BAC

المجتهد

# حوليات الرياضيات

3AS

مواضيع مقترحة لشهادة البكالوريا

Hard_equation

Hard

شعبة العلوم التجريبية

equation

- مواضيع بكالوريا
- اختبارات نموذجية
- حلول مفصلة

إعداد : ع . بومهدي

منشورات المجتهد

# المُجتَهد

# في

# الرياضيات

## مواضيع مقترحة

## السنة 3 ثانوي

# BAC

وفق المنهاج الجديد الذي أقرته وزارة التربية الوطنية



دار المجتهد للنشر والتوزيع

E-mail : Almoujtahid @ hotmail.com

طبعة 2012 - 2013

# بسم الله الرحمن الرحيم



الإيداع القانوني D. L : 2011 – 5339

ر.د.م.ك ISBN : 978- 9947 -906-51– 4

➢ إعداد : ع . بومهدي

❖ مواضيع بكالوريا
❖ اختبارات نموذجية
❖ حلول مفصلة

☆ شعبة علوم تجريبية

# الموضوع الأول

**شعبة علوم الطبيعة و الحياة**
**بكالوريا جوان 2011**

## التمرين الأول :(3 نقاط)

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = -1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ؛ $u_{n+1} = 3u_n + 1$ .

$(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ $v_n = u_n + \frac{1}{2}$ .

– في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات ؛ إجابة واحدة فقط منها صحيحة ، حددها مع التعليل .

1- المتتالية $(v_n)$

أ- حسابية      ب- هندسية

جـ- لاحسابية و لا هندسية .

2- نهاية المتتالية $(u_n)$ هي

أ- $+\infty$      ب- $\frac{-1}{2}$      جـ- $-\infty$

3- نضع من أجل عدد طبيعي $n$

$$S_n = \frac{-1}{2}\left[1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+e^{3\ln 3}+...+e^{n\ln 3}\right]$$

أ- $S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ ،   ب- $S_n = \frac{1-3^n}{4}$

جـ- $S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4}$

## التمرين الثاني :(5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛ المستوي (p) الذي يشمل النقطة $A(1,-2,1)$ و $\vec{n}(-2,1,5)$ شعاع ناظمي له ؛ و ليكن (Q) المستوي ذا المعادلة $x + 2y - 7 = 0$ .

1- أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

2- أ- تحقق أن النقطة $B(-1 , 4 , -1)$ مشتركة بين المستويين (P) و (Q) .

ب- بين أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين تمثيل وسيطي له .

3- لتكن النقطة $C(5 , -2 , -1)$

أ- أحسب المسافة بين النقطة C و المستوي (P) ثم المسافة بين النقطة C و المستوي (Q) .

ب- أثبت أن المستويين (P) و (Q) متعامدان .

جـ- استنتج المسافة بين النقطة C و المستقيم $(\Delta)$ .

## التمرين الثالث :(5 نقاط)

نعتبر المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ النقط $A , B , C$ التي لاحقاتها على التوالي :

$z_A = -i$ ، $z_B = 2+3i$ و $z_C = -4+i$

1- أ - أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

ب- عين طول المركبة $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ و عمدة له ؛ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2- نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ؛ النقطة M′ ذات اللاحقة z′ حيث :

$$z' = iz - 1 - i$$

أ- عين طبيعة التحويل $T$ محدداً عناصره المميزة .

ب- ما هي صورة النقطة B بالتحويل T .

3- لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D = -6 + 2i$

أ- بين أن النقاط $A , C , D$ في استقامية .

ب- عين نسبة التحاكي $h$ الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى النقطة D .

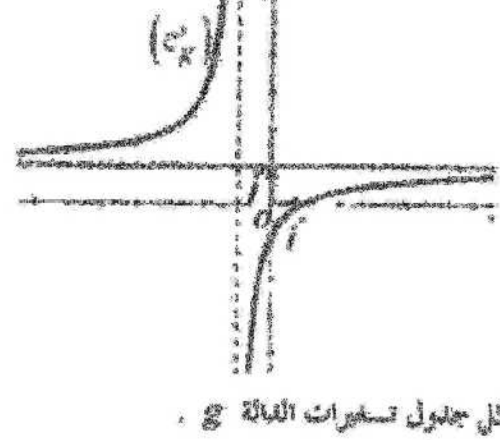
جـ- عين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A و يحول B إلى D .

## التمرين الرابع :(7 نقاط)

1 ) نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

و $(C_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o , \vec{i} , \vec{j})$ (الشكل التالي) ؛

بقراءة بيانية :




أ- شكل جدول تغيرات الدالة $g$ .

ب- حل بيانياً المتراجحة $g(x) > 0$ .

جـ- عين بيانياً قيم $x$ التي يكون من أجلها $0 < g(x) < 1$ .

II ) لتكن الدالة $f$ المعرفة على المجال $]1\,,+\infty[$ بـ :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o\,,\vec{i}\,,\vec{j})$ .

1- احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين هندسياً .

2-أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1\,,+\infty[$

$$g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ب- احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها ثم شكل جدول التغيرات الدالة $f$ .

3- أ - باستعمال الجزء I ) السؤال جـ ، عين إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1\,,+\infty[$ .

ب- $\alpha$ عدد حقيقي .

- بين أن الدالة : $x \mapsto (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha\,,+\infty[$ .

جـ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1\,,+\infty[$ ، $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$ ثم عين دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]1\,,+\infty[$ .

# الموضوع الثالث

## التمرين الأول : (4 نقاط)

$\alpha$ عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1 .

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$ .

$(v_n)$ متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ :

$$v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$$

1- أ - بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\alpha$ .

ب- اكتب بدلالة $n$ و $\alpha$ ؛ عبارة $v_n$ ثم استنتج بدلالة $n$ و $\alpha$ عبارة $u_n$ .

جـ- عين قيم العدد الحقيقي $\alpha$ التي تكون من أجلها المتتالية $(u_n)$ متقاربة .

2- نضع $\alpha = \frac{3}{2}$ .

- احسب بدلالة $n$ ؛ المجموعين $S_n$ و $T_n$ حيث :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .

## التمرين الثاني : (4 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط $A$ ، $B$ ، $C$ التي لاحقاتها على الترتيب :

$z_A = 3 - 2i$ ، $z_B = 3 + 2i$ و $z_C = 4i$

1- أ - علّم النقط $A$ ، $B$ ، $C$ .

ب- ما طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علل إجابتك .

جـ- عين لاحقة النقطة $\Omega$ مركز الرباعي $OABC$

2- عين ثم أنشئ $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي التي تحقق :

$$\left\| \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 12$$

3- أ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ؛ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية : $z^2-6z+13=0$ .

نسمي $z_0$ ؛ $z_1$ حلي هذه المعادلة .

ب- لتكن $M$ نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب $z$ .

عين مجموعة النقط $M$ من المستوي التي تحقق :

$$|z-z_0|=|z-z_1|$$

## التمرين الثالث : (5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(0,1,5)$ ؛ $B(2,1,7)$ ؛ $C(3,-3,6)$ .

1- أ - أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $B$ و $\vec{u}(1,-4,-1)$ شعاع توجيه له .

ب- تحقق أن النقطة $C$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$ .

جـ- بين أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان .

د- استنتج المسافة بين النقطة $A$ و المستقيم $(\Delta)$ .

2- نعتبر النقطة $M(2+t\ ,1-4t\ ,7-t)$ حيث $t$ عدد حقيقي ؛ و لتكن الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(t)=AM$

أ- أكتب عبارة $h(t)$ بدلالة $t$ .

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $t$ ؛

$$h'(t)=\frac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$$

جـ- استنتج قيمة العدد الحقيقي $t$ التي تكون من أجلها المسافة $AM$ أصغر ما يمكن .

قارن بين القيمة الصغرى للدالة $h$ ؛ و المسافة بين النقطة $A$ و المستقيم $(\Delta)$ .

## التمرين الرابع : (7 نقاط)

- نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=e^x-ex-1$$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

1- أ - أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- أحسب $f'(x)$ ثم ادرس إشارتها .

جـ- شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

2 - أ - بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $(-\infty)$ .

ب- أكتب معادلة للمستقيم $(T)$ مماس المنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة $0$ .

جـ- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75\ ;\ 1,76[$ حلا وحيداً $\alpha$ .

د- أرسم المستقيمين $(\Delta)$ و $(T)$ ثم المنحنى $(C_f)$ على المجال $]-\infty\ ,2]$ .

3 - أ - أحسب بدلالة $\alpha$ ؛ المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ و حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=\alpha$ .

ب- أثبت أن $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\,\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$

( $ua$ هي وحدة المساحات ) .

# حل الموضوع الأول

## التمرين الأول :

تحديد الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاث مع التعليل :

| الاقتراح | الإجابة الصحيحة | التعليل |
|---|---|---|
| 1 | ب- هندسية | $v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{2}$ <br> $=3(u_n+\frac{1}{2})=3v_n$ |
| 2 | جـ- النهاية $-\infty$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(v_n-\frac{1}{2}\right)$ <br> $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}3^n-\frac{1}{2}\right)=-\infty$ |
| 3 | جـ- المجموع $S_n$ | $S_n=\frac{-1}{2}\left(1+3+3^2+...+3^n\right)$ <br> $=\frac{1}{2}\left(1\times\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right)=\frac{1-3^{n+1}}{4}$ |

## التمرين الثاني :

1- كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) :

(P) له معادلة من الشكل $ax+by+cz+d=0$

لدينا الشعاع $\vec{n}(-2,1,5)$ ناظمي للمستوي (P) .

و منه (P) معادلته من الشكل :

$$-2x+y+5z+d=0$$

$A\in(P)$ معناه $-2+(-2)+5+d=0$

و منه : $d=-1$ .

و منه (P) معادلته من الشكل $-2x+y+5z-1=0$

2-أ- التحقق أن النقطة B مشتركة بين المستويين (P) و (Q) :

لدينا $B\in(P)$ لأن $-2(-1)+(4)+5(-1)-1=0$

لدينا : $B\in Q$ لان $(-1)+2(4)-7=0$

و منه النقطة B مشتركة بين المستويين (P) و (Q) .

ب- بيان أن (P) و (Q) متقاطعان وفق المستقيم $(\Delta)$ :

(P) و (Q) متقاطعان معناه $\vec{n}_p$ لا يوازي $\vec{n}_Q$

$\vec{n}_p(-2,1,5)$ لا يوازي $\vec{n}_Q(1,2\ 0)$ لأن :

$\frac{1}{-2}\neq\frac{2}{1}$ إذن (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$

- تعين تمثيل وسيطي للمستقيم $(\Delta)$ :

لتعيين تمثيل وسيطي للمستقيم $(\Delta)$ نحل الجملة التالية :

$$\begin{cases}x+2y-7=0\ ..................(1)\\-2x+y+5z-1=0.........(2)\end{cases}$$

نضع $y=t$ حيث $t$ وسيط حقيقي

من المعادلة (1) نجد $x=-2t+7$

بتعويض قيمة كل من $y$ و $x$ في المعادلة (2) نجد

$-2(-2t+7)+t+5z-1=0$ و منه $z=-t+3$ .

التمثيل الوسيطي لـ $(\Delta)$ هو : $\begin{cases}x=-2t+7\\y=t\\z=-t+3\end{cases}$ و $(t\in R)$

3-أ- حساب المسافة بين C و (P) ثم بين C و (Q) :

$$d(C;(p))=\frac{|-2(5)+(-2)+5(-1)-1|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(5)^2}}=\frac{18}{\sqrt{30}}$$

$$d(C;(Q))=\frac{|(5)+2(-2)-7|}{\sqrt{1+4}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$$



ب- إثبات أن المستويين (P) و (Q) متعامدان :

(P) و (Q) متعامدان معناه $\vec{n}_P$ يعامد $\vec{n}_Q$ معناه :

$$\vec{n}_P.\vec{n}_Q=0$$

$$\vec{n}_P.\vec{n}_Q=1(-2)+2(1)+0(5)=0$$

إذن : $(P) \perp (Q)$ .

جـ- استنتاج المسافة بين النقطة $C$ و المستقيم $(\Delta)$ :

المسافة بين النقطة $C$ و المستقيم $(\Delta)$ هي الطول $CH$

حيث $H$ هي المسقط العمودي للنقطة $C$ على $(\Delta)$ .

لدينا : $CH^2 = d(C;(P))^2 + d(C;(Q))^2$

و منه :

$$CH = \sqrt{d(C;(P))^2 + d(C;(Q))^2} = 3\sqrt{2}$$

## التمرين الثالث :

1- أ - كتابة على الشكل الجبري العدد المركب $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-4+i+i}{2+3i+i} = \frac{(-4+2i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}$$
$$= \frac{20i}{20} = i$$

ب- تعين طبيعة العدد المركب $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ و عمدة له :

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |i| = 1$$

و $$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

- استنتاج طبيعة المثلث $ABC$ :

نستنتج مما سبق أن $AC = AB$ و $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}$

و منه المثلث $ABC$ قائم في $A$ و متساوي الساقين .

2- أ - تعين طبيعة التحويل $T$ و تحديد عناصره المميزة :

من العبارة المركبة للتحويل $T$ لدينا :

$$a = i \text{ و } b = -1 - i$$

التحويل $T$ دوران لأن $|a| = 1$

العناصر المميزة هي الزاوية $\arg(a) = \dfrac{\pi}{2}$ و المركز هو $A$

لأن :

$$\frac{b}{1-a} = \frac{-1-i}{1-i} = \frac{(-1-i)(1+i)}{2} = -i = z_A$$

ب- تعين صورة النقطة $B$ بالتحويل $T$ :

لدينا : $z_B = iz_B - 1 - i = i(2+3i) - 1 - i = -4 + i$

و منه صورة النقطة $B$ بالتحويل $T$ هي النقطة $C$ .

3- أ - بيان أن النقط $D, C, A$ في استقامية :

النقط $D, C, A$ في استقامية معناه $\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ حقيقي

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-6+3i}{-4+2i}$$
$$= \frac{(-6+3i)(-4-2i)}{(-4+2i)(-4-2i)} = \frac{3}{2}$$

و منه نقط $D, C, A$ في استقامية .

ب- تعين نسبة التحاكي $h$ :

العبارة المختصرة المركبة للتحاكي $h$ هي :

$$z_D - z_A = k\ (z_C - z_A)$$

حيث $k$ هي نسبة التحاكي $h$ و منه : $k = \dfrac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{3}{2}$

جـ- تعين العناصر المميزة للتشابه $S$ :

العبارة المختصرة المركبة للتشابه $S$ هي :

$$z_D - z_A = a(z_B - z_A)$$

حيث $Z$ عدد مركب و $a = [r;\theta]$ .

$$a = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-6+3i}{2+4i} = \frac{(-6+3i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}$$
$$= \frac{30i}{20} = \frac{3}{2}i$$

و منه نسبة التشابه $S$ هي :

$$|a| = \frac{3}{2} \text{ و زاوية } \arg(a) = \frac{\pi}{2}$$

## التمرين الرابع :

I - بقراءة بيانية

أ - تشكيل جدول التغيرات للدالة $g$ :

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | \|\| | $+$ |
| $g(x)$ | $1 \nearrow +\infty$ | \|\| | $-\infty \nearrow 1$ |

ب- حل بيانياً المتراجحة $g(x) > 0$ :

من البيان $g(x) > 0$ تكافئ

$$x \in ]-\infty , -1[ \cup ]1 , +\infty[$$

لأن $(C_g)$ يقع فوق محور الفواصل على هاذين المجالين .

جـ-تعيين بيانياً قيم $x$ والتي من أجلها يكون $0 < g(x) < 1$

$$0 < g(x) < 1$$

من البيان لدينا : $0 < g(x) < 1$ تكافئ

$$x \in ]1 , +\infty[$$

II - 1 - حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$= 1 + 0 = 1$$

التفسير الهندسي للنتيجتين :

$(C_f)$ يقبل مستقيماً مقارباً عمودياً معادلته $x = 1$

$(C_f)$ يقبل مستقيماً مقارباً أفياً معادلته : $y = 1$ بجوار $+\infty$

2-أ- بيان أن $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ من أجل $x \in ]1,+\infty[$

$$g'(x) = \frac{1(x+1) - 1(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ب- حساب $f'(x)$ و دراسة إشارتها و تشكيل جدول تغيراتها :

لدينا : $f(x) = g(x) + \ln(x-1) - \ln(x+1)$

$$f'(x) = g'(x) + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} > 0$$

ومنه الدالة $f$ متزايدة تماما من أجل كل $x \in ]1 , +\infty[$

جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $1$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow 1$ |

3- أ - تعيين إشارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1 , +\infty[$ :

من 1) جـ- لدينا $x \in ]1 , +\infty[$

و منه : $\ln[g(x)] < \ln 1$

أي : $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 1$

ب- بيان أن الدالة $x \mapsto (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x$

أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha ; +\infty[$

$$\left[(x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x\right]'$$

$$= 1.\ln(x-\alpha) + \frac{1}{x-\alpha}(x-\alpha) - 1$$

$$= 1\ln(x-\alpha) + 1 - 1 = \ln(x-\alpha)$$

جـ- التحقق من أن $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$ :

من أجـــــل $x \in ]1 , +\infty[$

لدينا : $g(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-1-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$

تعيين دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]1 , +\infty[$ :

لدينا : $f(x) = g(x) + \ln(x-1) - \ln(x+1)$

الدالة الأصلية لـــ $g$ هي الدالة $x \mapsto x - 2\ln(x+1)$

حسب الجواب 3-ب)

نستنتج أن الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \ln(x-1)$

هي الدالة $x \mapsto (x-1)\ln(x-1) - x$

و الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \ln(x+1)$

هي الدالة $x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$

و منه الدالة الأصلية للدالة $f$ هي الدالة $F$ حيث :

$$F(x) = x + (x-1)\ln(x-1) - (x+3)\ln(x+1)$$

# حل الموضوع الثاني

## التمرين الأول :

1 – ا – ابيّن أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\alpha$ :

$(v_n)$ هندسية أساسها $\alpha$ معناه $v_{n+1} = \alpha v_n$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا : $v_n = u_n + \dfrac{1}{\alpha - 1}$

و $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{\alpha - 1}$$
$$= \alpha u_n + 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$$
$$= \alpha\left(u_n + \frac{1}{\alpha - 1}\right) = \alpha v_n$$

ب–كتابة $v_n$ بدلالة $n$ و $\alpha$ واستنتاج $u_n$ بدلالة $n$ و $\alpha$ :

لدينا : $v_n = v_0 \times q^n$

حيث : $v_n = u_0 + \dfrac{1}{\alpha - 1} = 6 + \dfrac{1}{\alpha - 1}$ و منه :

$$v_n = \left(6 + \frac{1}{\alpha - 1}\right).\alpha^n = \frac{6\alpha^{n+1} - 5\alpha^n}{\alpha - 1}$$

لدينا : $v_n = u_n + \dfrac{1}{\alpha - 1}$ و منه :

$u_n = v_n - \dfrac{1}{\alpha - 1}$ و منه :

$$u_n = \frac{6\alpha^{n+1} - 5\alpha^n}{\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha - 1}$$
$$= \frac{6\alpha^{n+1} - 5\alpha^n - 1}{\alpha - 1}$$

جـ– تعيين قيم $\alpha$ التي من أجلها تكون المتتالية $(u_n)$ متقاربة :

حتى تكون $(u_n)$ متقاربة يجب أن يكون الأساس $0 < \alpha < 1$ .

2– حساب المجموعين $S_n$ و $T_n$ :

$$S_n = v_0 + v_1 + .... + v_n = v_0\left(\frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1}\right)$$

لدينا : $$= 8 \times \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right) = 16\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1\right)$$

لدينا : $T_n = u_n + u_1 + .... + u_n$

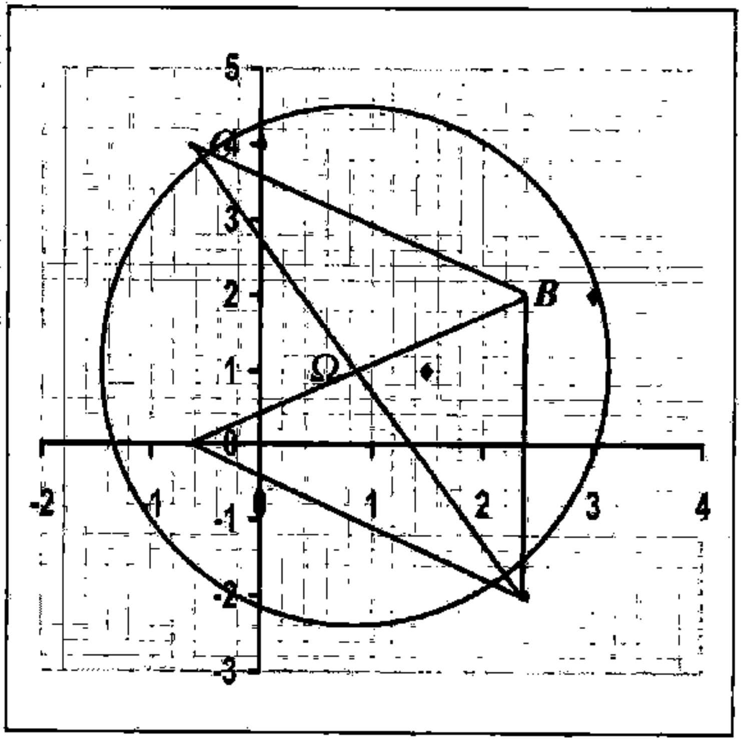
نعلم أن $u_n = v_n - \dfrac{1}{\alpha - 1}$ و منه : $u_n = v_n - 2$

و عليه $T_n = (v_0 - 2) + (v_1 - 2) + ... + (v_n - 2)$

$$T_n = (v_0 + v_1 + ... + v_n) - 2(n+1) = S_n - 2(n+1)$$

## التمرين الثاني :

أ– تعليم النقط $A$ , $B$ , $C$ :




ب– تعيين طبيعة الرباعي $OABC$ مع التعليل :

الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع لأن :

$$\overrightarrow{OC}(z_C - z_O) = \overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$$

أي : $\overrightarrow{OC}(4i) = \overrightarrow{AB}(4i)$

جـ– تعيين لاحقة النقطة $\Omega$ مركز الرباعي $OABC$ :

النقطة $\Omega$ هي منتصف القطرين $[AC]$ و $[OB]$

لاحقة $\Omega$ هي : $z_\Omega = \dfrac{z_O + z_B}{2} = \dfrac{0 + 3 + 2i}{2} = \dfrac{3}{2} + i$

2– تعيين ثم إنشاء مجموع النقط $(E)$ :

لدينا : $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$ .... *

(*) تكافئ $\left\|4\overrightarrow{M\Omega}\right\|=12$

لأن $\Omega$ مركز الرباعي OABC .

(*) تكافئ $\left\|\overrightarrow{M\Omega}\right\|=3$ و عليه مجموعة النقط $(E)$ هي

دائرة مركزهـا $\Omega$ و نصف قطرها 3 .

ملاحظة : إنشاء (E) في الشكل السابق .

3- أ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ؛ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية : $z^2-6z+13=0$ .

لحل هذه المعادلة نستعمل المميز المختصر $\Delta'=b'^2-ac$

لدينا : $\Delta'=(-3)^2-2(1)(13)=-4$ أي :

$\Delta'=(2i)^2$ و منه حلا المعادلة هما :

$z_1=3+2i$ ؛ $z_0=3-2i$

ب- تعيين مجموعة النقط M من المستوي :

لدينا : $|z-z_0|=|z-z_1|$ تكافئ :

$|z-z_A|=|z-z_B|$ تكافئ $MA=MB$

مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z هي محور القطعة المستقيمة [AB] .

# التمرين الثالث :

1- أ - كتابة تمثيلاً وسيطياً للمستقيم $(\Delta)$ :

لدينا $(\Delta)$ يشمل النقطة B و $\vec{u}(1;-4;-1)$ شعاع توجيه له .

$M(x,y,z)$ نقطة من $(\Delta)$ معناه $\overrightarrow{BM}=t\,\vec{u}$

( $t$ وسيط حقيقي )

لدينا : $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z-7\end{pmatrix}=t\,\vec{u}-\begin{pmatrix}t\\-4t\\-t\end{pmatrix}$

معناه $\begin{cases}x=t+2\\y=-4t+1\\a=-t+7\end{cases}$

الجملة الأخيرة هي تـمثيل وسيطي للمستقيم $(\Delta)$

ب- التحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$ :

$C\in(\Delta)$ معناه توجد قيمة وحيدة لـ $t$

تحقق الجملة $\begin{cases}3=t+2\\-3=-4t+1\\6=-t+7\end{cases}$ أي $\begin{cases}t=1\\t=1\\t=1\end{cases}$

جـ- بيان أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان :

لدينا :

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}.\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}=1.2+(-4)0+1(-2)=0$$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}=0$ إذن : $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB}$ متعامدان

د- استنتاج المسافة بين النقطة A و المستقيم $(\Delta)$ :

المسافة بين النقطة A و المستقيم $(\Delta)$ هي الطول AB

لأن $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AB}$ و النقطتان B و C تنتميان إلى المستقيم $(\Delta)$ .

و منه $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=2\sqrt{2}$

2-أ- كتابة عبارة $h(t)$ بدلالة $t$ :

لدينا : $h(t)=AM$

$$AM=\sqrt{(2+t)^2+(-4t)^2+(2-t)^2}=\sqrt{18t^2+8}$$

ب-بيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $t$ : $h'(t)=\dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$ :

لدينا $h(t)=\sqrt{18t^2+8}$ و منه :

$$h'(t)=\frac{2\times18t}{2\sqrt{18t^2+8}}=\frac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$$

جـ- استنتاج قيمة العدد الحقيقي $t$ التي تكون من أجلها المسافة AM اصغر ما يمكن .

تكون المسافة AM أصغر ما يمكن عندما يكون للدالة $h$ قيمة حدية صغرى (ينعدم المشتق ويغير إشارته) .

$h'(t)=0$ معناه $\dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}=0$ و منه $t=0$

إشارة المشتق : $h'(t)$ هي حسب الجدول التالي :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

المقارنة بين القيمة الحدية الصغرى للدالة $h$ ؛ و المسافة بين النقطة A و المستقيم $(\Delta)$ .

نجد أن $h(0)=2\sqrt{2}=AB$

## التمرين الرابع :

$$f(x)=e^{x}-ex-1$$

1- أ - حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{x}-ex-1=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{x}-ex-1=+\infty-\infty \text{ ح.ع.ت}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^{x}}{x}-e-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^{x}}{x}\right)=+\infty$$

ب- حساب $f'(x)$ ثم دراسة إشارتها :

$f'(x)=e^{x}-e$ و إشارته هي : $\xrightarrow{\quad - \quad 1 \quad + \quad}$

جـ- تشكيل جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $-1$ | ↗ $+\infty$ |

2 - أ - بيان أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $(-\infty)$ :

لدينا المستقيم $(\Delta)$ له معادلة من الشكل $y=-ex-1$

لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-ex-1)]=\lim_{x\to-\infty}(e^{x})=0$$

و منه المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $(-\infty)$ .

ب- كتابـة معادلة للمماس $(T)$ :

(T) له معادلة من الشكل $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

و منه : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$$y=(1-e)(x-0)+0=(1-e)x$$

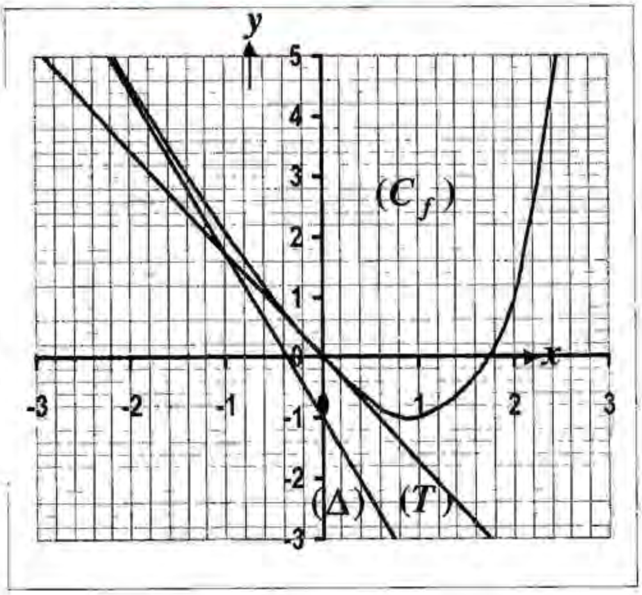
جـ- بيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجـال $]1,75\ ;\ 1,76[$ حلا وحيداً $\alpha$ :

الدالة $f$ مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[1,75\ ;\ 1,76]$

و : $f(1,75)\times f(1,76)<0$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجـال $]1,75\ ;\ 1,76[$ حلا وحيداً $\alpha$.

د- رسم المستقيمين $(\Delta)$ و $(T)$ ثم المنحنى $(C_f)$ على المجال $]-\infty, 2]$ :






3 - أ - حساب المساحة $A(\alpha)$ :

$$A(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x).dx=-\left[e^{x}-\frac{1}{2}ex^{2}-x\right]_0^{\alpha}$$

- نجد بعد الحساب : $A(\alpha)=\left(1-e^{\alpha}+\frac{1}{2}e^{\alpha^2}+\alpha\right)$

ب- إثبات أن $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\,\alpha^{2}-e\,\alpha+\alpha\right)ua$ :

لدينا $f(\alpha)=0$ من الجواب (2-جـ) و منه :

$e^{\alpha}=e.\alpha+1$ بتعويض $e^{\alpha}$ بما يساويها في عبارة $A(\alpha)$

نجد : $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\,\alpha^{2}-e\,\alpha+\alpha\right)u.a$

# الاختبار الثالث

**بكالوريا جـــوان 2010**

## التمرين الأول : (5 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب : $z_A = 1+i$ و $z_B = 3i$

1/ أكتب على الشكل الأسي : $z_A$ و $z_B$ .

2/ ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة 'M ذات اللاحقة 'z حيث :

$$z' = 2iz + 6 + 3i$$

أ/ عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S .

ب/ عين $z_C$ لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S .

جـ/ استنتج طبيعة المثلث ABC .

3/ لتكن النقطة D مرجح الجملة

$\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$ .

أ/ عين $z_D$ لاحقة النقطة D .

ب/ عين مع التبرير طبيعة الرباعي ABCD .

4/ لتكن النقطة M نقطة من المستوي تختلف عن B و عن D لاحقتها z و لتكن $(\Delta)$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\dfrac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

أ/ تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6+3i$ تنتمي إلى $(\Delta)$ .

ب/ أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\dfrac{z_B - z}{z_D - z}$ ، عين عندئذ المجموعة $(\Delta)$ .

## التمرين الثاني : (5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط :

$A(1;1;0)$ , $B(2;1;1)$ , $C(-1;2;-1)$

1/ أ/ بين أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .

ب/ بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي :

$$x + y - z - 2 = 0$$

2/ نعتبر المستويين (P) و (Q) اللذين معادلتهما على الترتيب :

$$(P):\ x + 2y - 3z + 1 = 0$$

و $$(Q):\ 2x + y - z - 2 = 0$$

و المستقيم (D) الذي يشمل النقطة $F(0;4;3)$ و $\vec{u}\ (-1;5;3)$ شعاع توجيه له .

أ/ أكتب تمثيلا وسطيا للمستقيم (D) .

ب/ تحقق أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D) .

3/ عين تقاطع المستويات الثلاثة (ABC) ، (P) و (Q) .

## التمرين الثالث : (10 نقاط)

I/ لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ بـ : $f(x) = 1 + \ln(2x-1)$

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ .

2/ بين أن الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $I$ ثم شكل جدول تغيراتـها .

3/ عين فاصلة النقطة من $(C_f)$ التي يكون فيها المماس مـوازيا للمستـقيم (d) ذي الـمـعادلة $y = x$ .

4/ أ/ أثبت أنه من أجل كل $x$ من $I$ يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$$f(x) = \ln(x + a) + b$$

حيث : a و b عددان حقيقيان يطلب تعينهما .

ب/ استنتج أنه يمكن رسم $(C_f)$ انطلاقا من $(C)$ منحنى الدالة اللوغارتمية النيبرية ln ثـم أرسم $(C)$ و $(C_f)$ .

**II/** نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $I$ بـ :

$$g(x)=f(x)-x$$

1/ أحسب $\lim_{x\to\frac{1}{2}^{>}} g(x)$ ثم بين أن $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

2/ أدرس اتجاه تغير الدالة g على $I$ ثم شكل جدول تغيراتها

3/ أ/ أحسب $g(1)$ ثم بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المـجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ حـلا وحيدا $\alpha$ .

تحقق أن $2<\alpha<3$ .

ب/ أرسم $(C_g)$ منحنى الدالة g على المجال $\left]\frac{1}{2};5\right]$ في المعلم السابق .

4/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $I$ ثم حدد وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(d)$ .

5/ برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;\alpha[$ فإن : $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1;\alpha[$ .

**III/** نسمي $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي : $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)$

1/ عين قيمة العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون :

$u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$ .

2/ أحسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث :

$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$

# حل الاختبار الثالث

## التمرين الاول :

1/ كتابة $z_A$ و $z_B$ على الشكل الأسي :

لدينا $|z_A|=\sqrt{2}$ و $\arg(z_A)=\frac{\pi}{4}$

ومنه : $z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

لدينا $|z_B|=3$ و $\arg(z_B)=\frac{\pi}{2}$

ومنه: $z_B=3e^{i\frac{\pi}{2}}$

2/ أ/ نسبة التشابه المباشر هو $|2i|=2$ و زاويته هي $\arg(2i)$ أي $\frac{\pi}{2}$ و مركزه هو النقطة $\omega$ التي لاحقتها $z_0$ تحقق $z_0=2iz_0+6+3i$ أي : $z_0=3i$

و منه نستنتج أن : $\omega=B$ .

ب/ تعيين $z_C$ لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S

صورة النقطة A بالتشابه تحقق العلاقة :

$$z_C=2iz_A+6+3i=4+5i$$

جـ/ بما أن C صورة A بالتشابه الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{2}$ فهذا يعني أن المثلث ABC مثلث قائم الزاوية في B .

3/ أ/ بما أن D مرجح الجملة $\{(A,2),(B,-2)(C,2)\}$

فإن : $2\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ أي : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

أي : $z_D-z_A=z_C-z_B$ أي : $z_D=5+7i$ .

ب/ لدينا $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ في الرباعي ABCD و منه : الرباعي ABCD متوازي أضلاع و لدينا المثلث ABC قائم في B و بالتالي الرباعي ABCD هو مستطيل .

4/ أ/ لدينا : $\frac{z_B-z_E}{z_D-z_E}=\frac{3i-6-3i}{5+3i-6-3i}=6$

و هو عدد حقيقي موجب إذن $E \in (\Delta)$ .

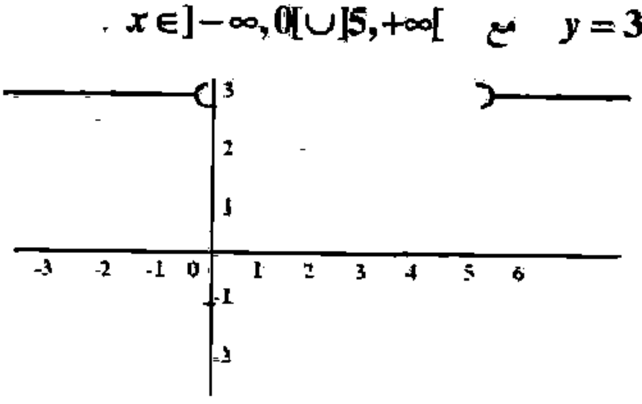
ب/ عمدة العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ هو قيس الزاوية $(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MB})$

لدينا بعد وضع $z = x + iy$ حيث $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

نـجد أن $\frac{z_B - z}{z_D - z} \in \Re_+^*$ تعني $y = 3$ مع $x \neq 5$

مع $x^2 - 5x > 0$ أي : $x \in ]-\infty,0[\cup]5,+\infty[$

أي أن مجموعة النقط $(\Delta)$ هي تقاطع المستقيم ذي المعادلة $y = 3$ بإستثناء النقطة $S(5,3)$ مع المجموعة $]-\infty,0[\cup]5,+\infty[$ أي هي إتحاد نصفي المستقيمين $y = 3$ مع $x \in ]-\infty,0[\cup]5,+\infty[$ .




## الـتمرين الثاني :

1/ أ/ لا يوجد عدد حقيقي $k$ بحيث : $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

و لدينا : $\overrightarrow{AC}(-2,1,-1)$ و $\overrightarrow{AB}(1,0,1)$

فهذا يعني أن النقط $A$ , $B$ , $C$ ليست في استقامية .

ب/ تبيان أن المعادلة الديكارتية للمستوي $(ABC)$ هي :

$$x + y - z - 2 = 0$$

نعوض إحداثيات كل نقطة من النقط $A$ , $B$ , $C$ في المعادلة و نتأكد من أنها تحقق المعادلة .

2/ أ/ يعطى التمثيل الوسيط للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $F(0,4,3)$ و شعاع توجيه له $\vec{u}(-1,5,3)$

كمايلي : $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 5\lambda + 4 \\ z = 3\lambda + 3 \end{cases}$ مع $\lambda$ عدد حقيق كيفي

ب/ طريقة 1 : تقاطع المستويين $(P)$ و $(Q)$ هو مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق :

$\begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ نضع $z = t$

نحصل على : $\begin{cases} x + 2y = 3t - 1 \\ 2x + y = t + 1 \\ z = t \end{cases}$

أي : $\begin{cases} x = -\frac{1}{3}t + 1 \\ y = \frac{5}{3}t - 1 \\ z = t \end{cases}$ نضع $t = 3\lambda + 3$

نجد : $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 5\lambda + 4 \\ z = 3\lambda + 3 \end{cases}$

و هو التمثيل الوسيطي بـمستقيم $(D)$ .

طريقة 2 :

بما أن $(D)$ مستقيم التقاطع بين المستويين $(P)$ و $(Q)$ فهذا يعني أن إحداثيات نقط $(D)$ تحقق معادلتي المستويين :

إحداثيات نقط المستقيم $(D)$ هي : $(-\lambda, 5\lambda + 4, 3\lambda + 3)$

تحقق معادلة $(P)$ لاحظ أن :

$$-\lambda + 2(5\lambda + 4) - 3(3\lambda + 3) + 1 = 0$$

و وكذلك بالنسبة لمعادلة المستوي $(Q)$ .

3/ تعيين تقاطع المستويات الثلاثة $(ABC)$ ، $(P)$ و $(Q)$ :

لدينا : $(Q) \cap (P) = (\Delta)$

مجموعة نقط تقاطع المستويين $(ABC)$ و $(P)$ تحقق إحداثياتها الجملة التالية : $\begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x + 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$

بالتعويض في الجملة حيث $z = t$ فنجد :

$\begin{cases} x = -t + 5 \\ y = 2t - 3 \\ z = t \end{cases}$

و هو تـمثيل وسيطي مستقيم شعاع توجيهه $\vec{\omega}(-1,2,1)$

بنفس الطريقة نـجد تقاطع المستـوي $(ABC)$ و $(Q)$

هو المستقيم ذو التمثيل
$$\begin{cases} x = 5t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t \end{cases}$$

## التمرين الثالث:

**I/ 1/** أحساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\stackrel{>}{\to}\frac{1}{2}} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{و}\quad \lim_{x\stackrel{>}{\to}\frac{1}{2}} f(x) = -\infty$$

**2/** الدالة $f$ تقبل الإشتقاق على $I$ و لدينا :

$f'(x) = \dfrac{2}{2x-1}$ و لدينا $f'(x) > 0$ في $I$

إذن الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $I$ .

جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

**3/** حتى يكون المماس (d) موازيا للمنصف الأول يجب أن يتحقق مايلي :

$f'(x_0) = 1$ حيث : $x_0$ فاصلة النقطة المطلوبة .

لدينا : $f'(x_0) = 1$ تعني : $\dfrac{2}{2x_0 - 1} = 1$ أي : $x_0 = \dfrac{3}{2}$

**4/ أ/** إثبات أنه من أجل كل $x$ من $I$ يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x) = \ln(x + a) + b$

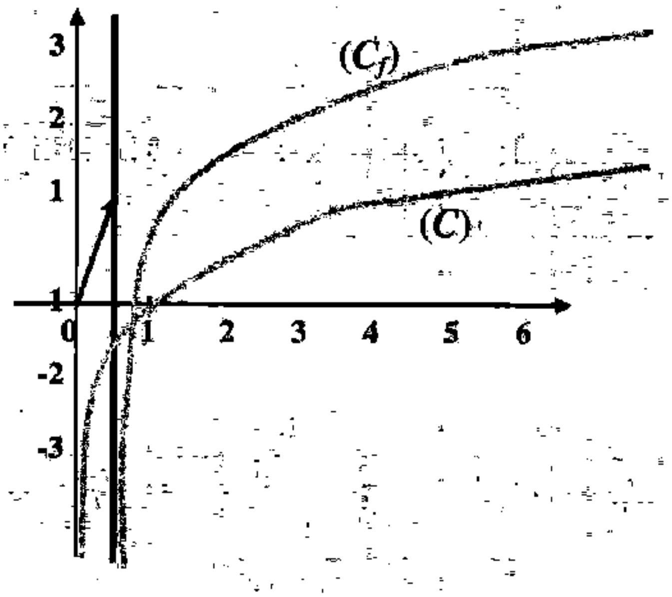
لدينا من أجل كل $x$ من $I$ :

$$f(x) = 1 + \ln(2x-1) = 1 + \ln 2(x - \frac{1}{2})$$
$$= 1 + \ln 2 + \ln(x - \frac{1}{2}) = \ln(2e) + \ln(x - \frac{1}{2})$$

و منه : $a = -\dfrac{1}{2}$ و $b = \ln 2e$

ب/ استنتاج أنه يمكن رسم $(C_f)$ انطلاقا من $(C)$ منحنى الدالة اللوغارتمية النيبرية $\ln$ ثـم رسم $(C)$ و $(C_f)$ :

حسب الكتابة $f(x) = \ln(x+a) + b$ فإن $(C_f)$ هو صورة $(C)$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(\frac{1}{2}, \ln 2e)$ و بالتالي يكون رسم $(C)$ و $(C_f)$ كما يلي : $\ln 2e \approx 1,7$




**II/ 1/** حساب $\lim\limits_{x\stackrel{>}{\to}\frac{1}{2}} g(x)$

$$\lim_{x\stackrel{>}{\to}\frac{1}{2}} g(x) = \lim_{x\stackrel{>}{\to}\frac{1}{2}} 1 + \ln(2x-1) - x = -\infty$$

تبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \ln(2x-1) - x$$
$$= \lim_{x\to+\infty} 1 + x\left(\frac{\ln(2x-1)}{x} - 1\right) = -\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(2x-1)}{x} = 0$

**2/** دراسة اتجاه تغير الدالة $g$ على $I$ ثم تشكيل جدول تغيراتها :

الدالة $g$ تقبل الإشتقاق على $I$ و لدينا : $g'(x) = \dfrac{3-2x}{2x-1}$

$g'(x) = 0$ تعني $x = \dfrac{3}{2}$

حيث : $g'(x) > 0$ لما $x < \dfrac{3}{2}$

و $g'(x) < 0$ لما $\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{2}$

- جدول تغيرات الدالة g :     نأخذ $g\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0,19$

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | + | 0 | - | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\frac{1}{2}+\ln 2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

3/ أ/ حساب $g(1)$ :     $g(1)=0$

الدالة g رتيبة تماما على المجال $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$ ( متناقصة تماما )

و بالتالي صورة المجال $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$ بالدالة g هي المجال

$\left]-\infty,-\frac{1}{2}+\ln 2\right[$ و بما أن : $-\frac{1}{2}+\ln 2>0$

فهذا يعني أن 0 ينتمي إلى المجال $\left]-\infty,-\frac{1}{2}+\ln 2\right[$

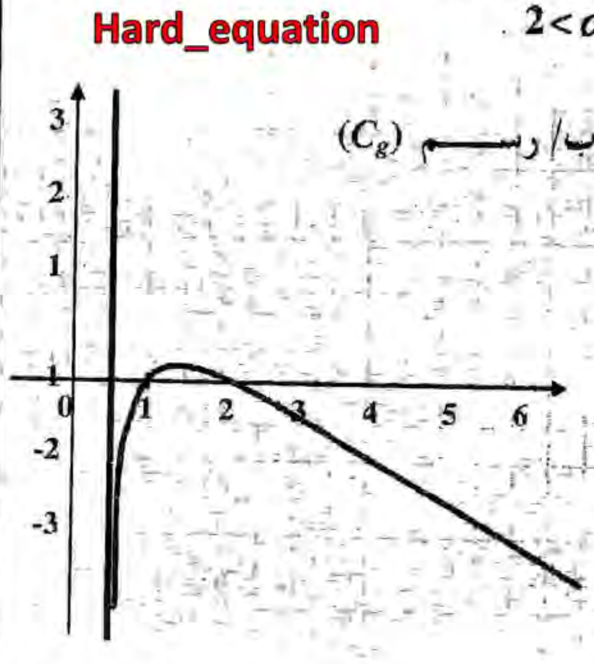
وحسب نظرية القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$

من المجال $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$ بحيث $g(\alpha)=0$

الدالة g رتيبة تماما على المجال $]2,3[$ و لدينا $g(2)\,g(3)<0$ و بما أن $\alpha$ وحيد فهذا يعني أن $2<\alpha<3$ .

**Hard_equation**

ب/ رسم $(C_g)$



4 / استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $I$ :

لاحظ البيان : $g(x)\geq 0$ لــما $x\in[1,\alpha]$ و $g(x)\leq 0$ لــما $x\in\left]\frac{1}{2},1\right]\cup[\alpha,+\infty[$ .

- تحديد وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(d)$ :

لتحديد وضعية المنحني $(C_f)$ بالنسبة إلى $(d)$ ندرس إشــارة الفرق $f(x)-x$ أي $g(x)$ و كما هو موضح سابقا فإن : في المجال $[1,\alpha]$ يكون $(C_f)$ تحت $(d)$ و في المجال $\left]\frac{1}{2},1\right]\cup[\alpha,+\infty[$ يكون $(C_f)$ فوق $(d)$ .

5/ الدالة $f$ متزايدة تماما على $[1,\alpha]$ و بالتالي من أجل $1\leq x\leq\alpha$ نجد :

$f(1)\leq f(x)\leq f(\alpha)$ و لكن :

$f(1)=1$ و $f(\alpha)=g(\alpha)+\alpha=\alpha$

لأن : $g(\alpha)=0$ و منه : $1\leq f(x)\leq\alpha$

III/ 1/ تعين قيمة العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون :

$u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$ .

لدينا $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)=1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

و بالتالي : $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$

تعني : $1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+2\ln 3-3\ln 2$

أي : $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{9}{8}$     ومنه : $n=8$ وهو المطلوب .

2/ حساب المجموع $S_n$ بدلالة $n$ حيث :

$$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=$$

$$1+\ln\left(1+\frac{1}{2\times 1}\right)+1+\ln\left(1+\frac{1}{2\times 2}\right)+\ldots+1+\ln\left(1+\frac{1}{2\times n}\right)$$

$$=n+\ln\left(\frac{3}{2\times 1}\right)+\ln\left(\frac{5}{2\times 2}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{2n+1}{2\times n}\right)$$

$$=n+\ln\frac{3\times 5\times 7\times\ldots\times(2n+1)}{2^2\times 1\times 2\times 3\times\ldots\times n}$$

$$=n+\ln\frac{3\times 5\times 7\times\ldots\times(2n+1)\times 2\times 4\times 6\times\ldots\times 2n}{2^n\times(1\times 2\times 3\times\ldots\times n)^2\times 2^n}$$

$$=n+\ln\frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

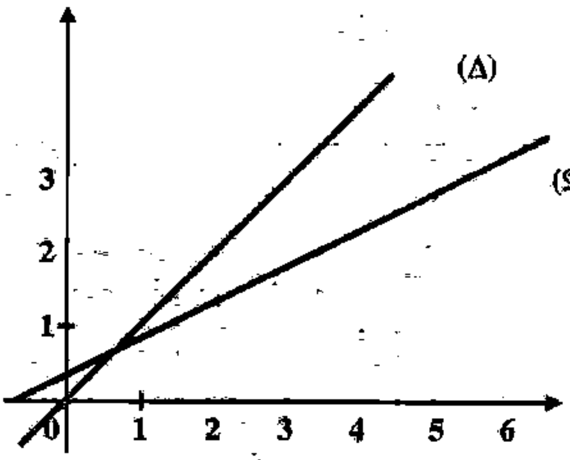
ومنه : $S_n=n+\ln\frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}$

# الاختبار الرابع

**بكالوريا جوان 2010**

## التمرين الأول : (5 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس مثلنا المستقيمين $(\Delta)$ و $(D)$ معادلتيهما على الترتيب : $y = x$ و $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$ .




1/ لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$

و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ،

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}$$

أ/ أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية : $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ و $u_4$

دون حسابها مبرزا خطوط الرسم .

ب/ عين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين $(\Delta)$ و $(D)$ .

جـ/ أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ .

2/ أ/ باستعمال الإستدلال بالتراجع ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n > \frac{2}{3}$ .

ب/ استنتج اتجاه تغيرات المتتالية $(u_n)$ .

3/ نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بالعلاقة : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$

أ/ بين أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول .

ب/ أكتب بدلالة $n$ عبارة الحد العام $v_n$ ، و استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$ .

جـ/ أحسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

و استنتج المجموع $S'_n$ حيث : $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

## التمرين الثاني : (4 نقاط)

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 6z + 18 = 0$ ، ثم أكتب الحلين على الشكل الأسي .

2/ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$

نعتبر النقط $A$ , $B$ , $C$ و $D$ لاحقاتها على الترتيب :

$$z_D = -z_B \quad ; \quad z_C = -z_A$$
$$z_B = \bar{z}_A \quad ; \quad z_A = 3 + 3i$$

أ/ بين أن النقط $A$ , $B$ , $C$ و $D$ تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز $O$ مبدأ المعلم .

ب/ عين زاوية للدوران $R$ الذي مركزه $O$ و يحول النقطة $A$ إلى النقطة $B$ .

جـ/ بـين أن النقط $A$ ، $O$ و $C$ في إستقامية و كذلك النقط $B$ ، $O$ و $D$ .

د/ استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$ .

## التمرين الثالث : (4 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j};\vec{k})$

نعتبر المستوي $(p)$ الذي معادلته : $x - 2y + z + 3 = 0$

1/ نذكر أن حامل محور الفواصل $(O\,;\vec{i})$ يعرف بالجملة :

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

– عين إحداثيات $A$ نقطة تقاطع حامل $(O\,;\vec{i})$ مع المستوي $(p)$ .

2/ $B$ و $C$ النقطتان من الفضاء حيث :

$C(-1\,;-4\,;2)$ و $B(0\,;0\,;-3)$ .

أ/ تحقق أن النقطة $B$ تنتمي إلى المستوي $(p)$ .

ب/ أحسب الطول $AB$ .

جـ/ أحسب المسافة بين النقطة $C$ و المستوي $(p)$ .

3/ أ/ أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ المار بالنقطة $C$ و العمودي على المستوي $(p)$ .

ب/ تحقق أن النقطة $A$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$ .

جـ/ أحسب مساحة المثلث $ABC$ .

## التمرين الرابع : (7 نقاط)

تعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي :

$$f(x)=x-\frac{1}{e^{x}-1} .$$

نرمز بـ $(C_f)$ لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1/ أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

ب/ أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$

و فسر هندسيا النتيجة .

2/ أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها .

3/ أ/ بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين مائلين $(\Delta)$ و $(\Delta')$ معادلتيهما على الترتيب :

$y=x$ و $y=x+1$ .

ب/ أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى كل من $(\Delta)$ و $(\Delta')$ .

4/ اثبت أن النقطة $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$ .

5/ أ/ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث : $\ln 2<\alpha<1$ و $-1{,}4<\beta<-1{,}3$ .

ب/ هل توجد مماسات لـ $(C_f)$ توازي المستقيم $(\Delta)$ ؟

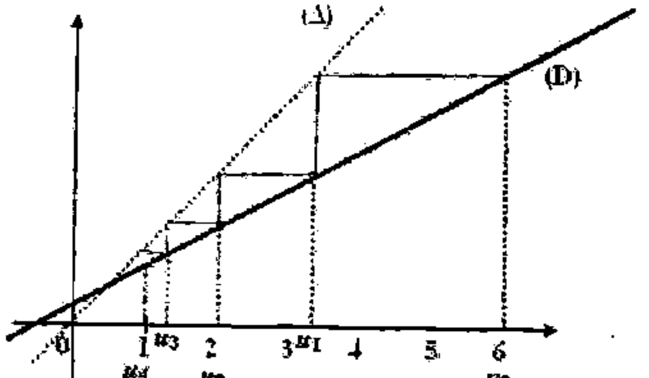
جـ/ أرسم $(\Delta)$ ، $(\Delta')$ ثم المنحنى $(C_f)$ .

د/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x}=m$

# حل الاختبار الرابع

## التمرين الاول :

1/ أ/ نقل الشكل ثم تمثيل على محور الفواصل الحدود التالية : $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ و $u_4$




ب/ تعيين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين $(\Delta)$ و $(D)$ :

فاصلة نقطة التقاطع $(\Delta)$ و $(D)$ هي حلول المعادلة

$x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$ أي $x-\frac{1}{2}x=\frac{1}{3}$

أي $x=\frac{2}{3}$ و منه : $y=\frac{2}{3}$

إذن : $(\Delta)\cap(D)=\left\{H\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}$

جـ/ إعطاء تخمينا حول اتجاه تغيير المتتالية $(u_n)$ :

التخمين الذي يمكن إعطاءه هو أن المتتالية متناقصة تماما .

2/ أ/ الخاصية صحيحة من أجل $n=0$ لأن : $u_0>\frac{2}{3}$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي $u_n>\frac{2}{3}$

و نثبت أنها صحيحة من أجل n + 1 أي $u_{n+1}>\frac{2}{3}$

لدينا $u_n>\frac{2}{3}$ تعني $\frac{1}{2}u_n>\frac{1}{3}$ و تعني أيضا :

$\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}>\frac{2}{3}$ أي : $u_{n+1}>\frac{2}{3}$

و منه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n=\frac{2}{3}$

ب/ لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$ :

$u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}$ / لكن $u_n>\frac{2}{3}$

أي $-\frac{1}{2}u_n<-\frac{1}{3}$ و منه : $-\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}<0$

أي : $u_{n+1}-u_n<0$

و بالتالي فإن المتتالية $(u_n)$ متناقصة تــماما .

3/ أ/ تبيين أن المتتالية $(v_n)$ هندسية: من أجل كل $n$ طبيعي

$$v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\left(u_n-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}v_n$$

إذن $(v_n)$ متتالية هندسية .

أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=\frac{16}{3}$ .

ب/ عبارة الحد العام لــ : $(v_n)$ هي :

$$v_n=\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

لدينا من أجل كل $n$ طبيعي $u_n=v_n+\frac{2}{3}$

و منه $u_n=\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}$

جـ/ / حساب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ :

$$S_n=-\frac{32}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right)$$

$$S'_n=u_0+u_1+...+u_n=\left(v_0+\frac{2}{3}\right)+\left(v_1+\frac{2}{3}\right)+...+\left(v_n+\frac{2}{3}\right)$$

$$=S_n+\frac{2}{3}(n+1)$$

أي : $S'_n=-\frac{32}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right)+\frac{2}{3}(n+1)$

## التمرين الثاني :

1/ مــميز المعادلة $z^2-6z+18=0$ هو $-36$

و بالتالي فالعدد $6i$ هو أحد جذري المميز .

و منه : للمعادلة حلين هما $3-3i$ و $3+3i$ .

$3+3i=3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $3-3i=3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2/ أ / لإثبات أن النقط $A$ , $B$ , $C$ , $D$ تنتمي إلى دائرة مركزها $O$ نبين أن :

$OA = OB = OC = OD$ حيث : $OD=|z_D|$ و $OC=|z_C|$ و $OB=|z_B|$ و $OA=|z_A|$

لدينا : $|z_B|=|\overline{z_A}|=|z_A|$ و $|z_C|=|-z_A|=|z_A|$ و $|z_D|=|-z_B|=|-\overline{z_A}|=|z_A|$

و منه : $OA = OB = OC = OD$

أي أن النقط $A$ , $B$ , $C$ , $D$ تنتمي إلى دائرة مركزها $O$ .

ب/ تعيين زاوية للدوران $R$ الذي مركزه $O$ و يحول النقطة $A$ إلى النقطة $B$ : زاوية الدوران $R$ الذي يحول $A$ إلى $B$ هي عمدة العدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$

أي : $\frac{3+3i}{-3-3i}$ أي : $-i$ و منه زاوية الدوران هي $-\frac{\pi}{2}$ .

جـ/ النقط $A$ , $O$ , $C$ في استقامية تعني :

$$(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA})=k\pi$$

حيث $k\in\Re$ أي : $\arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right)=k\pi$

لدينا $\frac{z_A}{z_C}=\frac{3+3i}{-3-3i}=-1$ و منه : $\arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right)=-\pi$

وبالتالي فإن $A$ , $O$ , $C$ في إستقامية .

ملاحظة : بنفس الطريقة السابقة نبين إستقامية النقط $B$ , $O$ , $D$ .

د/ طبيعة $ABCD$ : من النتائج السابقة يتبين لنا أن قطعتا المستقيم $[DB]$ و $[CA]$ متناصفتان في $O$ و هما أقطار دائرة فهما متقايسان و لدينا $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=-\frac{\pi}{2}$

فهذا يعني أن : $ABCD$ مربع .

## التمرين الثالث :

1/ تعيين إحداثيات $A$ نقطة تقاطع حامل $(O;\vec{i})$ مع المستوي $(p)$

نعوض $y$ بــ $0$ و $z$ بــ $0$ في معادلة $(P)$ نحصل على $x=-3$

و بالتالي إحداثيات $A$ هي $(-3,0,0)$ .

2/ أ/ التحقق من أن النقطة B تنتمي إلى المستوي $(p)$ :

تأكد من أن إحداثيات B تحقق معادلة (P) .

ب/ حساب الطول AB : لدينا $\overline{AB}(0;0;-3)$

و منه : $AB=\sqrt{9+0+9}=3\sqrt{2}$

جـ/ حساب المسافة بين النقطة C و المستوي $(p)$ :

لتكن المسافة المطلوبة هي d ، ومنه :

$$d=\frac{|x_c-2y_c+z_c+3|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{12}{\sqrt{6}}$$

3/ أ/ التمثيل الوسيطي للمستقيم $(\Delta)$ :

بما أن $(\Delta)$ عمودي على (P) فهذا يعني أن شعاع توجيه $(\Delta)$ هو ناظمي لــ (P) و مركبات الشعاع الناظمي للمستوي هي (1 , -2 , 1) و بالتالي التمثيل الوسيطي للمستقيم الذي يشمل C (-1 , -4 , 2) و شعاع توجيه له $\vec{u}(1,-2,1)$ هي :

$$\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=-4-2\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$$

مع $\lambda$ عدد حقيقي كيفي .

ب/ التحقق من أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$ :

لكي تكون A نقطة من $(\Delta)$ نبحث عن عدد حقيقي وحيد $\lambda$ يحقق

$$\begin{cases} -3=-1+\lambda \\ 0=-4-2\lambda \\ 0=2+\lambda \end{cases}$$

واضح أن $\lambda=-2$ يحقق الجملة و منه A نقطة من $(\Delta)$ .

جـ/ حساب مساحة المثلث ABC :

$$\text{مساحة المثلث ABC} = \frac{1}{2}d\times AB = 6\sqrt{3}$$

حيث : $d=\frac{12}{\sqrt{6}}$ و $AB=3\sqrt{2}$

## التمرين الرابع :

1/ أ/ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب/ $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ لأن الدالة $x\mapsto e^x-1$ متزايدة تماما .

وهذا يعني أن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مستقيم مقارب للمنحنى $(C_f)$ .

2/ دراسة اتجاه تغير الدالة $f$ :

الدالة $f$ تقبل الإشتقاق على مجالي تعريفها :

لدينا $f'(x)=1+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$

واضح أن $f'(x)>0$ إذن الدالة $f$ متزايدة تماما على مجالي تعريفها .

جدول تغيرات الدالة الدالة $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | \|\| | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

3/ أ/ تبيين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين مائلين : لدينا

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x-1}=0$ مما يعني أن $(\Delta)$ مستقيم مقارب لــ $(C_f)$ عند $+\infty$

و لدينا أيضا :

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x-1)=\lim_{x\to-\infty}(-1+\frac{1}{e^x-1})=0$$

لأن $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ ممايعني أن $(\Delta')$ مستقيم مقارب لــ $(C_f)$ عند $-\infty$

ب/ وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-x$ أي : $-\frac{1}{e^x-1}$

الجدول الموالي يوضح إشارة $-\frac{1}{e^x-1}$ :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\frac{1}{e^x-1}$ | $-\infty$ | $+$ | $0$ | $+$ | $+\infty$ |

إذن في المجال $]-\infty\,;\,0[$ يكون $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ و في المجال $]0\,;\,+\infty[$ يكون $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ .

وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta')$ ندرس الفرق $f(x)-x-1$ أي : $\frac{-e^x}{e^x-1}$

| $\frac{-e^x}{e^x-1}$ | $-\infty$ + 0 + $+\infty$ |
|---|---|

إذن في المجال $]-\infty\,;\,0[$ و في المجال يكون $(C_f)$ فوق $(\Delta')$ و في المجال $]0\,;\,+\infty[$ يكون $(C_f)$ تحت $(\Delta')$ .

4/ حتى تكون النقطة $\omega\,(0\,;0{,}5)$ مركز تناظر $(C_f)$ يجب أن يتحقق مايلي :

مجموعة التعريف تكون متناظرة بالنسبة للعدد 0 . و هو محقق ، من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$ :

$$f(-x)+f(x)=2\times\frac{1}{2}=1$$

لدينا : $f(-x)+f(x)=-x-\frac{1}{e^{-x}-1}+x-\frac{1}{e^{-x}-1}$

$$=-\frac{e^x}{1-e^x}-\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{e^x-1}=1$$

مما يعني أن النقطة $\omega\,(0\,;0{,}5)$ هي مركز تناظر $(C_f)$ .

5/ أ/ الدالة $f$ رتيبة تماما على المجال $[\ln 2, 1]$ و لدينا :

$$f(1)f(\ln 2)<0$$

لأن : $f(\ln 2)\approx -0{,}31$ و $f(1)\approx 0{,}42$

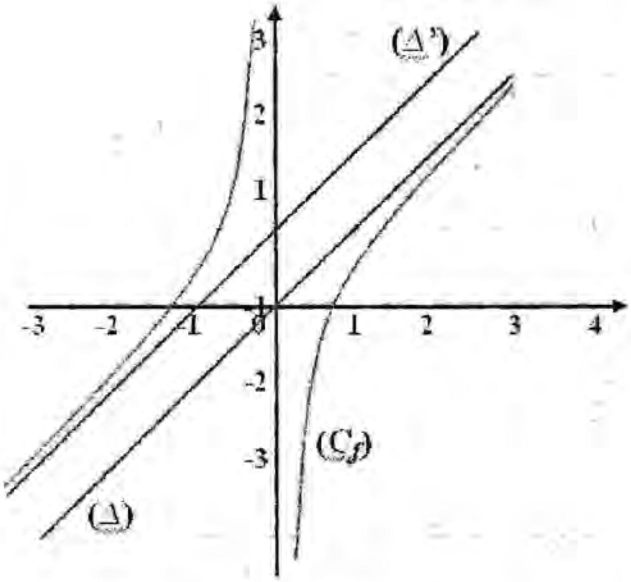
و حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد من المجال $[\ln 2, 1]$ بحيث $f(\alpha)=0$ و بنفس الطريقة نثبت وجود العدد الحقيقي $\beta$ من المجال $[-1{,}4;-1{,}3]$ بحيث $f(\beta)=0$ .

ب/ مماسات $(C_f)$ التي توازي المستقيم $(\Delta)$ تحقق $f'(x)=1$

أي : $1+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=1$ أي $\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=0$

هذه المعادلة ليست لها حلول في $\mathbb{R}^*$ أي أنه لا توجد مماسات توازي $(\Delta)$ .

جـ/ رسم $(\Delta)$ ، $(\Delta')$ و $(C_f)$ :




د/ مناقشة حلول المعادلة $(m-1)e^{-x}=m$

في حالة $\mathrm{m}=1$ المعادلة $(m-1)e^{-x}=m$ تكافئ $\mathrm{m}=0$ و هذا مناقض للفرضية و منه لا توجد حلول للمعادلة في هذه الحالة .

في حالة $\mathrm{m}=0$ المعادلة $(m-1)e^{-x}=m$ تكافئ $\mathrm{m}=0$ و $\mathrm{m}=1$ و هذا مناقض للفرضية و منه لا توجد حلول للمعادلة في هذه الحالة .

في حالة $\mathrm{m}\neq 1$ المعادلة $(m-1)e^{-x}=m$ تكافئ $e^{-x}=\frac{m}{m-1}$

إذا كان $\frac{m}{m-1}<0$ أي $m\in\,]0\,,\,1[$ فإن المعادلة $e^{-x}=\frac{m}{m-1}$ ليست لها حلول في $\mathbb{R}$ .

إذا كان $\frac{m}{m-1}>0$ أي $m\in\,]-\infty\,,\,0[\,\cup\,]1\,,\,+\infty[$

فإن المعادلة $e^{-x}=\frac{m}{m-1}$ تكافئ $-x=\ln\frac{m}{m-1}$

أي $x=\ln\frac{m-1}{1}$

يمكن تلخيص النتائج السابقة في الجدول التالي :

| حلول $(m-1)e^{-x}=m$ | $m$ |
|---|---|
| $\varnothing$ | $[0\,,\,1]$ |
| $x=\ln\frac{m-1}{1}$ | $]-\infty\,,\,0[\,\cup\,]1\,,\,+\infty[$ |

# الاختبار الخامس

**بكالوريا جوان 2009**

## التمرين الأول : (3,5 نقاط)

$(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$u_{n+2}=\frac{4}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n \quad \text{و :} \quad u_1=2$$

و : $u_0=1$ . المتتالية $(v_n)$ معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$v_n=u_{n+1}-u_n \; .$$

1- أحسب $v_0$ و $v_1$ .

2- برهن أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

3- أ) أحسب بدلالة $n$ المجموع :

$$S_n=v_0+v_1+.....+v_{n-1}$$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ :

$$u_n=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$$

جـ) بين أن $(u_n)$ متقاربة .

## التمرين الثاني : (5 نقاط)

$P(Z)$ كثير حدود حيث :

$$P(Z)=(Z-1-i)(Z^2-2Z+4)$$

و $Z$ عدد مركب :

1- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(Z)=0$ .

2- نضع : $Z_1=1+i$ ، و : $Z_2=1-\sqrt{3}\,i$

أ- أكتب $Z_1$ و $Z_2$ على الشكل الأسي .

ب- أكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي

جـ- استنتج القيمة المضبوطة لكل من

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) \text{ و } \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) .$$

3- أ) $n$ عدد طبيعي عين قيم $n$ حيث يكون العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقياً .

3- ب) أحسب قيمة العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$ .

## التمرين الثالث : (4 نقاط)

الفضاء مزود بمعلم متعامد و متجانس $\left(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$

نعتبر النقط : $A(1\,;0\,;2)$ ، $B(0\,;2\,;1)$ ، $C(2\,;1\,;3)$

1- $(P)$ مستو معادلة له من الشكل : $X-Z+1=0$

أ ) بين المستوي $(P)$ هو المستوي $(ABC)$ .

ب) ما طبيعة المثلث $ABC$ .

2- أ ) تحقق أن النقطة $D(2\,;3\,;4)$ لا تنتمي إلى $(ABC)$

ب ) ما طبيعة $ABCD$ .

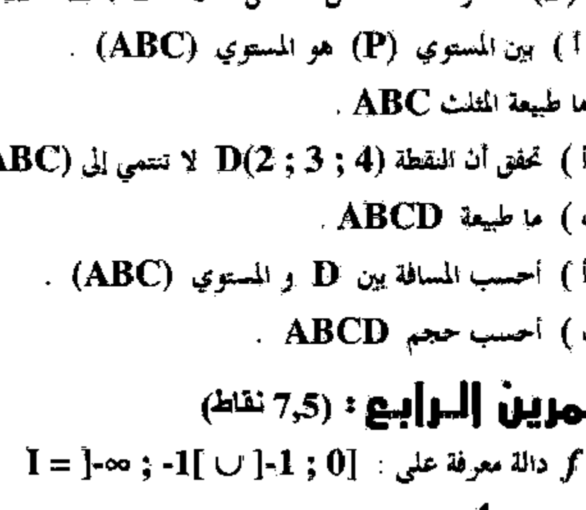
3- أ ) أحسب المسافة بين $D$ و المستوي $(ABC)$ .

ب ) أحسب حجم $ABCD$ .

## التمرين الرابع : (7,5 نقاط)

1- $f$ دالة معرفة على : $I=]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;0]$

بـ : $f(x)=-x+\frac{4}{x+1}$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس كما هي مبين في الشكل :




1- أ) أحسب نهايات $f$ عند الحدود المفتوحة لـ $I$ .

ب) بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات $f$ شكل جدول تغيراتها .

2- $g$ دالة معرفة المجال $]0 ; +\infty[$ كمايلـــــي :

$g(x) = x + \dfrac{4}{x+1}$ . و $(C_g)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

أ) أحسب نهاية $g$ عند $+\infty$ .

ب) تحقق من أن $(Cg)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ عند $+\infty$ يطلب تعين معادلة لــه .

جـ) أدرس تغيرات $g$ .

II) $k$ دالة معرفة على $R - \{-1\}$ كمايلي :

$$k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$$

1- أ) أحسب $\lim\limits_{h \xrightarrow{>} 0} \dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ، و : $\lim\limits_{h \xrightarrow{<} 0} \dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ . ماذا تستنتج ؟

ب) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة .

2- أكتب معادلتي المماسين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$ .

3- أرسم $(\Delta1)$ ، $(\Delta2)$ و $(Ck)$ .

4- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_k)$ و المستقيمات التي معادلاتها :

$$y = 0 \ ، \ x = \frac{1}{2} \ ، \ x = -\frac{1}{2} .$$

# حل الاختبار الخامس

## التمرين الاول :

1- حساب $v_0$ و $v_1$ :

لدينا : $v_n = u_{n+1} - u_n$

و منه : $v_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$

$$v_1 = u_2 - u_1 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3}$$

2- البرهان أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعين أساسها :

$(v_n)$ متتالية هندسية معناه : $v_{n+1} = v_n \times q$

لدينا : $v_n = u_{n+1} - u_n$ و منـــــــه :

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n - u_{n+1}$$

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_{n+1} - u_n\right) = \frac{1}{3}\, v_n$$

و منه $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{3}$

3- أ) حساب المجموع $S_n$ بدلالة $n$ :

لدينا : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ و منه :

$$S_n = v_0\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right] = 1\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right] = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

ب) البرهان أن : $u_n = \dfrac{3}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$ من أجل كل $n \in N$

لدينا : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

و منه: $S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1})$

بعد التـــبسيط : $S_n = -u_0 + u_n$

و منه : $u_n = u_0 + S_n$ ،

و أخيراً : $u_n = \dfrac{3}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right) + 1$

جـ) تبين أن $(u_n)$ متقاربة :

$(u_n)$ متقاربة معناه : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \alpha$ حيث : $\alpha \in \mathbb{R}$ ثابت . لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1=\frac{5}{2}$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ .

# التمرين الثاني :

1- حل المعادلة : $P(Z) = 0$ في المجموعة $\mathbb{C}$ .

لدينا : $P(Z) = 0$ معناه :

$$(Z-1-i)\,(Z^2 - 2Z + 4) = 0$$

و منه : $(Z^2 - 2Z + 4) = 0$ أو : $(Z-1-i) = 0$

و منه : $(Z-1-i) = 0$ أي : $Z = 1+i$ .

$$(\bigstar) \ldots\ldots (Z^2 - 2Z + 4) = 0$$

لحل المعادلة $(\bigstar)$ نستعمل المميز المختصر :

$\Delta' = b'^2 - ac$ لدينا : $\Delta' = (1)^2 - (1)(4) = -3$

أي : $\Delta' = \left(\sqrt{3}i\right)^2$ . ومنه حلي المعادلة $(\bigstar)$ هما :

$$z' = \frac{1-\sqrt{3}i}{1} \quad \text{و} \quad z'' = \frac{1+\sqrt{3}i}{1}$$

و منه حلول المعادلة $P(Z) = 0$ هي :

$$z = 1-\sqrt{3}i\ ,\ z = 1+\sqrt{3}i\ ,\ z = 1+i$$

2- أ) كتابة العددين $Z_1$ و $Z_2$ على الشكل الأسي :

لدينا : $z_1 = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$z_2 = 1-\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

ب) كتابة العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكلين الجبري و الأسي :

الشكل الجبري : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1+i)\,(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$

بضرب حديه في مرافق المقام و بعد الحسابات نجد :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1-\sqrt{3})+i\,(1+\sqrt{3})}{4} = \frac{(1-\sqrt{3})}{4}+i\,\frac{(1+\sqrt{3})}{4}$$

الشكل الأسي :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$$

جـ) استنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$

من الجواب السابق لدينا :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\,\sin\frac{7\pi}{12}\right)\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1-\sqrt{3})}{4}+i\,\frac{(1+\sqrt{3})}{4}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

بالمطابقة بين الشكلين نجد (1) و (2) نجد :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\,\sin\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{(1-\sqrt{3})}{4}+i\,\frac{(1+\sqrt{3})}{4}$$

و منه : $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{2(1-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

3- أ) تعيين قيم $n$ بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقياً :

لدينا : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{7n\pi}{12}\right)}$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left(\cos\frac{7n\pi}{12}+i\sin\frac{7n\pi}{12}\right)$$

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقياً معناه : $\sin\frac{7n\pi}{12} = 0$ و منه :

$$(k \in \mathbb{Z})\ \ n = 12k$$

ب) حســــــــاب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$ :

حسب دستور موافر لدينا :

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}\left(\cos\frac{7(456)\pi}{12}+i\sin\frac{7(456)\pi}{12}\right)$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}(\cos 0+i\sin 0)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}$$

لأن : $\frac{7(456)\pi}{12}=266\pi=(133)2\pi+0$

## التمرين الثالث :

1- أ) تبيين أن المستوي (P) هو المستوي (ABC) :

المستوي (P) هو المستوي (ABC) معناه أن احداثيات النقط A , B , C تحقق صحة معادلة (P) .

لدينا : $A \in (P)$ لأن : $1+0-2+1=0$ .

$B \in (P)$ لأن : $0+0(2)-1+1=0$

$C \in (P)$ لأن : $2+0(1)-3+1=0$

ب) تعيين طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ، و :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1.1+2.1-1.1=0$$

و منه المثلث ABC قائم في A .

2- أ ) التحقق أن النقطة D لا تنتمي للمستوي (ABC)

D لا تنتمي إلى (ABC) معناه : احداثيا النقطة D لا تحقق صحة المعادلة : $x-z+1=0$ .

لدينا : $2+0(3)-1(4)+1\neq 0$ .

و منه : $D\notin(ABC)$

ب) تعيين طبيعة ABCD :

ABCD هو رباعي وجوه .

3- أ ) حساب المسافة بين D و المستوي (ABCD) :

لدينا : $d(\Delta;ABC)=\frac{|1(2)+0(3)-1(4)+1|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ب/ حساب حجم رباعي الوجوه ABCD :

$V=\frac{1}{3}S.h$ حيث $h=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $S=\frac{1}{2}AB\,.\,AC$

لدينا : $AB=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

$AC=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

و منه : $V=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\sqrt{3}.\sqrt{6}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$

## التمرين الرابع :

I) 1- أ) حساب نهايات $f$ عند الحدود المفتوحة لـــ I :

لدينا : $I=]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;0]$ و $f(x)=-x+\frac{4}{x+1}$ . و منه :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-1}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}-1}\left(1+\frac{4}{x+1}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\left(1+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$$

ملاحظة : يمكن استنتاج هذه النهايات من البيان .

ب) تشكيل جدول التغيرات بقراء بيانية :

| $x$ | $-\infty$     $-1$ | $0$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | - | - |
| $g(x)$ | $+\infty$ ↘ $-\infty$ | $+\infty$ ↘ $4$ |

2- أ) حساب نهاية $f$ عند $+\infty$ :

$g$ معرفة على المجال $[0\,;+\infty[$ بـــ : $g(x)=x+\frac{4}{x+1}$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$$

ب) التحقق من أن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلاً $(\Delta)$ :

المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = x$ لأن :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(x + \frac{4}{x+1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{u}{x+1}\right) = 0$$

جـ) دراسة تغيرات الدالة $g$ :

اتجاه التغير :

لدينا : $g$ قابلة للاشتقاق على المجال $[0 ; +\infty[$ حيث :

$$g'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

$g'(x) = 0$ معناه : $(x-1)(x+3) = 0$ أي : $x = 1$

إشارة المشتق هي حسب الجدول التالي :

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | | $+$ |



جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $0$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | | $+$ |
| $g(x)$ | $4$ ↘ | $f(1)$ | ↗ $+\infty$ |

ملاحظة : $f(1) = 3$ .

II–1/ أ) حساب $\lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ و $\lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ :

$k$ معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{k(h)-k(0)}{h} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{h + \frac{4}{h+1} - 4}{h}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{h^2 - 3h}{h\,(h+1)} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{h-3}{(h+1)} = -3$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{k(h)-k(0)}{h} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{-h + \frac{4}{h+1} - 4}{h}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{-h^2 - 5h}{h\,(h+1)} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{-h-5}{(h+1)} = -5$$

نستنتج أن $k$ ليست قابلة للإشتقاق عند $0$ لأن العدد المشتق من اليمين $(-3)$ لا يساوي العدد المشتق من اليسار $(-5)$ .

ب) إعطاء تفسيرا هندسيا للنتيجة :

بما أن الدالة $k$ قابلة للإشتقاق من اليمين و قابلة للإشتقاق من اليسار فإن منحنى الدالة $k$ يقبل نصفي مماس عند النقطة التي فاصلتها $0$ .

يمكن القول أن النقطة التي احداثياتها $(0 ; 4)$ هي نقطة زاوية لمنحنى الدالة $k$ .

2) كتابة معادلتي المماسين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$ :

– معادلة نصف المماس $(\Delta_1)$ :

$(\Delta_1)$ هو نصف المماس عند $x_0 = 0$ حيث $x_0 \geq 0$

لدينا : $y = k'(0)\,(x - 0) + k(0)$

ومنه : $y = -3(x - 0) + 4$ أي : $y = -3x + 4$ .

– معادلة نصف المـــماس $(\Delta_2)$ :

$(\Delta_2)$ هو نصف المماس عند $x_0 = 0$ حيث : $x_0 \leq 0$

لدينا : $y = k'(0)\,(x - 0) + k(0)$

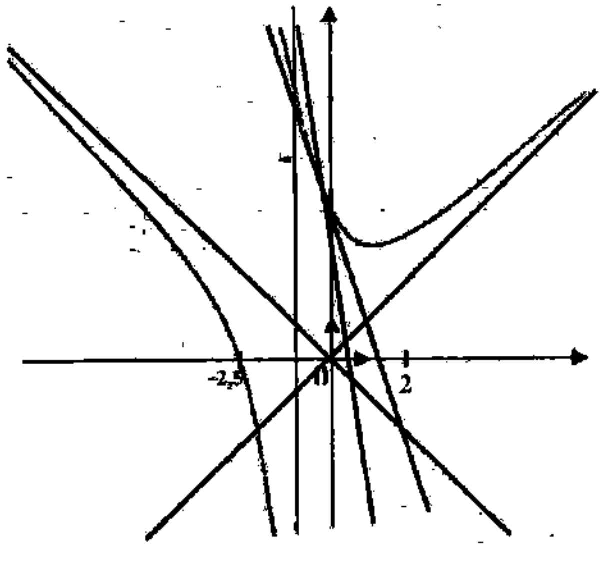
ومنه : $y = -5(x - 0) + 4$ ي $y = -5x + 4$ .

3– رسم كلا من $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ و المنحنى $(C_k)$ :

لرسم المنحنى $(C_k)$ نلاحظ :

إذا كانت $x \leq 0$ فإن : $k(x) = f(x)$ و منه : $(C_f) = (C_k)$

إذا كانت $x \geq 0$ فإن : $k(x) = g(x)$ و منه : $(C_g) = (C_k)$




**4)** حساب المساحة :

نرمز بـــ $A$ لمساحة الحيز المستوي و المحدد بالـمنحنى $(C_k)$ و المستقيمات التي معادلاتها :

$$y = 0 \ ، \ x = \frac{1}{2} \ ، \ x = -\frac{1}{2} \ .$$

ومنه :

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} g(x)dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + 4\ln(x+1)\right]_{\frac{1}{2}}^{0} + \left[-\frac{x^2}{2} + 4\ln(x+1)\right]_{0}^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{8} - 4\ln 2 + \frac{1}{8} + 4\ln 3 - 4\ln 2 = 4\ln 3 \ (u.a)$$

# الاختبار السادس

## بكالوريا جـــــوان 2009

## التمرين الاول : (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبر النقط : $A(2 ; 3 ; -1)$ ، $B(1 ; -2 ; 4)$

$C(3 ; 0 ; -2)$ ، $D(1 ; -1 ; -2)$

و ليكن $(\pi)$ المستوي المعرف بمعادلته الديكارتية :

$$2x - y + 2z + 1 = 0$$

– الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية :

1- النقط $A$ , $B$ , $C$ في استقامية .

2- $(ABD)$ مستوي معادلة ديكارتية لـــــــــه :

$$25x - 6y - z - 33 = 0$$

3- المستقيم $(CD)$ عمودي على المستوي $(\pi)$ .

4- المسقط العمودي للنقطة $B$ على $(\pi)$ هو النقطـــــــة $H(1 ; 1 ; -1)$

## التمرين الثاني : (04 نقاط)

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ :

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2z + 4 = 0$

2- نسمي $z_1$ و $z_2$ حلي هذه المعادلة .

أ ) اكتب العددين $z_1$ و $z_2$ على الشكل الأسي .

ب) $A$ , $B$ , $C$ هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب :

$z_A = 1 - i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ ،

$z_C = \frac{1}{2}\left(5 + i\sqrt{3}\right)$ ( $i$ يرمز إلى العدد المركب الذي يحقـــــق $i^2 = -1$ ) .

أحسب الأطوال $AB$ ، $AC$ ، $BC$ ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$

جـــ) جد الطويلة و عمد للعدد المركب $Z$ حيث :

$$Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} \ .$$

د ) أحسب $Z^3$ و $Z^6$ ثم استنتج أن $Z^{3k}$ عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي $k$ .

## التمرين الثالث : (05 نقاط)

$(u_n)$ متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول $u_1$ و أساسها $q$ حيث : 
$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

1. أ) احسب $u_2$ و الأساس $q$ لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول $u_1$.

ب) أكتب عبارة الحد العام $u_n$ بدلالة $n$ .

جـ) احسب $S_n$ حيث : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ بدلالة $n$ ثم عين العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون : $S_n = 728$

2. $(v_n)$ متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ كما يلي : $v_1 = 2$ ، $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

أ) أحسب $v_2$ و $v_3$ .

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ . بين أن $(w_n)$ متتالي هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ .

جـ) أكتب $w_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج $w_n$ بدلالة $n$ .

## التمرين الرابع : (07 نقاط)

الجزء الأول :

$h$ دالة عددية معرفة على $]-1 ; +\infty[$ كمايلي :

$h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$ .

1- أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} h(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-1 ; +\infty[$ : $h'(x) = \frac{1 + 2(x+1)^2}{x+1}$ .

و استنتج اتجاه تغير الدالة $h$ ثم أنجز جدول تغيراتها .

3- أحسب $h(0)$ و استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم $x$ .

الجزء الثاني :

لتكن $f$ دالة معرفة على $]-1 ; +\infty[$ كمايلي

$f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ ، نسمي $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس : $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. أ) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ ، ثم فسر هذه النتيجة بيانياً .

ب) باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أن $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ .

جـ) استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x)\right)$ .

د ) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (x-1)\right)$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ .

هـ) أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل

2- بين أنه من أجل $x$ من المجال $]-1 ; +\infty[$

$f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ . ثم شكّل جدول تغيرات الدالة $f$ .

3- بين أن المنحنى $(C_f)$ يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين $3{,}3$ و $3{,}4$ .

4- أرسم $(C_f)$ .

5- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(C_f)$ و المستقيمات التي معادلاتها : $y = x - 1$ ، $x = 0$ ، $x = 1$ .

# حل الاختبار السادس

## التمرين الأول :

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية :

1- الإجابة خاطئة لأن : $\overrightarrow{AB}(-1\,,-5\,,5)$ لا يوازي $\overrightarrow{AC}(1\,,-3\,,-1)$ أي : $\frac{1}{-1}\neq\frac{-3}{-5}$ .

2- الإجابة صحيحة لأن : الثلاثية إحداثيات النقـــــط $A\,,B\,,C$ تحقق صحة المعادلة :

$$25x-6y-z-33=0 \;.$$

لدينا : $25(2)-6(3)-(-1)-33=0$ أي $A\in(ABD)$

$25(1)-6(-2)-4-33=0$ أي : $B\in(ABD)$

$25(1)-6(-1)\,-\,-2)\,-33=0$ أي $D\in(ABD)$

3- الإجابة خاطئة لأن الشعاع $\overrightarrow{CD}(-2\,,-1\,,0)$ لا يوازي الشعاع الناظم $\overrightarrow{n_\pi}(2,-1,2)$ أي : $\frac{2}{-2}\neq\frac{-1}{-1}$

4- الإجابة خاطئة لأن : $HB=\sqrt{34}\neq d(B;(\pi))=\frac{17}{3}$

## التمرين الثاني :

1- حل المعادلة $z^2-2z+4=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$ :

لحل هذه المعادلة نستعمل المميز المختصر : $\Delta'=b'-ac$

لدينا: $\Delta'=(-1)^2-(1)(4)=-3$ أي : $\Delta'=(\sqrt{3}i)^2$

و منه حلي المعادلة $(e)$ هما :

$$z_1=\frac{1-\sqrt{3}i}{1} \quad ، \quad z_2=\frac{1+\sqrt{3}i}{1}$$

2. أ ) كتابة العددين $z_1$ و $z_2$ على الشكل الأسي :

لدينا :

$$z_1=1-\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_2=1+\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ب ) حساب الأطوال $AB$ ، $AC$ ، $BC$ :

$$AB=|z_A-z_B|=\left|-2\sqrt{3}i\right|=2\sqrt{3}$$

لدينا : $AC=|z_A-z_C|=\left|\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right|=3$

$$BC=|z_C-z_B|=\left|\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{3}$$

- استنتاج طبيعة المثلث $ABC$ :

لدينا : $AB^2=12$ و $BC^2+AC^2=9+3=12$

و منه المثلث $ABC$ قائم في $C$ لأن : $BC^2+AC^2=AB^2$

جـ ) إيجاد طويلة و عمدة للعدد المركب $Z$ :

لدينا : $Z=\frac{z_c-z_B}{z_A-z_B}$ و منـــــــه :

$$|Z|=\left|\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right|=\left|\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right|=\frac{1}{2}$$

$$\arg(Z)=\arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=\arg(z_C-z_B)-\arg(z_A-z_B)$$

$$\arg(Z)=\arg\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\arg\left(-2\sqrt{3}i\right)+2k\pi$$

$$\arg(Z)=\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

حساب $Z^3$ و $Z^6$ ثم استنتج أن $Z^{3k}$ :

لدينا : $|Z|=\frac{1}{2}$ $\quad$ $\arg(Z)=\frac{\pi}{3}+2\pi k$ أي :

$Z=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ و منه : $Z^3=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3=\frac{1}{2^3}e^{i\frac{3\pi}{3}}$

و منه : $Z^3=\frac{1}{8}e^{i\pi}=\frac{-1}{8}$ .

لدينا : $Z^6 = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6 = \frac{1}{2^6}e^{i\frac{6\pi}{3}}$

و منه : $Z^6 = \frac{1}{64}e^{i2\pi} = \frac{1}{64}$ .

لدينا : $Z^{3k} = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3k} = \frac{1}{2^3}e^{i\frac{3k\pi}{3}} = \frac{1}{8}e^{ik\pi}$

نـــميز حالتين هما :

إذا كان $k$ عدد طبيعي زوجي فإن : $Z^{3k} = \frac{1}{8}e^{ik\pi} = \frac{1}{8}$

إذا كان $k$ عدد طبيعي فردي فإن : $Z^{3k} = \frac{1}{8}e^{ik\pi} = \frac{-1}{8}$

و في الحالتين $Z^{3k}$ هو عدد حقيقي .

## التمرين الثالث :

1. أ) حساب $u_2$ و الأساس $q$ و استنتاج الحد الأول :

لدينا : $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} \frac{u_2}{q} + 2u_2 + u_2 q = 32 \\ u_2^3 = 216 \end{cases}$

و منه : $\begin{cases} 1 + 2q + q^2 = \frac{16}{3}q \\ u_2 = 6 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} q = 3 \vee q = \frac{1}{3} \\ u_2 = 6 \end{cases}$

و بما أن المتتالية متزايدة فإن : $q = 3$ و $u_2 = 6$ .

لدينا : $u_2 = u_1 q$ و منه : $u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{6}{3} = 2$ .

ب ) كتابة عبارة الحد $u_n$ بدلالة $n$ :

لدينا

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} = u_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$$

و منه : $S_n = 2\left(\frac{3^n - 1}{3 - 1}\right) = 3^n - 1$ .

تعين العدد الطبيعي $n$ حيث يكون : $S_n = 728$ .

$S_n = 728$ معناه : $3^n - 1 = 278$ .

أي : $3^n = 279 = 3^6$ إذن : $n = 6$ .

2. أ) حساب $v_2$ و $v_3$ :

لدينا : $w_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$ و $v_1 = 2$

و منه :

$$v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = \frac{3}{2}(2) + 2 = 5$$

$$v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{3}{2}(5) + 6 = \frac{27}{2}$$

ب ) تبيين أن المتتالية $(w_n)$ هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ :

$(w_n)$ هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ معناه : $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$

لدينا : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ .

و منه :

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3}$$

$$w_{n+1} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n}{3u_n} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$$

أي : $w_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}w_n$

جـ) كتابة $w_n$ بدلالة $n$ و استنتاج $v_n$ بدلالة $n$ :

لدينا : $w_n = w_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

حيث : $w_1 = \frac{v_1}{u_1} - \frac{2}{3} = \frac{2}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

و منه : $w_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

لدينا : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ و منه : $w_n + \frac{2}{3} = \frac{v_n}{u_n}$

أي : $v_n = u_n\left(w_n + \frac{2}{3}\right)$

إذن : $v_n = 2\cdot 3^{n-1}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\right)$

$$v_n = 4\cdot 3^{n-2}\left(2^{-n} + 1\right)$$

# التمرين الرابع :

الجزء الأول : **Hard_equation**

1) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} h(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$

$$h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$$

معرفة على $]-1 \,;\, +\infty[$ .

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^2+2x+\ln(x+1)\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} h(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} \left(1-2+\ln(x+1)\right) = -\infty$$

2 ) تبيين أن : $h'(x) = \dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

لدينا : $h'(x) = 2x+2+\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2(x+1)^2+1}{x+1}$

استنتاج اتجاه تغير الدالة $h$ و تشكيل جدول تغيراتها :

بما أن $x > 1$ فإن $h'(x) > 0$ ومنه $h$ متزايدة تماما .

| $x$ | $1-$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | | $+$ | |
| $h(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3 ) حساب $h(0)$ و استنتاج إشارة $h(x)$ :

$h(0) = 0$ و إشارة $h(x)$ هي حسب الجدول التالي :

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

الجزء الثاني :

1. أ ) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ و تفسير النتيجة بيانياً :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} \left(x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} \left(-2-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = +\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \left(\ln(x+1)\right) = -\infty$

و : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \left(\dfrac{-1}{x+1}\right) = -\infty$

نستنتج وجود مستقيم مقارب معادلته : $y = -1$

لـــ $(C_f)$ :

ب ) البرهان أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln u}{u}\right) = 0$

نضع $t = \ln(u)$ و منه : $u = e^t$

لدينا : إذا كان $u \to +\infty$ فإن : $t \to +\infty$ .

و منه : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln u}{u}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{t}{e^t}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{e^t}\right) = 0$

جـ) استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ : لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1) - \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty - 0 = +\infty$$

د) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-(x-1)\right)$ : لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x)-(x-1)\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = 0$$

* استنتاج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ .

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-(x-1)\right) = 0$ و منه المنحنى يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته : $y = x-1$ في جوار $+\infty$ .

هـــ) دراسة وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل

ندرس إشـــــــارة الفـــــــرق

$$\left(f(x)-(x-1)\right) = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

إشارة الفرق هي حسب إشارة $-\ln(x+1)$

لأن : $x+1>0$ و $-\ln(x+1) = 0$

معناه : $\ln(x+1) = 0$ أي $x = 0$

◈ $-\ln(x+1) \geq 0$ معناه : $\ln(x+1) \leq 0$

أي : $-1 < x \leq 0$ .

◈ $-\ln(x+1) \leq 0$ معناه : $\ln(x+1) \geq 0$

أي : $x \geq 0$

نـــــستنتج مايلي :

◈ $-1 < x \leq 0$ معناه $(C_f)$ فوق المستقيم المقارب المائل .

◈ $x = 0$ معناه $(C_f)$ يقطع المستقيم المقارب في النقـــــطة $(0 \,;\, -1)$ .

◈ $x \geq 0$ معناه $(C_f)$ تحت المستقيم المقارب المائل .

2 ) تبيين أن : $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$

لدينا : $f$ قابلة للإشتقاق على المجال $]-1 \,;\, +\infty[$ حيث :

$$f'(x)=1-\frac{\frac{1}{x+1}(x+1)-1\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x+1)^2-1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x+\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

و منه : $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$

**تشكيل جدول التغيرات :**

إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $h(x)$ : جدول التغيرات :

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(0)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3– تبين أن المنحنى $(C_f)$ يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$

المنحنى $(C_f)$ يقطع المستقيم : $y = 2$ معناه المعادلة

$$f(x) = 2$$

تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ محصوراً بين $3{,}3$ و $3{,}4$ .

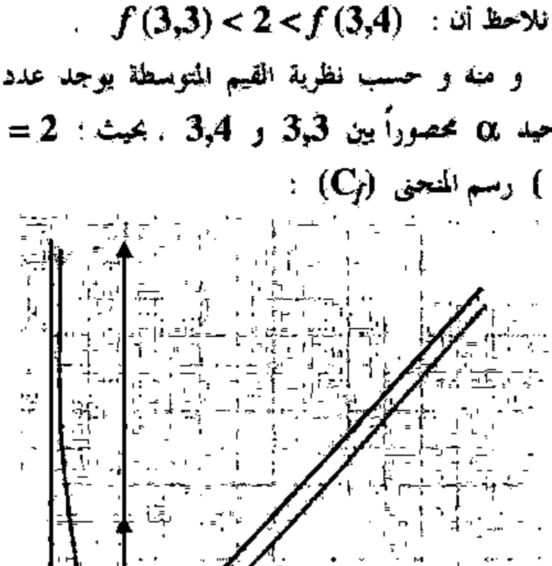
$f$ متزايدة على المجال $[3{,}3 ; 3{,}4]$ حسب جدول التغيرات

و لدينا : $f(3{,}3) = 1{,}96$ و $f(3{,}4) = 2{,}06$

و نلاحظ أن : $f(3{,}3) < 2 < f(3{,}4)$ .

– و منه و حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ محصوراً بين $3{,}3$ و $3{,}4$ ، بحيث : $f(\alpha) = 2$

4 ) رسم المنحنى $(C_f)$ :




5 ) حساب المساحة :

نرمز بـ $A$ لمساحة الحيز المستوي و المحدد بالمنحنى $(C_f)$ و المستقيمات التي معادلاتها : $y = x - 1$ ، $x = 1$ ، $x = 0$ .

و منه : $A=\displaystyle\int_0^1\big((x-1)-f(x)\big)dx=\int_0^1\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)dx$

بوضع : $u = \ln(x + 1)$ فإن : $u'=\dfrac{1}{x+1}$

الدالة : $x \to \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ من الشكل :

$x \to u(x).u'(x)$ و منه الدالة الأصلية لها هي من الشكل :

$$x \to \frac{1}{2}[u(x)]^2 + c \ .$$

و منه :

$$A=\frac{1}{2}\left[(\ln(x+1))^2\right]_0^1=\frac{1}{2}\left[(\ln(2))^2-(\ln 1)^2\right]$$

أي : $A=\dfrac{1}{2}(\ln(2))^2$ .

# الاختبار السابع

**بكالوريا جـــــوان 2008**

## التمرين الأول : (3 نقاط)

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط .

عيّن الجواب الصحيح مُعللا اختيارك . نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط :

$A(1,3,-1)$ ؛ $B(4,1,0)$

$C(-2,0,-2)$ ؛ $D(3,2,1)$

و المستوي $(P)$ الذي معادلته : $4x - 3z - 4 = 0$

1– المستوي $(P)$ هو : ج1) – $(BCD)$ ج2) – $(ABC)$

ج3) – $(ABD)$

2– شعاع نـاظمي للمستوى $(P)$ هو :

ج1) $\vec{n_1}(1,2,1)$ ج2) $\vec{n_2}(-2,0,6)$ ج3) $\vec{n_3}(2,0,-1)$

3– المسافة بين النقطة $D$ و المستوي $(P)$ هي :

ج1) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ ج2) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ ج3) $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

## التمرين الثاني : (5 نقاط)

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0=\dfrac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=\dfrac{3}{2}u_n+2$

1. أ ) ارسم في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x$ و المنحنى $(d)$ الممثل للدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{2}{3}x+2$

1.ب- باستعمال الرسم السابق ، مثل على محور الفواصل و بدون حساب الحدود : $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ ، $u_4$ .

1.جـ- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ و تقاربها .

2. أ – برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n \leq 6$

2.ب- تحقق أن $(u_n)$ متزايدة .

2.جـ- هل $(u_n)$ متقاربة ؟ برر إجابتك .

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n = u_n - 6$

أ- أثبت أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب- أكتب عبارة $(u_n)$ بدلالة $n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$

## التمرين الثالث : (5 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية :

$$z^2+iz-2-6i=0$$

2. نعتبر المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتان لاحقتاهما $z_A$ و $z_B$ على الترتيب حيث :

$$z_A=2+i \quad \text{و} \quad z_B=-2-2i$$

عين $z_\omega$ لاحقة النقطة $\omega$ مركز الدائرة $(\Gamma)$ ذات القطر [AB] .

3. لتكن C النقطة ذات اللاحقة $z_C$ حيث : $z_C=\frac{4-i}{1+i}$

اكتب $z_C$ على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة $(\Gamma)$ .

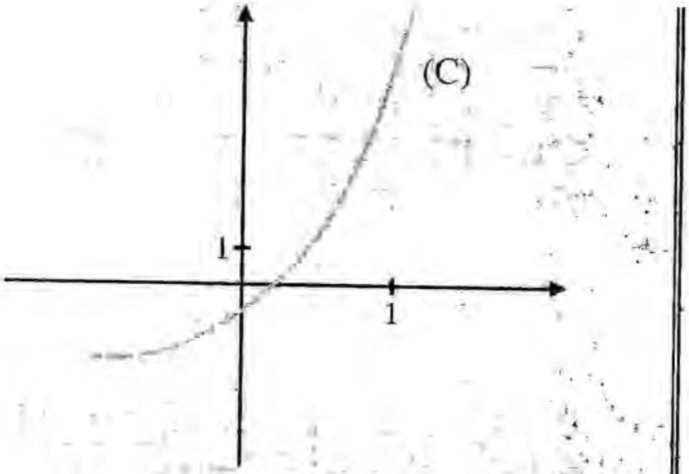
4. أ- برهن أنّ عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته k $(k>0)$ و زاويته $\theta$ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ و النقطة $M'(z')$ هي : $z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$

4.ب- تطبيق : عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرف بـــ : $z'+\frac{1}{2}i=2.e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z+\frac{1}{2}i\right)$

## التمرين الرابع : (7 نقاط)

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال : $]-1,+\infty[$ كما يأتي :

$$g(x)=x^3+3x^2+3x-1$$




1.أ – بقراءة بيانية شكّل جدول تغيرات الدالة g و حدّد $g(0)$ و إشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$ .

1.ب- علل وجود عدد حقيقي $\alpha$ من المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ يحقق : $g(\alpha)=0$ .

1.جـ- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$ .

2- $f$ هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بما يأتي : $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$ و ليكن $(\Gamma)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-1,+\infty[$ : $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$ حيث $f'$ هي الدالة المشتقة للدالة $f$ .

ب- عين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و فسّر النتيجة بيانيا .

جـ- أحسب : $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ و فسر النتيجتين بيانيا .

د- شكّل جدول تغيرات الدالة $f$ .

3- نأخذ $\alpha\approx 0{,}26$ .

أ- عين مدور $f(\alpha)$ إلى $10^{-2}$ .

ب- أرسم المنحنى $(\Gamma)$ .

4. أ – أكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x)=x+a+\frac{b}{(x+1)^2}$ حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان .

4.ب- عيّن F الدالة الأصلية للدالة $f$ على المجال : $]-1,+\infty[$ و التي تحقق : $F(1)=2$ .

# Hard_equation

^^

# Hard_equation

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة

Hard_equation