رغم أن الكحول المستعمل أولي؟

ج/ اكتب معادلة التفاعل المنمذج للتحول الكيميائي وحدد خصائصه.

د/ احسب كلا من x_{max} و x_f.

هـ/ احسب كتلة الاستر المتشكل، وأيضا حجمه الصافي.

3/ نضيف إلى المزيج السابق عند حالة التوازن 0,024mol من المركب E.

أ/ حدد في أي اتجاه يتطور التفاعل.

ب/ أعط التركيب الكتلي للمزيج الجديد عند بلوغ حالة التوازن الجديد.

الحل

1/أ/ الوظيفة الكيميائية للمركب E هي استر، فاسمه يدل على ذلك لأنه على وزن "الكانوات الألكيل".

ب/ النوعان الكيميائيان (A) و (B) اللذان ياتي منهما هذا الأستر E، أحدهما كحول، والآخر حمض كربوكسيلي. ونعين صيغة كل منهما كما يلي:

نكتب صيغة الأستر: $\underbrace{CH_3CO}_{أتى\ من\ الحمض}\underbrace{OCH_2C_6H_5}_{أتى\ من\ الكحول}$

نضيف إلى الجزء الذي أتى من الكحول ذرة H فنحصل على الكحول، $HO-CH_2C_6H_5$ ونقبله فنحصل على الكحول $C_6H_5-CH_2-OH$.

نضيف إلى الجزء الذي أتى من الحمض المجموعة OH فنحصل على الحمض CH_3-COOH.

نلاحظ بدون حساب أن الكتلة المولية للكحول M(كحول) اكبر من الكتلة المولية للحمض M(الحمض). إذن M(كحول) > M(الحمض)، فنستنتج أن:

- النوع الكيميائي A هو الكحول الأولي $C_6H_5-CH_2-OH$.
- النوع الكيميائي B هو الحمض الكربوكسيلي CH_3COOH.

2/أ/ الهدف من إضافة حمض الكبريت المركز والتسخين هو تسريع التفاعل، فالحرارة هي من العوامل الحركية، وحمض الكبريت المركز هو عامل مساعد.

ب/ بالفعل نحصل على $\tau_f = 0,67$ إذا كان الكحول أوليا، وهذا في حالة واحدة وهي أن المزيج الابتدائي متساوي عدد المولات. لكن هذا المزيج الابتدائي 0,20mol من الكحول و 0,50mol من الحمض (B)، غير متساوي عدد المولات، لذا نجد $\tau_f \neq 0,67$.

ج/ معادلة التفاعل النمذج للتحول الكيميائي

$$CH_3-COOH+C_6H_5-CH_2-OH=CH_3COOCH_2C_6H_5+H_2O$$

خصائص تفاعل الأسترة وإماهة الأستر هي : محدود (غير تام) – لاحراري – عكوس – بطيء.
فهي موجودة في كلمة "م لا ع ب".

د/ حساب كل من x_{max} و x_f

ننشئ جدول التقدم :

	$CH_3-COOH+$	$C_6H_5-CH_2-OH=$	$CH_3COOCH_2C_6H_5+$	H_2O
الحالة الابتدائية	0,50mol	0,20mol	0mol	0mol
الحالة النهائية	$0,50-x_f$	$0,20-x_f$	x_f	x_f

في التفاعلات المتوازنة مثل الأسترة أو إماهة الأستر فإن x_{max} يحدد من النوع الكيميائي الذي له أصغر عدد ممكن من المولات، وهو هنا الكحول الذي وضعنا منه (0,20mol)، إذن $x_{max}=0,20mol$.

لنحسب x_f :

الطريقة 1

لدينا $\tau_f=\frac{x_f}{x_{max}}$ ومنه $x_f=\tau_f x_{max}$ أي $x_f=0,88\times0,20$ وبالتالي $x_f=0,176mol$.

الطريقة 2

بما أن الكحول أولي فإن $k=4$ لكن $k=\frac{x_f\times x_f}{(0,5-x_f)(0,2-x_f)}=4$

$$x_f^2=4(0,5-x_f)(0,2-x_f)$$

$$3x_f^2-2,8x_f+0,4=0$$

لنحسب $\sqrt{\Delta}$

لدينا $\Delta=(-2,8)^2-4(3)(0,4)$ إذن $\sqrt{\Delta}=1,74$

ومنه نجد $x_{1f}=\frac{2,8+1,74}{2(3)}=0,757mol$ مرفوض كيميائيا، فلو عوضنا عن هذه القيمة في حالة الحمض أو الكحول لوجدنا قيما سالبة، وهذا مرفوض كيميائيا.

$x_{2f}=\frac{2,8-1,74}{2(3)}=0,176mol$ مقبول.

$x_{2f}=0,176mol$ وهي نفس النتيجة التي حسبناها سابقا.

هـ/ حساب كتلة الأستر $m(E)$

لدينا $n=\frac{m}{M}$ إذن $m(E)=n_{(E)}.M(E)$

$$n_{(E)}=x_f=0,176mol$$

$$M(E)=M(CH_3COOCH_2C_6H_5)=9.10+16.2+10.1$$

$$M(E)=150g.mol^{-1}$$

إذن $m(E)=0,176.150=26,4g$

حساب حجم الأستر $V_{(E)}$

نعلم أن $d=\frac{l_{(E)}}{l_{الماء}}$ إذن $l_{(E)}=d.l_{الماء}$

$$l_{(E)}=1,06\times1g/cm^3$$

$$l_{(E)}=1,06g/cm^3$$

لكن $l_{(E)}=\frac{m(E)}{V(E)}$ إذن $V(E)=\frac{m(E)}{l_{(E)}}$ ، نعوض فنجد $V(E)=\frac{26,4}{1,06}$

إذن $\boxed{V(E)=24,9cm^3}$

3/أ/ تحديد اتجاه تطور التفاعل

عند إضافة 0,024mol من الأستر يتغير التركيب الجديد للمزيج النهائي السابق، والذي نعتبره مزيجا ابتدائيا جديدا.

$$n_{f(أستر)}=0,176+0,024=0,2mol$$

$$n_{f(ماء)}=0,176mol$$

$$n_{f(كحول)}=0,20-0,176=0,024mol$$

$$n_{f(حمض)}=0,50-0,176=0,324mol$$

فلمعرفة جهة تطور التفاعل نحسب $Q_{r,i}$ ونقارنه بـ k ، $Q_{r,i}=\frac{0,2\times0,176}{0,024\times0,324}\approx4,53$

نلاحظ أن $Q_{r,i}>k=4$ فالتفاعل يتطور في الاتجاه العكسي، أي في اتجاه إماهة الأستر.

ب/ إعطاء التركيب الكتلي للمزيج الجديد عند التوازن

ننشئ جدول التقدم بشكل مختصر :

	الحمض الكربوكسيلي +	الكحول (الأولي) =	الأستر +	الماء
الحالة النهائية	$0,324+x_f$	$0,024+x_f$	$0,2-x_f$	$0,176-x_f$

$$k = 4 = \frac{(0,176 - x_f)(0,2 - x_f)}{(0,324 + x_f)(0,024 + x_f)}$$

$$4(0,324 + x_f)(0,024 + x_f) = (0,176 - x_f)(0,2 - x_f)$$

$$4(7,776.10^{-3} + 0,348.5 + x^2{}_f) = 0,0352 + x^2{}_f - 0,376x_f)$$

$$0,031 - 0,035 + 3x^2{}_f + 1,768x_f = 0$$

$$3x^2{}_f + 1,768x_f - 0,004 = 0$$

لنحسب المميز :

$$\sqrt{\Delta} = 1,78 \text{ ، } \Delta = (1,768)^2 - 4(3)(-0,004)$$

إما $x_{1f} = \frac{-1,768 + 1,78}{2(3)}$ فينتج $x_{1f} = 2.10^{-3}mol$ مقبول.

او $0 > \frac{-1,768 - 1,78}{2(3)} = x_{2f}$ فينتج $x_{2f} < 0$ مرفوض

ومنه $x_f = 2.10^{-3}mol$

لنحسب إذن التركيب الكتلي للمزيج عند التوازن الجديد :

$m_{\text{حمض}} = n_{\text{حمض}}.M(\text{حمض}) = 0,326 \times 60 = 19,56g$ ،

$n_{\text{حمض}} = 0,324 + 2.10^{-3} = 0,326mol$

$m_{\text{كحول}} = n_{\text{كحول}}.M(\text{كحول}) = 0,028 \times 108 = 3,024g$ ،

$n_{\text{كحول}} = 0,024 + 2.10^{-3} = 0,028mol$

$m_{\text{أستر}} = n_{\text{أستر}}.M(\text{أستر}) = 0,198 \times 150 = 29,7g$ ،

$n_{\text{أستر}} = 0,2 - 2,10^{-3} = 0,198mol$

$n_{\text{ماء}} = 0,176 - 2.10^{-3} = 0,174mol$ ، $m_{\text{ماء}} = n_{\text{ماء}}.M(\text{ماء}) = 0,174 \times 18 = 3,132g$

ملاحظة

$$M(\text{ماء}) = M(H_2O) = 18g/mol$$

$$M(\text{أستر}) = M(CH_3COOCH_2C_6H_5) + 150g/mol$$

$$M(\text{حمض}) = M(CH_3COOH) = 60g/mol$$

$$M(\text{كحول}) = M(C_6H_5CH_2OH) = 108g/mol$$

المراجع

• الكتب بالعربية

1◁ الفيزياء للجامعات (ترجمة : السمان، الحصري)
1◁ قصة الطاقة الذرية (جلادكوف) : مير
1◁ قصة الكون (قسوم – ميموني) : المعرفة
1◁ المنهل في الفيزياء والكيمياء (1AS , 3AS) – (نفس المؤلف، حديبي) – المعرفة
1◁ دروس PO19 للأستاذ عبد الحميد بن تشيكو
1◁ زاد العلوم الفيزيائية والتكنولوجيا (لنفس المؤلف)
1◁ الفيزياء – السنة الثالثة – مكتبة المدارس

• الكتب بالإنجليزية

The Power House of the atom (Gladkov) – Mir ◁1
Chemistry for changing times (John, Hill) ◁1

• الكتب بالفرنسية

Ondes, optique et physique moderne (HALLIDAY) Editions du nouveau pédagogique ◁1
Mécanique général (T1, T2) : (Alonso – Finn) ◁2
Chimie (T.S + 1re S) : NATHAN ◁3
Hachette (T.S + 1re) ◁4
Physique – Chimie (P. closier) : Ellipses ◁5
Annabac (1999, 2001) Sujet : Hatier ◁6
S. Bac (T.S) (Serverine) : Bréal ◁7

فهرس