القسمة في $\mathbb{Z}$

الكفاءات المستهدفة

- إثبات أن عددا صحيحا يقسم عددا صحيحا آخر.
- استعمال خواص قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$.
- استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين.
- استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين القواسم المشتركة لعددين طبيعيين.
- حل مشكلات بتوظيف خواص القاسم المشترك الأكبر.

1 قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$:

أ- تعريف: a و b عددان صحيحان حيث $a \neq 0$.

القول أن a يقسم b يعني وجود عدد صحيح k حيث: $b=ka$.

ترميز: إذا كان a يقسم b نكتب: $a|b$

ونقرأ: « a يقسم b » أو « a قاسم للعدد b » أو « b مضاعف للعدد a »

أمثلة:

- 3 يقسم 48 ($48=3\times 16$)، نقول كذلك أن 48 مضاعف للعدد 3.
- -3 يقسم 48 ($48=(-3)\times(-16)$)، نقول كذلك أن 48 مضاعف للعدد -3
- من أجل كل عدد طبيعي n، $n+1$ يقسم n^2-1 ($n^2-1=(n-1)(n+1)$)

ملاحظة:

في المجموعة $\mathbb{Z}$، للعددين a و $-a$ نفس القواسم.

ب- خواص: a، b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة.

الخاصة 1: إذا كان $a|b$ فإن $-a|b$ (من $b=ka$ نستنتج $b=(-k)(-a)$).

الخاصة 2: إذا كان $a|b$ فإن $a|mb$ و $ma|mb$ وذلك مهما كان m من $\mathbb{Z}^*$.

الخاصة 3: إذا كان $a|b$ فإن $|a| \leq |b|$ كل عدد صحيح يقبل عددا منته من القواسم

الخاصة 4: إذا كان $a|b$ و $b|a$ فإن $a=b$ أو $a=-b$ (أي: $|a|=|b|$).

الخاصة 5: إذا كان $a|b$ و $b|c$ فإن $a|c$.

الخاصة 6: إذا كان $a|b$ و $a|c$ فإن $a|(b+c)$ و $a|(b-c)$

وبشكل عام: $a|(mb+nc)$ حيث m و n عددان صحيحان.

تمرين محلول 1:

عيّن الأعداد الصحيحة n في كل حالة من الحالات التالية:

1. 7 يقسم $n+3$.
2. $3n+5$ قاسم للعدد 8.
3. العدد $2n-1$ مضاعف للعدد $n+2$.
4. الكسر $\dfrac{n+19}{n+6}$ عدد صحيح.

الحل:

1. تعيين قيم n بحيث $7|(n+3)$:

7 يقسم $n+3$ يعني وجود عدد صحيح k حيث: $n+3=7k$.

ومنه: $n=7k-3$.

إذن: قيم n بحيث $7|(n+3)$ هي: $n=7k-3$ مع $k\in\mathbb{Z}$

2. تعيين قيم n بحيث $(3n+5)|8$:

مجموعة القواسم الصحيحة للعدد 8 هي: $\{-8;-4;-2;-1;1;2;4;8\}$

$3n+5$ قاسم للعدد 8 معناه: $(3n+5)\in\{-8;-4;-2;-1;1;2;4;8\}$

ومنه: $3n\in\{-13;-9;-7;-6;-4;-3;-1;3\}$ (إضافة العدد -5)

وبالقسمة على 3 مع مراعاة أن n عدد صحيح نستنتج أن $n\in\{-3;-2;-1;1\}$

إذن: قيم n بحيث $(3n+5)|8$ هي: -3، -2، -1، 1.

3. تعيين قيم n بحيث $(n+2)|(2n-1)$:

$(n+2)|(2n-1)$ يكافئ $(n+2)|[2(n+2)-5]$ ومنه: $(n+2)$ يقسم -5

مجموعة قواسم -5 هي: $\{-5;-1;1;5\}$

$(n+2)$ يقسم -5 معناه: $(n+2)\in\{-5;-1;1;5\}$

ومنه: $n\in\{-7;-3;-1;3\}$ (إضافة العدد -2)

إذن: قيم n بحيث $(n+2)|(2n-1)$ هي: -7، -3، -1، 3.

4. تعيين قيم n بحيث $\dfrac{n+19}{n+6}\in\mathbb{Z}$:

$\left[\dfrac{n+19}{n+6}\in\mathbb{Z}\right]$ يكافئ $[(n+6)$ يقسم $(n+19)]$

ومنه: $(n+6)$ يقسم 13 ، (من أجل $n\neq-6$ ، $\dfrac{n+19}{n+6}=1+\dfrac{13}{n+6}$)

مجموعة قواسم 13 هي: $\{-13\ ;\ -1\ ;\ 1\ ;\ 13\}$

$(n+6)$ يقسم 13 معناه: $(n+6)\in\{-13\ ;\ -1\ ;\ 1\ ;\ 13\}$

ومنه: $n\in\{-19;-7;-5;7\}$ (إضافة العدد -6)

إذن: قيم n بحيث $\dfrac{n+19}{n+6}\in\mathbb{Z}$ هي: -19، -7، -5، 7.

تمرين محلول 2:

عيّن الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $x^2-4y^2=20$

الحل:

لدينا: $x^2-4y^2=20$ يكافئ $(x-2y)(x+2y)=20$

وبالتالي $(x-2y)$ و $(x+2y)$ يقسمان 20.

نحلل 20 إلى جداء عددين طبيعيين: $20=1\times20=2\times10=4\times5$

توجد 6 حالات ممكنة للثنائيات $(x-2y\,;x+2y)$ هي: $(1;20)$، $(2;10)$، $(4;5)$، $(20;1)$، $(10;2)$، $(5;4)$.

ولأن في المجموعة $\mathbb{N}$: $x-2y\leq x+2y$، تبقى ثلاث حالات ممكنة فقط هي:

$$\begin{cases}x-2y=1\\x+2y=20\end{cases} \text{ أو } \begin{cases}x-2y=2\\x+2y=10\end{cases} \text{ أو } \begin{cases}x-2y=4\\x+2y=5\end{cases}$$

نستنتج أن: $(x;y)=(6;2)$

تمرين محلول 1:

عيّن الأعداد الصحيحة n في كل حالة من الحالات التالية:

❶ 7 يقسم $n+3$.

❷ $3n+5$ قاسم للعدد 8.

❸ العدد $2n-1$ مضاعف للعدد $n+2$.

❹ الكسر $\frac{n+19}{n+6}$ عدد صحيح.

الحل:

❶ تعيين قيم n بحيث $7|(n+3)$:

7 يقسم $n+3$ يعني وجود عدد صحيح k حيث: $n+3=7k$.

ومنه: $n=7k-3$.

إذن: قيم n بحيث $7|(n+3)$ هي: $n=7k-3$ مع $k\in\mathbb{Z}$

❷ تعيين قيم n بحيث $8|(3n+5)$:

مجموعة القواسم الصحيحة للعدد 8 هي: $\{-8;-4;-2;-1;1;2;4;8\}$

$3n+5$ قاسم للعدد 8 معناه: $(3n+5)\in\{-8;-4;-2;-1;1;2;4;8\}$

ومنه: $3n\in\{-13;-9;-7;-6;-4;-3;-1;3\}$ (إضافة العدد -5)

وبالقسمة على 3 مع مراعاة أن n عدد صحيح نستنتج أن $n\in\{-3;-2;-1;1\}$

إذن: قيم n بحيث $8|(3n+5)$ هي: -3، -2، -1، **1**.

❸ تعيين قيم n بحيث $(n+2)|(2n-1)$:

$(n+2)|(2n-1)$ يكافئ $(n+2)|[2(n+2)-5]$ ومنه: $(n+2)$ يقسم -5

مجموعة قواسم -5 هي: $\{-5;-1;1;5\}$

$(n+2)$ يقسم -5 معناه: $(n+2)\in\{-5;-1;1;5\}$

ومنه: $n\in\{-7;-3;-1;3\}$ (إضافة العدد -2)

إذن: قيم n بحيث $(n+2)|(2n-1)$ هي: -7، -3، -1، **3**.

❹ تعيين قيم n بحيث $\frac{n+19}{n+6}\in\mathbb{Z}$:

$[\frac{n+19}{n+6}\in\mathbb{Z}]$ يكافئ $[(n+6)$ يقسم $(n+19)]$

ومنه: $(n+6)$ يقسم 13 (من أجل $n\neq-6$، $\frac{n+19}{n+6}=1+\frac{13}{n+6}$)

مجموعة قواسم 13 هي: $\{-13;-1;1;13\}$

$(n+6)$ يقسم 13 معناه: $(n+6)\in\{-13;-1;1;13\}$

ومنه: $n\in\{-19;-7;-5;7\}$ (إضافة العدد -6)

إذن: قيم n بحيث $\frac{n+19}{n+6}\in\mathbb{Z}$ هي: -19، -7، -5، 7.

تمرين محلول 2:

عيّن الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $x^2-4y^2=20$

الحل:

لدينا: $x^2-4y^2=20$ يكافئ $(x-2y)(x+2y)=20$

وبالتالي $(x-2y)$ و $(x+2y)$ يقسمان **20**.

نحلل **20** إلى جداء عددين طبيعيين: $20=1\times20=2\times10=4\times5$

توجد **6** حالات ممكنة للثنائيات $(x-2y;x+2y)$ هي: $(1;20)$، $(2;10)$، $(4;5)$، $(20;1)$، $(10;2)$، $(5;4)$.

ولأن في المجموعة $\mathbb{N}$: $x-2y\le x+2y$، تبقى ثلاث حالات ممكنة فقط هي:

$$\begin{cases}x-2y=1\\x+2y=20\end{cases} \text{ أو } \begin{cases}x-2y=2\\x+2y=10\end{cases} \text{ أو } \begin{cases}x-2y=4\\x+2y=5\end{cases}$$

نستنتج أن: $(x;y)=(6;2)$

2 القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$:

أ- القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$:

مبرهنة : a و b عددان صحيحان حيث $b \neq 0$.

توجد ثنائية وحيدة $(q\,;r)$ مع $q \in \mathbb{Z}$ و $r \in \mathbb{N}$ بحيث : $\begin{cases} a = bq + r \\ \text{و} \\ 0 \leq r < |b| \end{cases}$

تسمى عملية إيجاد الثنائية $(q\,;r)$ انطلاقا من الثنائية $(a\,;b)$ القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b.

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

q هو حاصل هذه القسمة و r باقيها .

نتيجة : إذا كان a و b عددين طبيعيين حيث $b \neq 0$، فإنه توجد ثنائية وحيدة $(q\,;r)$ من الأعداد الطبيعية بحيث : $a = qb + r$ و $0 \leq r < b$.

✦ **احذر** : توجد عدة كتابات للعدد a على الشكل $q \times b + r$ ، لكن واحدة فقط التي تمثل القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b.

مثلا : $103 = 13 \times 7 + 12$ ، $103 = 13 \times 6 + 25$ و $103 = 13 \times 8 - 1$.

المساواة $103 = 13 \times 7 + 12$ هي الوحيدة التي تمثل القسمة الإقليدية للعدد **103** على **13** لأن $0 \leq 12 < 13$.

ب- القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين :

✦ a عدد طبيعي غير معدوم . نرمز إلى مجموعة قواسم العدد a بالرمز D_a.

مثلا : $D_{15} = \{1;3;5;15\}$ ، $D_{20} = \{1;2;4;5;10;20\}$

✦ a و b عددان طبيعيان غير معدومين. نرمز إلى مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b بالرمز $D_{a,b}$ حيث : $D_{a,b} = D_a \cap D_b$

مثلا : $D_{15,20} = D_{15} \cap D_{20} = \{1;5\}$

✦ a و b عددان طبيعيان غير معدومين . يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a \cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ونرمز له بـ $PGCD(a\,;b)$.

مثلا : $PGCD(15\,;20) = 5$

حالة خاصة : إذا كان $PGCD(a\,;b) = 1$ نقول أن العددين a و b أوليان فيما بينهما . (مثلا : العددان **8** و **9** أوليان فيما بينهما لأن $PGCD(8\,;9) = 1$)

البحث عن الـ $PGCD$ باستعمال خوارزمية إقليدس :

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باق غير معدوم في سلسلة القسمات المتتابعة المنجزة في خوارزمية إقليدس .

مثال : تعيين $PGCD\ (2012\,;1433)$

الحاصل		1	2	2	9	2	14
المقسوم والقاسم	2012	1433	579	275	29	14	1
الباقي		579	275	29	14	1	0

إذن : $PGCD\ (2012\ ;\ 1433) = 1$ أي أن هذين العددين أوليان فيما بينهما .

خواص الـ $PGCD$:

الخاصة 1 : a ، b و k أعداد طبيعية غير معدومة .

$$PGCD(ka\,;kb) = k \times PGCD(a\,;b)$$

الخاصة 2 : a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a \geq b$.

إذا كان r باقي قسمة a على b فإن $PGCD(a\,;b) = PGCD(b\,;r)$

الخاصة 3 : a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

إذا كان a يقسم b فإن $PGCD(a\,;b) = a$

الخاصة 4 : a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

إذا كان $PGCD(a\,;b) = d$ فإنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما بينهما بحيث : $a = d \times a'$ و $b = d \times b'$.

الخاصة 5 : a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

إذا كان $PGCD(a;b)=d$ فإنه يوجد عددان صحيحان m و n بحيث:

$$ma+nb=d$$

الخاصة 6: a، b و n أعداد طبيعية غير معدومة.

إذا كان $n|a$ و $n|b$ فإن $n|PGCD(a;b)$.

الخاصة 7: مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم القاسم المشترك الأكبر لهما.

تمديد مفهوم القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين:

a و b عددان صحيحان غير معدومين. $PGCD(a;b)=PGCD(|a|;|b|)$

مثال: $PGCD(-2009;-1430)=PGCD(2009;1430)=1$

تمرين محلول 3:

n عدد طبيعي غير معدوم.

1. عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $(n+2)^2$ على $n+4$.
2. عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $7n+16$ على $2n+3$.

الحل:

1. تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $(n+2)^2$ على $n+4$:

لدينا: $(n+2)^2=n^2+4n+4=n(n+4)+4$ مع $0\le 4<n+4$ (لأن $n>0$)

إذن: باقي القسمة الإقليدية للعدد $(n+2)^2$ على $n+4$ هو 4.

2. تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $7n+16$ على $2n+3$:

لدينا: $7n+16=3(2n+3)+n+7$

- إذا كان $0\le n+7<2n+3$ أي: $n>4$ فإن $n+7$ هو باقي القسمة الإقليدية للعدد $7n+16$ على $2n+3$.
- إذا كان $0<n\le 4$ فإن $n+7>2n+3$ وبالتالي نزيد 1 إلى حاصل القسمة.

ومنه: $7n+16=4(2n+3)+4-n$ ويكون عندئذ $0\le 4-n<2n+3$

في هذه الحالة باقي القسمة الإقليدية للعدد $7n+16$ على $2n+3$ هو $4-n$.

خلاصة

- إذا كان $0<n\le 4$ فإن باقي قسمة $7n+16$ على $2n+3$ هو $4-n$
- إذا كان $n\ge 5$ فإن باقي قسمة $7n+16$ على $2n+3$ هو $n+7$

تمرين محلول 4:

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $A=n(n^2+5)$ يقبل القسمة على 3.

الحل:

بواقي قسمة n على 3 هي: 0، 1 و 2 وبالتالي فإن n يأخذ أحد الأشكال الآتية: $3k$، $3k+1$ و $3k+2$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

الحالة الأولى: $n=3k$

في هذه الحالة $A=3k((3k)^2+5)=3k(9k^2+5)$ ومنه: A يقبل القسمة على 3.

الحالة الثانية: $n=3k+1$

في هذه الحالة: $A=(3k+1)((3k+1)^2+5)=(3k+1)(9k^2+6k+6)$
$=3(3k+1)(3k^2+2k+2)$

ومنه: A يقبل القسمة على 3.

الحالة الثالثة: $n=3k+2$

في هذه الحالة: $A=(3k+2)((3k+2)^2+5)=(3k+2)(9k^2+12k+9)$
$=3(3k+2)(3k^2+4k+3)$

ومنه: A يقبل القسمة على 3.

خلاصة

من الحالات الثلاثة السابقة نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن A يقبل القسمة على 3.

تمرين محلول 5:

❶ n عدد طبيعي .

أ- أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، العددان $3n-1$ و $5n-2$ أوليان فيما بينهما .

ب- أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، العددان $11n+6$ و $9n+5$ أوليان فيما بينهما

❷ n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 .

أثبت أن العددين n^2 و $n-1$ أوليان فيما بينهما .

الحل:

❶ أ- إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $3n-1$ و $5n-2$ أوليان فيما بينهما :

طريقة : نفرض أن $PGCD(3n-1;5n-2)=d$ ونبرهن أن $d=1$

من المساواة : $PGCD(3n-1;5n-2)=d$ نستنتج أن : $d\,|\,(3n-1)$

و $d\,|\,(5n-2)$ ومنه : $d\,|\,[5(3n-1)-3(5n-2)]$ أي : $d\,|\,1$ وبالتالي : $d=1$

إذن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$، العددان $3n-1$ و $5n-2$ أوليان فيما بينهما .

ب- إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $11n+6$ و $9n+5$ أوليان فيما بينهما :

نفرض أن : $PGCD(11n+6;9n+5)=d$ ونبرهن أن : $d=1$

من المساواة : $PGCD(11n+6;9n+5)=d$ نستنتج أن : $d\,|\,(11n+6)$

و $d\,|\,(9n+5)$ ومنه : $d\,|\,[9(11n+6)-11(9n+5)]$ أي : $d\,|\,1$ وبالتالي : $d=1$

إذن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$، العددان $11n+6$ و $9n+5$ أوليان فيما بينهما .

❷ إثبات أن العددين n^2 و $n-1$ أوليان فيما بينهما :

نفرض أن : $PGCD(n^2;n-1)=d$ ونبرهن أن : $d=1$

من المساواة : $PGCD(n^2;n-1)=d$ نستنتج أن : $d\,|\,n^2$ و $d\,|\,(n-1)$

ومنه : $d\,|\,[n^2-(n-1)(n+1)]$ أي : $d\,|\,1$ وبالتالي : $d=1$

إذن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$، العددان n^2 و $n-1$ أوليان فيما بينهما .

الموافقات التعرد PPCM

الكفاءات المستهدفة

- معرفة واستعمال خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$.
- نشر عدد طبيعي وفق أساس .
- الانتقال من نظام أساسه α إلى نظام أساسه β .
- استعمال خواص المضاعف المشترك الأصغر .
- استعمال العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر

نشاط 1: هذا النشاط هو تمهيد للموافقات عن طريق مسألة تاريخ

صادف أول جانفي 2002 يوم ثلاثاء.

جانفي 2002						
L	M	M	J	V	S	D
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

1 ما هي الأيام الموافقة لكل من التواريخ الآتية:

أ) 29 جانفي 2002.

ب) 12 مارس 2002.

جـ) 1 جانفي 2003.

2 علما أن 2004 سنة كبيسة (366 يوما)،

ما هو عدد الأيام من 1 جانفي 2002

إلى 23 أفريل 2005؟ استنتج اليوم الذي يوافق 23 أفريل 2005.

الحل:

1 أ) من 1 جانفي 2002 إلى 29 جانفي 2002:

يوجد $28 = 1 - 29$ يوما بمعنى 4 أسابيع.

إذن: 29 جانفي 2002 كان أيضا يوم ثلاثاء.

ب) من 1 جانفي 2002 إلى 12 مارس 2002:

يوجد $30 = 1 - 31$ يوما من جانفي و28 يوما من فيفري و 12 يوما من مارس.

وبالتالي: يوجد $70 = 12 + 28 + 30$ يوما بمعنى 10 أسابيع.

إذن: 12 مارس 2002 كان أيضا يوم ثلاثاء.

جـ) من 1 جانفي 2002 إلى 1 جانفي 2003:

يوجد 365 يوما بمعنى 52 أسبوعا و1 يوم $(365 = 7 \times 52 + 1)$.

إذن: 1 جانفي 2003 كان يوم أربعاء.

2 من 1 جانفي 2002 إلى 23 أفريل 2004: يوجد $730 = 365 \times 2$ يوما

ثم 366 يوما من 1 جانفي 2004 إلى 1 جانفي 2005 (2004 سنة كبيسة).

ومن 1 جانفي 2005 إلى 23 أفريل 2005:

يوجد $112 = 23 + 31 + 28 + 30$ يوما

المجموع: $1208 = 112 + 366 + 730$ يوما بمعنى 172 أسبوعا و 4 أيام

$(1208 = 7 \times 172 + 4)$

إذن: 23 أفريل 2005 كان يوم سبت.

نشاط 2: يهدف هذا النشاط إلى توظيف المضاعف المشترك الأصغر و خواصه

لحل مسائل من الواقع.

نريد تصفيف تلاميذ ثانوية في الساحة.

عندما ننشئ صفوفا ذات 45 تلميذا يبقى 44 وعندما ننشئ صفوفا ذات 50 تلميذا يبقى 49 وعندما ننشئ صفوفا ذات 75 تلميذا يتبقى 74.

احسب N عدد تلاميذ الثانوية علما أن N محصور بين 1000 و1500.

الحل:

نعلم أن كل عدد صحيح، يوافق بترديد n، باقي قسمته على n.

من المعطيات نستنتج أ: $N \equiv 44\,[45]$ ، $N \equiv 49\,[50]$ و $N \equiv 74\,[75]$

وبإضافة العدد 1 (خواص الموافقات) نحصل على:

$N+1 \equiv 0\,[45]$ ، $N+1 \equiv 0\,[50]$ و $N+1 \equiv 0\,[75]$

وهذا يعني أن العدد $N+1$ يقبل القسمة على كل من الأعداد 45 ، 50 و 75 فهو مضاعف مشترك لها، وبالتالي مضاعف للمضاعف المشترك الأصغر لها.

لدينا: $PPCM(45;50;75) = 5 \times PPCM(9;10;15)$

لكن: $PPCM(9;10;15) = 90$ ومنه: $PPCM(45;50;75) = 5 \times 90 = 450$

أخيرا: $N+1 = 450k$ مع $k \in \mathbb{N}^*$.

لكن: $1000 < N < 1500$ وبالتالي: $999 < 450k < 1499$

ومنه: $\frac{999}{450} < k < \frac{1499}{450}$ أي: $k \in \left]2.22\,;\,3.33\right[$ نستنتج أن: $k = 3$

وبذلك نحصل على: $N = 1349$

إذن: عدد تلاميذ الثانوية هو 1349

الموافقات في $\mathbb{Z}$

n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 .

1 خاصة أساسية :

للعددين الصحيحين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n إذا وفقط إذا كان $a-b$ مضاعفا للعدد n.

2 تعريف :

القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني أن للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n.

ترميز : إذا كان a و b متوافقين بترديد n، نكتب : $a\equiv b\,[n]$ أو $a\equiv b\,(n)$

ونقرأ : a يوافق b بترديد n.

نتيجة: [$a\equiv b\,[n]$] يكافئ [$a-b$ مضاعف للعدد n]

أمثلة:

✦ $21\equiv -3\,[8]$ لأن: $21-(-3)=24=8\times 3$

✦ الكتابة : $n\equiv 1\,[3]$ تعني: $n=3k+1$ مع $k\in\mathbb{Z}$

✦ $n\equiv -5\,[3]$ يمكن أن تترجم بأية كتابة $n\equiv p\,[3]$ حيث p و -5 لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على 3. مثلا: $n\equiv 1\,[3]$

ملاحظات:

✦ إذا كان $n=1$، فإن العلاقة $a\equiv b\,[n]$ صحيحة مهما كان العددان a و b.

✦ إذا كان $n=0$، فإن العلاقة $a\equiv b\,[n]$ تؤول إلى $a=b$ وهي لا تعطي أي جديد.

لهذا نفرض في هذه الفقرة أن n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 .

✦ يمكن التعامل مع الموافقة بترديد عدد سالب، لكنها لا تعطي أي جديد لأن العلاقة « $a-b$ مضاعف للعدد n » تكافئ العلاقة « $a-b$ مضاعف للعدد $-n$ »

3 خواص :

الخاصة 1 : n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 .

كل عدد صحيح a يوافق ، بترديد n، باقي قسمته على n.

الخاصة 2 : a ، b و c أعداد صحيحة.

إذا كان $a\equiv b\,[n]$ و $b\equiv c\,[n]$ فإن $a\equiv c\,[n]$

الخاصة : a ، b ، c و d أعداد صحيحة .

إذا كان $a\equiv b\,[n]$ و $c\equiv d\,[n]$ فإن

✦ $a+c\equiv b+d\,[n]$ و $a-c\equiv b-d\,[n]$

✦ $a\times c\equiv b\times d\,[n]$

✦ من أجل كل عدد طبيعي p ، $a^p\equiv b^p\,[n]$

احذر: لا يمكننا اختصار موافقة مثل مساواة: $2a\equiv 2b\,[n]$ لا يستلزم $a\equiv b\,[n]$

مثلا: $16\equiv 20\,[4]$ ، بينما 8 و 10 غير متوافقين بترديد 4 .

تمرين محلول 1:

عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2014^{1435} على 3 .

الحل:

لدينا : $2014=3\times 671+1$ ومنه : $2014\equiv 1\,[3]$

ونعلم أنه إذا كان: $a\equiv b\,[n]$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $a^p\equiv b^p\,[n]$

من العلاقة : $2014\equiv 1\,[3]$ نستنتج أن : $2014^{1435}\equiv 1^{1435}\,[3]$

لكن : $1^{1435}=1$ وبالتالي : $2014^{1435}\equiv 1\,[3]$

إذن: $2014^{1435}\equiv 1\,[3]$ أي أن باقي قسمة 2014^{1435} على 3 هو 1 .

تمرين محلول 2:

1 ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5 .

② استنتج باقي قسمة العدد 2^{2013} على 5 .

الحل :

① دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5 :

$2^0 \equiv 1[5]$ ، $2^1 \equiv 2[5]$ ، $2^2 \equiv 4[5]$ ، $2^3 \equiv 3[5]$ ، $2^4 \equiv 1[5]$.

من العلاقة: $2^4 \equiv 1[5]$ نستنتج أن: $(2^4)^k \equiv 1^k[5]$ أي: $2^{4k} \equiv 1[5]$ مع $k \in \mathbb{N}$

$2^{4k+1} \equiv 2[5]$ ، $2^{4k+2} \equiv 4[5]$ ، $2^{4k+3} \equiv 3[5]$

نلخص بواقي قسمة 2^n على 5 في الجدول الآتي:

في هذا الجدول يدلّ k على عدد طبيعي.

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
البواقي	1	2	4	3

ملاحظة:

في هذه الحالة نقول إن بواقي قسمة 2^n على 5 دورية ودورها 4 .

② استنتاج باقي قسمة العدد 2^{2013} على 5 :

لدينا : $2013 = 4 \times 503 + 1$ وبالتالي فإن العدد 2013 من الشكل $4k+1$

من الجدول السابق ، نستنتج أن باقي قسمة العدد 2^{2013} على 5 هو 2 .

تمرين محلول 3:

أثبت ، أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $n(n+1)(2n+1)$ مضاعف للعدد 6

الحل:

بواقي القسمة على 6 هي: 0، 1، 2، 3، 4 و 5 وبالتالي فإن كل عدد طبيعي n

يوافق 0، 1، 2، 3، 4 أو 5 بترديد 6 .

خواص الموافقات يمكننا من إكمال الجدول الآتي :

$n \equiv$	$n+1 \equiv$	$2n+1 \equiv$	$n(n+1)(2n+1)$
0	$0+1 \equiv 1$	$2\times 0+1 \equiv 1$	$0\times 1\times 1 = 0 \equiv 0$
1	$1+1 \equiv 2$	$2\times 1+1 \equiv 3$	$1\times 2\times 3 = 6 \equiv 0$
2	$2+1 \equiv 3$	$2\times 2+1 \equiv 5$	$2\times 3\times 5 = 30 \equiv 0$
3	$3+1 \equiv 4$	$2\times 3+1 = 7 \equiv 1$	$3\times 4\times 1 = 12 \equiv 0$
4	$4+1 \equiv 5$	$2\times 4+1 = 9 \equiv 3$	$4\times 5\times 3 = 60 \equiv 0$
5	$5+1 = 6 \equiv 0$	$2\times 5+1 = 11 \equiv 5$	$5\times 0\times 5 = 0 \equiv 0$

من الجدول السابق، نلاحظ أنه في كل الحالات: $n(n+1)(2n+1) \equiv 0[6]$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n، $n(n+1)(2n+1)$ مضاعف للعدد 6 .

تمرين 4:

1) ادرس ، تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n وَ 4^n على 7 .

2) برهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد $2\times 2012^{6n+4} + 3\times 1432^{3n+2}$ قابلا للقسمة على 7 .

3) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها العام u_n حيث: $u_n = 2\times 3^n + 3\times 4^n$.

أ- احسب ، بدلالة n ، المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

ب- ما هي قيم الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها S_n قابلا للقسمة على 7 ؟

التعداد

1 تعريف:

x عدد طبيعي أكبر تماما من 1 .

ليكن a_n ، a_{n-1} ، ... ، a_2 ، a_1 ، a_0 أعدادا طبيعية أصغر تماما من x.

القول أن عدد N يكتب $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0}$ في النظام ذي الأساس x يعني:

$$N=\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1 a_0}=a_n\times x^n+a_{n-1}\times x^{n-1}+\dots+a_2\times x^2+a_1\times x+a_0$$

ملاحظات:

- يمثل كل عدد طبيعي أصغر تماما من x برمز وحيد يسمى رقما.
- في كل نظام تعداد ذي الأساس x، الرقمان 0 و 1 يمثلان على الترتيب العددين «صفر» و «واحد» .
- مهما يكن الأساس x لدينا $x=1\times x+0$. إذن العدد x يكتب في النظام ذي الأساس x هكذا $\overline{10}$.
- عندما يكون الأساس «عشرة» يكتب العدد N كما يلي: $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ عوضا عن: $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0}$.

أمثلة:

1) التعداد العشري هو التعداد الذي أساسه عشرة وأرقامه : 0 ، 1 ، 2 ، ... ، 9 .

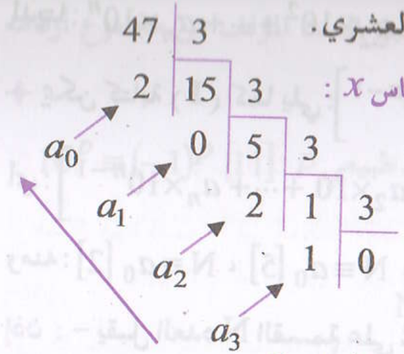
2) التعداد الثنائي هو التعداد الذي أساسه اثنان وأرقامه : 0 ، 1 .

3) التعداد ذو الأساس 12 هو التعداد الذي أساسه إثنا عشرة وأرقامه : 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، α (عشرة) ، β (إحدى عشرة) .

في هذا التعداد العدد الذي يكتب $\overline{\alpha 5 \beta}$ هو العدد N الذي نشره وفق الأساس 12 هو:

$$N=\beta+5\times12+\alpha\times12^2=\beta+60+144\alpha$$
$$=11+60+144\times10=1511$$

إذن: N هو العدد الذي يكتب 1511 في النظام العشري.



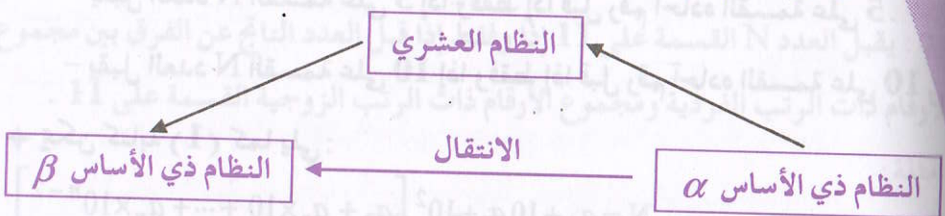
2 الانتقال من النظام العشري إلى النظام ذي الأساس x :

مثال: كتابة العدد 47 في النظام ذي الأساس 3 :

يكتب العدد 47 في النظام الذي أساسه 3

كما يلي: $\overline{1202}$ $(\overline{a_3 a_2 a_1 a_0})$

3 الانتقال من النظام ذي الأساس α إلى النظام ذي الأساس β :

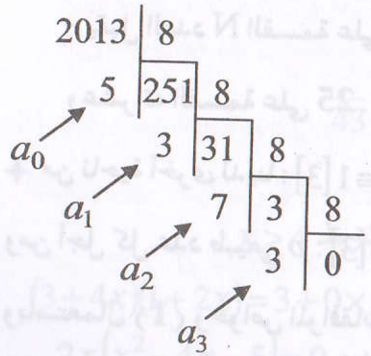


مثال: N عدد طبيعي يكتب $\overline{31023}$ في النظام ذي الأساس 5 .

كتابة العدد N في النظام ذي الأساس 8 :

1) كتابة العدد N في النظام العشري:

$$N=\overline{31023}=3+2\times5+0\times5^2+1\times5^3+3\times5^4$$
$$=13+125+1875=2013$$



2) كتابة العدد 2013 في النظام ذي الأساس 8 :

يكتب العدد 2013 في النظام الذي أساسه 8

كما يلي: $\overline{3735}$ $(\overline{a_3 a_2 a_1 a_0})$.

إذن: العدد N الذي يكتب $\overline{31023}$ في النظام ذي الأساس 5، يكتب $\overline{3735}$ في النظام ذي الأساس 8 .

4 قابلية القسمة على 2 ، 10 ، 5 ، 4 ، 25 ، 3 ، 9 ، 11 :

N عدد طبيعي يكتب $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ في النظام العشري.

لدينا : $N = a_0 + a_1\times10 + a_2\times10^2 + \cdots + a_n\times10^n \;\cdots\;(1)$

✦ يمكن كتابة (1) كما يلي : $N = a_0 + 10\left[a_1 + a_2\times10 + \cdots + a_n\times10^{n-1}\right]$

أي : $N = a_0 + 2\times5\left[a_1 + a_2\times10 + \cdots + a_n\times10^{n-1}\right]$

ومنه : $N\equiv a_0\,[2]$ ، $N\equiv a_0\,[5]$ و $N\equiv a_0\,[10]$.

إذن : – يقبل العدد N القسمة على 2 إذا وفقط إذا قبل رقم آحاده القسمة على 2.

– يقبل العدد N القسمة على 5 إذا وفقط إذا قبل رقم آحاده القسمة على 5.

– يقبل العدد N القسمة على 10 إذا وفقط إذا قبل رقم آحاده القسمة على 10.

✦ يمكن كتابة (1) كما يلي :

$$N = a_0+10a_1+10^2\left[a_2 + a_3\times10 + \cdots + a_n\times10^{n-2}\right]$$

أي : $N = a_0+10a_1+4\times25\left[a_2 + a_3\times10 + \cdots + a_n\times10^{n-2}\right]$

ومنه : $N\equiv a_0+10a_1\,[4]$ و $N\equiv a_0+10a_1\,[25]$

إذن : – يقبل العدد N القسمة على 4 إذا وفقط إذا قبل العدد المؤلف من رقمي آحاده وعشراته القسمة على 4 .

– يقبل العدد N القسمة على 25 إذا وفقط إذا قبل العدد المؤلف من رقمي آحاده وعشراته القسمة على 25.

✦ من ناحية أخرى لدينا : $10\equiv1\,[3]$ و $10\equiv1\,[9]$

ومن أجل كل عدد طبيعي p : $10^p\equiv1\,[3]$ و $10^p\equiv1\,[9]$

وباستعمال (1) وخواص الموافقات نستنتج :

$$N\equiv a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n\,[3] \quad \text{وَ} \quad N\equiv a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n\,[9]$$

إذن : – يقبل العدد N القسمة على 3 إذا وفقط إذا قبل العدد المؤلف من مجموع أرقامه القسمة على 3 .

– يقبل العدد N القسمة على 9 إذا وفقط إذا قبل العدد المؤلف من مجموع أرقامه القسمة على 9 .

✦ لدينا أيضا : $10\equiv-1\,[11]$ ومن أجل كل عدد طبيعي p : $10^p\equiv(-1)^p\,[11]$

وباستعمال (1) وخواص الموافقات نستنتج :

$$N\equiv a_0-a_1+a_2-a_3\cdots+(-1)^n a_n\,[11]$$

أي : $N\equiv(a_0+a_2+a_4+\cdots)-(a_1+a_3+a_5+\cdots)\,[11]$.

إذن : يقبل العدد N القسمة على 11 إذا وفقط إذا قبل العدد الناتج عن الفرق بين مجموع الأرقام ذات الرتب الفردية ومجموع الأرقام ذات الرتب الزوجية القسمة على 11 .

أمثلة :

العدد 2010 يقبل القسمة على كل من 2، 5 و 10 .

العدد 2013 يقبل القسمة على 3 لأن $(2+0+1+3)$ يقبل القسمة على 3.

العدد 1431 يقبل القسمة على 9 لأن $(1+4+3+1)$ يقبل القسمة على 9.

العدد 2014 لا يقبل القسمة على 4 لأن 14 لا يقبل القسمة على 4.

العدد 96734 يقبل القسمة على 11 لأن $(9+7+4)-(6+3)$ يقبل القسمة على11

تمرين محلول 4:

ما هو أساس التعداد الذي يكون فيه : $\overline{43}\times\overline{21}=\overline{2003}$

الحل :

نفرض أن الأساس هو x ، وبالتالي فإن x يحقق الشرط $x>4$

$\overline{43}\times\overline{21}=\overline{2003}$ يكافئ $(3+4x)(1+2x)=3+0\times x+0\times x^2+2\times x^3$

وبعد التبسيط نجد : $2x^3-8x^2-10x=0$ ومنه : $2x(x^2-4x-5)=0$

حلول هذه المعادلة هي : -1 ، 0 ، 5 .

وبما أن $x>4$ نستنتج أن $x=5$

إذن : أساس التعداد الذي يكون فيه $\overline{43}\times\overline{21}=\overline{2003}$ هو 5 .

تمرين محلول 5:

N عدد طبيعي يكتب $\overline{4x3}$ في النظام ذي الأساس 5 و $\overline{x30}$ في النظام ذي الأساس 9 .

أوجد x ثم اكتب N في النظام العشري.

الحل :

✦ إيجاد x :

الشرط: $0\le x\le 4$

لدينا : $N=\overline{4x3}=3+x\times5+4\times5^2$ و $N=\overline{x30}=0+3\times9+x\times9^2$

ومنه: $3+x\times5+4\times5^2=0+3\times9+x\times9^2$

وبالتالي: $5x+103=81x+27$ أي: $76x=76$ إذن: $x=1$

✦ كتابة N في النظام العشري: $N=\overline{413}=3+1\times5+4\times5^2=108$

تمرين 6:

1) جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 225 و 180 .

2) حل ، في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ ، المعادلة : $225x-180y=90$ ...(1)

3) عيّن مجموعة حلول المعادلة (1) التي تحقق $|x-y+1|<2$

4) a و b عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب $\overline{52}$ ، $\overline{252}$ في النظام ذي الأساس α ، ويكتبان $\overline{44}$ ، $\overline{206}$ في النظام ذي الأساس β .

- عيّن α و β ثم a و b .

المضاعف المشترك الأصغر

1 المضاعف المشترك الأصغر لعددين:

✦ a عدد طبيعي غير معدوم . نرمز إلى مجموعة مضاعفات العدد a بالرمز M_a

مثلا : $M_3=\{3;6;9;12;15;...\}$ ، $M_4=\{4;8;12;16;20;...\}$

✦ a و b عددان طبيعيان غير معدومين . نرمز إلى مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b بالرمز $M_{a,b}$ حيث : $M_{a,b}=M_a\cap M_b$.

مثلا : $M_{3,4}=M_3\cap M_4=\{12;18;24;...\}$

✦ a و b عددان طبيعيان غير معدومين. يسمي أصغر عنصر من المجموعة $M_a\cap M_b$ بالمضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b ونرمز له بـ $PPCM(a;b)$.

مثلا : $PPCM(3;4)=12$

2 خواص الـ PPCM :

الخاصة 1 : a ، b و k أعداد طبيعية غير معدومة .

$PPCM(ka;kb)=k\times PPCM(a;b)$

الخاصة 2 : a و b عددان طبيعيان غير معدومين.

إذا كان $PGCD(a;b)=d$ و $PPCM(a;b)=m$ فإن $d\times m=a\times b$

حالة خاصة: إذا كان a و b أوليين فيما بينهما فإن $m=a\times b$

(a و b أوليان فيما بينهما معناه $PGCD(a;b)=1$ ومنه: $1\times m=a\times b$)

الخاصة 3 : a ، b و n أعداد طبيعية غير معدومة.

إذا كان $n\equiv0[a]$ و $n\equiv0[b]$ فإن $n\equiv0[PPCM(a;b)]$

الخاصة 4 : مجموعة المضاعفات المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة مضاعفات المضاعف المشترك الأصغر لهما.

3 تمديد مفهوم المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين:

المضاعف المشترك الأصغر للعددين الصحيحين a و b هو أصغر عدد طبيعي

غير معدوم m حيث $m = PPCM(a;b) = PPCM(|a|;|b|)$.

تمرين محلول 6:

n عدد طبيعي، باقي قسمته على 15 هو 14 وباقي قسمته على 18 هو 17 وباقي قسمته على 25 هو 24 .

أوجد قيم العدد n المحصورة بين 1000 و 2000.

الحل:

تذكير: لتعيين قيم n نستعين بالخاصة الآتية:

إذا كان $n \equiv 0\,[a]$ و $n \equiv 0\,[b]$ و $n \equiv 0\,[c]$ فإن $n \equiv 0\,[PPCM(a;b;c)]$

لدينا: $\begin{cases} n \equiv 14\,[15] \\ n \equiv 17\,[18] \\ n \equiv 24\,[25] \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} n+1 \equiv 0\,[15] \\ n+1 \equiv 0\,[18] \\ n+1 \equiv 0\,[25] \end{cases}$ وذلك بإضافة العدد 1 إلى طرفي كل موافقة

وحسب الخاصة 3 نستنتج أن: $n+1 \equiv 0\,[PPCM(15;18;25)]$

+ حساب $PPCM(15;18;25)$:

طريقة: عند البحث عن المضاعف المشترك الأصغر لعدة أعداد يمكن تعويض عددين منها بمضاعفهما المشترك الأصغر.

$$PPCM(15;18) = 3 \times PPCM(5;6) = 3 \times 5 \times 6 = 90$$

$$PPCM(90;25) = 5 \times PPCM(18;5) = 5 \times 18 \times 5 = 450$$

إذن: $PPCM(15;18;25) = 450$

+ تعيين n:

$n+1 \equiv 0\,[PPCM(15;18;25)]$ يكافئ $n+1 \equiv 0\,[450]$

ومنه: $n+1 = 450k$ مع k عدد طبيعي غير معدوم.

لكن: $1000 < n < 2000$ أي: $1000 < 450k - 1 < 2000$ ومنه: $k \in \{3;4\}$

إذن: $n \in \{1349;1799\}$

تمرين محلول 7: (بكالوريا 2007 . الشعبة : تقنيات المحاسبة)

1. عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين 1626 و306 .
2. عيّن الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية حيث: $a>b$ و $\begin{cases} a \times b = 11592 \\ d = 6 \end{cases}$

حيث d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a وb.

الحل:

1. تعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين 1626 و 306 :

باستعمال خوارزمية إقليدس كما يبيّنه الجدول الآتي نجد $PGCD(1626;306) = 6$

الحاصل		5	3	5	3
المقسوم والقاسم	1626	306	96	18	6
الباقي		96	18	6	0

2. تعيين الثنائيات $(a;b)$:

+ إذا كان $PGCD(a;b) = d$ فإنه يوجد عددان طبيعيان a' وb' أوليان فيما بينهما بحيث $a = d \times a'$ و $b = d \times b'$.

من المساواة: $PGCD(a;b) = 6$ نستنتج أنه يوجد عددان طبيعيان a' وb' أوليان فيما بينهما بحيث: $a = 6a'$ و $b = 6b'$.

لدينا: $a \times b = 11592$ ومنه: $6a' \times 6b' = 11592$ وبالتالي: $a' \times b' = 322$

نحلل العدد 322 إلى جداء عددين طبيعيين:

$$322 = 322 \times 1 = 161 \times 2 = 46 \times 7 = 23 \times 14$$

بما أن: $a > b$ فإن: $a' > b'$، وبالتالي توجد 4 حالات ممكنة للثنائيات $(a';b')$ هي: $(322;1)$، $(161;2)$، $(46;7)$، $(23;14)$.

إذن: الثنائيات $(a;b)$ المطلوبة هي:

$(1932;6)$، $(966;12)$، $(276;42)$، $(138;84)$

تمرين محلول 8: (بكالوريا 2006 تقنيات المحاسبة)

$\mathbb{N}$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية . m و d يرمزان على الترتيب إلى المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b.

أوجد الثنائيات $(a\,;b)$ من $\mathbb{N}^2$ التي تحقق : $\begin{cases} m-8d=4 \\ a>b \end{cases}$

الحل :

تذكير : لتعيين الثنائيات $(a\,;b)$ من $\mathbb{N}^2$ نستعين بالخاصتين الآتيتين :

✦ إذا كان $PGCD\,(a\,;b)=d$ فإنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما بينهما بحيث : $a=d\times a'$ و $b=d\times b'$.

✦ إذا كان $PGCD\,(a\,;b)=d$ و $PPCM\,(a\,;b)=m$ فإن $d\times m=a\times b$

لدينا : $a=d\times a'$ و $b=d\times b'$

ولدينا : $d\times m=a\times b$ ومنه : $d\times m=da'\times db'$ وبالتالي : $m=da'b'$

تصبح المساواة $m-8d=4$ كما يلي : $da'b'-8d=4$ أي : $d(a'b'-8)=4$

ومنه : d يقسم 4 . إذن : $d\in\{1;2;4\}$

– الحالة الأولى : $d=1$

تصبح المساواة $d(a'b'-8)=4$ كما يلي : $a'b'-8=4$ أي : $a'b'=12$

ومنه : $(a'\,;b')\in\{(4;3),(12;1)\}$ نستنتج أن : $(a\,;b)\in\{(4;3),(12;1)\}$

– الحالة الثانية : $d=2$

تصبح المساواة $d(a'b'-8)=4$ كما يلي : $a'b'-8=2$ أي : $a'b'=10$

ومنه : $(a'\,;b')\in\{(5;2),(10;1)\}$ نستنتج أن : $(a\,;b)\in\{(10;4),(20;2)\}$

– الحالة الثالثة : $d=4$

تصبح المساواة $d(a'b'-8)=4$ كما يلي : $a'b'-8=1$ أي : $a'b'=9$

ومنه : $(a'\,;b')=(9;1)$ نستنتج أن : $(a\,;b)=(36;4)$

خلاصة : الثنائيات $(a\,;b)$ المطلوبة هي :

$$(a\,;b)\in\{(4;3),(12;1),(10;4),(20;2),(36;4)\}$$

تمرين 9: (بكالوريا 1999 تقنيات المحاسبة)

❶ عيّن المجموعة S للأعداد الطبيعية a الأصغر تماما من 180 بحيث يكون القاسم المشترك الأكبر لـ a وَ 160 هو 20 .

❷ عيّن الأعداد a من المجموعة S بحيث يكون المضاعف المشترك الأصغر لـ a وَ 15 هو 60 .

تمرين 10: (بكالوريا 1996 تقنيات المحاسبة)

❶ أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 102 وَ 85 .

❷ عيّن كل الثنائيات $(a\,;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث :

$$\begin{cases} a+b=187 \\ PGCD\,(a\,;b)=17 \end{cases}$$

مبرهنتا بيزو وغوص
الأعداد الأولية

الكفاءات المستهدفة

- استعمال مبرهنة بيزو .
- استعمال مبرهنة غوص ونتائجها .
- التعرف على أولية عدد طبيعي .
- استعمال تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية لتعيين مضاعفات عدد طبيعي وقاسمه .
- استعمال تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية لتعيين القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر .

مبرهنتا بيزو وغوص

1 مبرهنة بيزو : يكون عددان صحيحان a وb أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان u وv حيث : $au+bv=1$.

تطبيقات مبرهنة بيزو : a ، b ، c و n أعداد طبيعية غير معدومة .

- إذا كان a أوليا مع كل من b و c فإنه يكون أوليا مع الجداء $b\times c$.
- إذا كان a أوليا مع b فإنه يكون أوليا مع b^n .
- إذا كان a أوليا مع b يكون a^n وb^n أوليين فيما بينهما .

تمرين محلول 1:

n عدد صحيح .

1. أثبت أن العددين $2n+5$ و $n+2$ أوليان فيما بينهما .
2. أثبت أن العددين $2n+5$ و $n+3$ أوليان فيما بينهما .
3. استنتج أن العددين $2n+5$ و n^2+5n+6 أوليان فيما بينهما .

الحل :

1. إثبات أن العددين $2n+5$ و $n+2$ أوليان فيما بينهما :

نلاحظ أن : $1(2n+5)-2(n+2)=1$ وحسب مبرهنة بيزو فإن العددين $2n+5$ و $n+2$ أوليان فيما بينهما .

طريقة ثانية : إثبات أن العددين $2n+5$ و $n+2$ أوليان فيما بينهما يؤول إلى البحث عن وجود عددين صحيحين u و v بحيث $u(2n+5)+v(n+2)=1$.

لدينا : $u(2n+5)+v(n+2)=1$ ومنه : $2un+5u+vn+2v-1=0$

وبالتالي : $(2u+v)n+(5u+2v-1)=0$

تذكير : يكون كثير حدود معدوما إذا وفقط إذا كانت كل معاملاته معدومة .

نستنتج أن : $\begin{cases}2u+v=0\\5u+2v-1=0\end{cases}$ وبحل هذه الجملة نجد : $(u;v)=(1;-2)$

إذن : توجد ثنائية $(u;v)=(1;-2)$ بحيث $1(2n+5)-2(n+2)=1$

وحسب مبرهنة بيزو فإن العددين $2n+5$ و $n+2$ أوليان فيما بينهما .

② إثبات أن العددين $2n+5$ و $n+3$ أوليان فيما بينهما :

نلاحظ أن : $-(2n+5)+2(n+3)=1$ وحسب مبرهنة بيزو فإن العددين $2n+5$ و $n+3$ أوليان فيما بينهما .

(توجد ثنائية $(u;v)=(-1;2)$ بحيث $-(2n+5)+2(n+3)=1$)

③ استنتاج أن العددين $2n+5$ و n^2+5n+6 أوليان فيما بينهما :

نلاحظ أن : $n^2+5n+6=(n+2)(n+3)$

ونعلم أنه إذا كان a أوليا مع كل من b و c فإنه يكون أوليا مع الجداء $b\times c$ ،

وحسب السؤالين السابقين وجدنا أن $2n+5$ أولي مع كل من $n+2$ و $n+3$

نستنتج أن العدد $2n+5$ أولي مع الجداء $(n+2)(n+3)$.

إذن : العددان $2n+5$ و n^2+5n+6 أوليان فيما بينهما .

2 مبرهنة غوص : a، b و c أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا قسم العدد a الجداء $b\times c$ وكان a أوليا مع b فإن a يقسم c.

تمرين محلول 2:

① حل في $\mathbb{Z}^2$، المعادلة $11x-5y=0$.

② أ- تأكد أن الثنائية $(x_0;y_0)=(4;6)$ حل للمعادلة (E): $11x-5y=14$

ب- استنتج في $\mathbb{Z}^2$، مجموعة حلول المعادلة (E).

الحل:

① حل المعادلة $11x-5y=0$:

لدينا : $11x-5y=0$ ومنه : $11x=5y$

5 يقسم الجداء $11x$ وَ 5 أولي مع 11 وحسب مبرهنة غوص فإن 5 يقسم x

ومنه : $x=5k$ مع k عدد صحيح .

بالتعويض في المساواة $11x=5y$ نجد $11(5k)=5y$ ومنه : $y=11k$

إذن : حلول المعادلة المعطاة هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $(k\in\mathbb{Z})$ $\begin{cases}x=5k\\y=11k\end{cases}$

② أ- التأكد أن الثنائية $(x_0;y_0)=(4;6)$ حل للمعادلة (E):

لدينا : $11\times4-5\times6=44-30=14$

ومنه : الثنائية $(x_0;y_0)=(4;6)$ حل للمعادلة (E).

ب- استنتاج مجموعة حلول المعادلة (E):

لدينا : $\begin{cases}11x-5y=14\\11x_0-5y_0=14\end{cases}$ بالطرح طرف من طرف نحصل على:

$11(x-x_0)-5(y-y_0)=0$ ومنه : $11(x-x_0)=5(y-y_0)$

5 يقسم $11(x-x_0)$ وَ 5 أولي مع 11 وحسب غوص فإن 5 يقسم $(x-x_0)$

ومنه : $x-x_0=5k$. إذن : $x=5k+x_0$ مع k عدد صحيح .

11 يقسم $5(y-y_0)$ وَ 11 أولي مع 5 وحسب غوص فإن 11 يقسم $(y-y_0)$

ومنه : $y-y_0=11k$. إذن : $y=11k+y_0$ مع k عدد صحيح .

ملاحظة:

بعد تعيين x ، يمكن التعويض في المعادلة $11(x-x_0)=5(y-y_0)$ لتعيين قيمة y .

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $(k\in\mathbb{Z})$ $\begin{cases}x=5k+4\\y=11k+6\end{cases}$

تمرين محلول 3: (تمرين بكالوريا)

① عيّن القاسم المشترك الأكبر للأعداد **1996** ، **1497** ، **2994** .

② x و y عددان صحيحان . لتكن المعادلة (E) : $1996x - 1497y = 2994$

أ- أثبت أن x مضاعف للعدد 3 وأن y مضاعف للعدد 2 ، ثم عيّن مجموعة حلول المعادلة (E) .

ب- عيّن الحلول $(x\,;y)$ للمعادلة (E) بحيث يكون $xy = 1950$.

الحل :

① **تعيين القاسم المشترك الأكبر للأعداد 1996 ، 1497 ، 2994 :**

لتعيين القاسم المشترك الأكبر للأعداد **1996** ، **1497** ، **2994** يمكن استعمال :

- خوارزمية إقليدس .
- التحليل إلى جداء عوامل أولية .
- استعمال الخواص ($PGCD\,(ka\,;kb) = k \times PGCD\,(a\,;b)$) .

$$PGCD\,(1996\,;1497\,;2994) = 499$$

② أ- **إثبات أن x مضاعف للعدد 3 وأن y مضاعف للعدد 2 :**

بقسمة طرفي المعادلة (E) على العدد **499** نحصل على المعادلة : $4x - 3y = 6$

تذكير : إذا قسم العدد a الجداء $b \times c$ وكان a أوليا مع b فإن a يقسم c .

لدينا : $4x - 3y = 6$ ومنه : $4x = 3y + 6$ وبالتالي : $4x = 3(y+2)$

3 يقسم الجداء $4x$ وَ 3 أولي مع 4 وحسب غوص فإن 3 يقسم x

نستنتج أن x مضاعف للعدد 3 .

ولدينا : $4x - 3y = 6$ ومنه : $3y = 4x - 6$ وبالتالي : $3y = 2(x-3)$

2 يقسم الجداء $3y$ وَ 2 أولي مع 3 وحسب غوص فإن 2 يقسم y

نستنتج أن y مضاعف للعدد 2 .

✦ **تعيين مجموعة حلول المعادلة (E) :**

من السؤال السابق وجدنا أن x مضاعف للعدد 3 وبالتالي : $x = 3k$

وبالتعويض في المعادلة $4x - 3y = 6$ نجد : $y = 4k - 2$

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x\,;y)$ حيث : $(k \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} x = 3k \\ y = 4k - 2 \end{cases}$.

ب- **تعيين الحلول $(x\,;y)$ للمعادلة (E) بحيث يكون $xy = 1950$:**

لدينا : $xy = 1950$ ومنه : $3k(4k-2) = 1950$

ومنه : $2k^2 - k - 1950 = 0$ وبحل هذه المعادلة نجد : $k = 13$

إذن : $(x\,;y) = (39\,;50)$

الأعداد الأولية

1 تعريف :

القول أن العدد الطبيعي n أولي معناه : n يقبل قاسمين بالضبط في $\mathbb{N}$ هما 1 و n نفسه .

ملاحظات:

0 غير أولي لأنه يقبل عددا غير منته من القواسم .

1 غير أولي لأنه يقبل قاسما واحدا فقط هو 1 .

2 هو العدد الزوجي الوحيد الأولي .

3 ، 5 ، 7 ، 11 أعداد أولية .

4 ، 6 ، 8 ، 9 أعداد غير أولية .

2 خواص:

الخاصة 1 : كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 يقبل على الأقل قاسما أوليا .

الخاصة 2 : كل عدد طبيعي n غير أولي أكبر تماما من 1 يقبل قاسما أوليا a حيث $a \le \sqrt{n}$.

الخاصة 3 : مجموعة الأعداد الأولية مجموعة غير منتهية .

مثال : إثبات أن العدد 251 أولي

لدينا : $\sqrt{251} \approx 15.84$. الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{251}$ هي : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 . العدد 251 لا يقبل القسمة على كل من 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 و 13

إذن : العدد 251 عدد أولي .

3 تحليل عدد طبيعي غير أولي إلى جداء عوامل أولية :

مثال : $2010 = 2\times3\times5\times67$

2010	2
1005	3
335	5
67	67
1	

ملاحظة:

في بعض الحالات يمكن الإسراع في تحليل عدد باستعمال بعض القواسم غير الأولية الظاهرة .

مثال : $400=4\times100=2^2\times10^2=2^2\times(2\times5)^2=2^4\times5^2$

4 القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين :

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية **المشتركة** في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة و**بأصغر أس** .

مثال : $PGCD\,(400\,;2010)=2\times5=10$

5 المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين:

المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية **المشتركة وغير المشتركة** في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة و**بأكبر أس** .

مثال : $PPCM\,(400\,;2010)=2^4\times3\times5^2\times67=80400$

تمرين محلول 4: (بكالوريا 2008 مقترحة . الشعبة : رياضيات)

1. أثبت أن العدد 251 عدد أولي.
2. حلل العدد 2008 إلى جداء عوامل أولية واستنتج الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2008.

عيّن الأعداد الطبيعية a و b بحيث : $m^3+35d^3=2008$

علما أن : $m=PPCM\,(a\,;b)$ و $d=PGCD\,(a\,;b)$

الحل :

1. إثبات أن العدد 251 عدد أولي :

تذكير : - كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 يقبل على الأقل قاسما أوليا .

- كل عدد طبيعي n غير أولي أكبر تماما من 1 يقبل قاسما أوليا a حيث $a \le \sqrt{n}$

لدينا: $\sqrt{251} \approx 15.84$. الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{251}$ هي : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 . العدد 251 لا يقبل القسمة على كل من 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 و 13

إذن: العدد 251 عدد أولي .

2 تحليل العدد 2008 إلى جداء عوامل أولية : $2008 = 2^3 \times 251$

✦ استنتاج الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2008 :

من المساواة $2008 = 1^3 \times 2^3 \times 251$ نستنتج أنه يوجد عددان طبيعيان مكعب كل منهما يقسم 2008 هما : 1 و 2

✦ تعيين الأعداد الطبيعية a و b بحيث $m^3 + 35d^3 = 2008$:

تذكير: a و b عددان طبيعيان غير معدومين.

✦ إذا كان $PGCD(a;b)=d$ فإنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما بينهما بحيث: $a = d\times a'$ و $b = d\times b'$.

✦ $PGCD(a;b)\times PPCM(a;b) = a\times b$

لدينا: $m\times d = a\times b$ ومنه: $m\times d = da'\times db'$ إذن: $m = da'b'$

تصبح المساواة: $m^3 + 35d^3 = 2008$ كما يلي: $(da'b')^3 + 35d^3 = 2008$

ومنه: $d^3\left[(a'b')^3 + 35\right] = 2008$ نستنتج أن: d^3 يقسم 2008

واعتمادا على السؤال السابق نستنتج أن: $d \in \{1;2\}$

- عندما $d=1$:

من: $d^3\left[(a'b')^3 + 35\right] = 2008$ نحصل على: $(a'b')^3 = 1973$ (مستحيلة)

- عندما $d=2$:

من: $d^3\left[(a'b')^3 + 35\right] = 2008$ نحصل على: $(a'b')^3 = 216$ ومن: $a'b' = 6$

توجد 4 حالات ممكنة للثنائيات $(a';b')$ هي: $(1;6)$، $(2;3)$، $(3;2)$، $(6;1)$

إذن: الثنائيات $(a;b)$ بحيث $m^3 + 35d^3 = 2008$ هي:

$(2;12)$، $(4;6)$، $(6;4)$، $(12;2)$.

تمرين محلول 5: (بكالوريا 1995 . الشعبة: تقنيات المحاسبة)

1 حلل كلا من العددين الطبيعيين 156 و 1962 إلى جداء عوامل أولية ثم أحسب قاسمهما المشترك الأكبر ومضاعفهما المشترك الأصغر .

2 عيّن الأعداد الطبيعية x، y التي تحقق:

$$\frac{x}{1962} + \frac{y}{156} = 1 \quad \text{و} \quad x + 13y = 1995$$

الحل:

1 تحليل كل من 156 و 1962 إلى جداء عوامل أولية:

$156 = 2^2 \times 3 \times 13$ و $1962 = 2 \times 3^2 \times 109$

✦ حساب $PGCD(156;1962)$: $PGCD(156;1962) = 2\times 3 = 6$

✦ حساب $PPCM(156;1962)$:

$$PPCM(156;1962) = 2^2 \times 3^2 \times 13 \times 109 = 51012$$

2 تعيين الأعداد الطبيعية x، y :

لدينا: $\frac{x}{1962} + \frac{y}{156} = 1$، نقوم بتوحيد المقامات فينتج: $\frac{26x + 327y}{51012} = 1$

ومنه: $26x + 327y = 51012$

ولدينا: $x + 13y = 1995$ ومنه: $x = 1995 - 13y$ وبالتعويض في المعادلة:

$26x + 327y = 51012$ نجد: $26(1995 - 13y) + 327y = 51012$

وبعد التبسيط ينتج: $y = 78$ وبالتعويض في $x = 1995 - 13y$ ينتج: $x = 981$

إذن: توجد ثنائية واحدة تحقق المعطيات هي $(x;y) = (981;78)$

المعادلات من الشكل $ax+by=c$

نعتبر ، في $\mathbb{Z}^2$، المعادلة $(E): ax + by = c$ حيث a، b و c أعداد صحيحة غير معدومة ، وليكن $PGCD(|a|;|b|)=d$

الحالة الأولى: إذا كان d لا يقسّم c فإن المعادلة (E) لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

مثال: حل في $\mathbb{Z}^2$، المعادلة: $15x-10y=3$

لدينا: $PGCD(15;10)=5$ و 5 لا يقسّم 3

نستنتج أن المعادلة المعطاة لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

الحالة الثانية: إذا كان d يقسّم c فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

بقسمة طرفي المعادلة (E) على العدد d نحصل على معادلة (E') من الشكل:

$a'x+b'y=c'$ حيث $PGCD(|a'|;|b'|)=1$، نقوم بحل المعادلة (E') بإتباع:

– **طريقة 1:** استعمال مبرهنة غوص (في غالب الأحيان: نبدأ بتعيين حل خاص).

– **طريقة 2:** استعمال طريقة الموافقة (نختار بترديد $|a'|$ أو بترديد $|b'|$).

تمرين محلول 1: (Bac 2008 Liban)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث:

(E) .... $11x-5y=14$

حل المعادلة (E).

الحل:

طريقة أولى:

✦ تعيين حل خاص للمعادلة (E):

الثنائية $(x_1;y_1)=(4;6)$ حل خاص للمعادلة (E)

✦ حل المعادلة (E):

لدينا: $\begin{cases}11x-5y=14\\11x_1-5y_1=14\end{cases}$ ومنه: $11(x-x_1)-5(y-y_1)=0$

وبالتالي: $11(x-x_1)=5(y-y_1)$

من المساواة $11(x-x_1)=5(y-y_1)$ نستنتج أن 5 يقسم الجداء $11(x-x_1)$

وبما أن 5 و 11 أوليان فيما بينهما وحسب مبرهنة غوص فإن 5 يقسم $x-x_1$

ومنه: $x-x_1=5k$ وبالتالي: $x=5k+4$ وبالتعويض في المعادلة (E)

نجد: $y=11k+6$

إذن: حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث: $(k\in\mathbb{Z})$ $\begin{cases}x=5k+4\\y=11k+6\end{cases}$

طريقة ثانية:

تكتب المعادلة (E) باستعمال الموافقة بترديد 5 كما يلي: $11x\equiv14[5]$

ومنه: $x\equiv4[5]$ وبالتالي: $x=5k+4$ وبالتعويض في المعادلة (E)

نجد: $y=11k+6$

إذن: حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث: $(k\in\mathbb{Z})$ $\begin{cases}x=5k+4\\y=11k+6\end{cases}$

طريقة ثالثة:

تكتب المعادلة (E) باستعمال الموافقة بترديد 11 كما يلي: $-5y\equiv14[11]$

وبما أن: $-5\equiv6[11]$ و $14\equiv3[11]$ نستنتج أن $6y\equiv3[11]$

ومنه: $2\times6y\equiv2\times3[11]$ وبالتالي: $y\equiv6[11]$ ينتج: $y=11k+6$

وبالتعويض في المعادلة (E) نجد: $x=5k+4$

إذن: حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث: $(k\in\mathbb{Z})$ $\begin{cases}x=5k+4\\y=11k+6\end{cases}$

طريقة رابعة:

نعتبر المعادلة $(E'): 11x-5y=1$

✦ تعيين حل خاص للمعادلة (E') :

الثنائية $(x_0\,;y_0)=(1\,;2)$ حل خاص للمعادلة (E')

ومنه : $11x_0-5y_0=1$

✦ استنتاج حل خاص للمعادلة (E) :

لدينا : $11x_0-5y_0=1$ وبضرب طرفي هذه المعادلة بالعدد **14** نحصل على :

$11(14x_0)-5(14y_0)=14$ نستنتج أن الثنائية $(14x_0\,;14y_0)=(x_1\,;y_1)$

أي : $(x_1\,;y_1)=(14\,;28)$ حل خاص للمعادلة (E).

✦ حل المعادلة (E) :

لدينا : $\begin{cases}11x-5y=14\\11x_1-5y_1=14\end{cases}$ ومنه : $11(x-x_1)-5(y-y_1)=0$

وبالتالي : $11(x-x_1)=5(y-y_1)$

من المساواة $11(x-x_1)=5(y-y_1)$ نستنتج أن **5** يقسم الجداء $11(x-x_1)$

وبما أن **5** و **11** أوليان فيما بينهما وحسب مبرهنة غوص فإن **5** يقسم $x-x_1$

ومنه : $x-x_1=5k'$ وبالتالي : $x=5k'+14$ وبالتعويض في المعادلة (E)

نجد : $y=11k'+28$

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x\,;y)$ حيث : $(k'\in\mathbb{Z})$ $\begin{cases}x=5k'+14\\y=11k'+28\end{cases}$

ملاحظة:

يمكن الحصول على نفس الجملة $\begin{cases}x=5k+4\\y=11k+6\end{cases}$ وذلك بوضع $k'=k-2$

تمرين محلول 2:

1 نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $11x-5y=2$

أ- أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x\,;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y\equiv 4\,[11]$.

ب- استنتج حلول المعادلة (E).

2 ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم . نضع : $a=5n+2$ وَ $b=11n+4$.

أ- عيّن القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a وb.

ب- عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $PGCD\,(a\,;b)=2$.

جـ- استنتج قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العددان a وb أوليين فيما بينهما .

الحل :

1 أ- إثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x\,;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $y\equiv 4\,[11]$:

نكتب المعادلة (E) باستعمال الموافقة بترديد **11** كما يلي : $-5y\equiv 2\,[11]$

وحيث أن : $-5\equiv 6\,[11]$ نستنتج أن : $6y\equiv 2\,[11]$

ومنه : $2\times 6y\equiv 2\times 2\,[11]$ وبالتالي : $y\equiv 4\,[11]$

ب- استنتاج حلول المعادلة (E) :

من السؤال السابق وجدنا أن : $y\equiv 4\,[11]$ ومنه : $y=11k+4$

وبالتعويض في المعادلة (E) نجد : $x=5k+2$

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x\,;y)$ حيث : $(k\in\mathbb{Z})$ $\begin{cases}x=5k+2\\y=11k+4\end{cases}$

2 أ- تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a وb:

لاحظ أن الثنائية $(a\,;b)$ حل للمعادلة (E).

نفرض أن : $PGCD\,(a\,;b)=d$ ومنه : d يقسم a وَ d يقسم b وبالتالي :

d يقسم $11a-5b$، وبما أن $11a-5b=2$ نستنتج أن d يقسم **2** .

إذن : $d\in\{1\,;2\}$

ب- تعيين قيم n بحيث يكون $PGCD\,(a\,;b)=2$:

من العلاقة : $PGCD\,(a\,;b)=2$ نستنتج أن : **2** يقسم a وَ **2** يقسم b وبالتالي :

2 يقسم $b-2a$ أي: 2 يقسم $(11n+4)-2(5n+2)$ بمعنى: 2 يقسم n

ومنه: $n=2\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$ (أي: n عدد طبيعي زوجي غير معدوم).

إذن: قيم n بحيث يكون $PGCD(a;b)=2$ هي $n=2\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$.

جـ- استنتاج قيم n بحيث يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما:

نعلم قيم n بحيث يكون $PGCD(a;b)=2$ هي $n=2\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$

نستنتج أن قيم n بحيث يكون $PGCD(a;b)=1$ هي $n\in\mathbb{N}-\{2\alpha\}$

بمعنى: $n=2\alpha+1$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$ (أي: n عدد طبيعي فردي).

تمارين محلولة

تمرين محلول 1:

برهن أن مجموع ثلاثة أعداد صحيحة متتابعة يقبل القسمة على 3.

الحل:

ثلاثة أعداد صحيحة متتابعة يمكن أن تكتب على الشكل: $n-1$ ، n ، $n+1$

ولدينا: $(n-1)+n+(n+1)=3n$ و $3n$ يقبل القسمة على 3.

إذن: مجموع ثلاثة أعداد صحيحة متتابعة يقبل القسمة على 3.

تمرين محلول 2:

❶ عيّن، في المجموعة $\mathbb{Z}$، قواسم العدد 56.

❷ عيّن الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق: $(2x+1)y=56$

الحل:

❶ قواسم 56: $\{-56;-28;-14;-8;-7;-4;-2;-1;1;2;4;7;8;14;28;56\}$

❷ تعيين الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق $(2x+1)y=56$:

من المساواة $(2x+1)y=56$ نستنتج أن $(2x+1)$ و y يقسمان 56.

$(2x+1)$ عدد فردي وبالتالي فإن الحالات الممكنة هي:

$$\begin{cases}2x+1=-1\\ y=-56\end{cases} \text{ أو } \begin{cases}2x+1=-7\\ y=-8\end{cases} \text{ أو } \begin{cases}2x+1=1\\ y=56\end{cases} \text{ أو } \begin{cases}2x+1=7\\ y=8\end{cases}$$

إذن: $(x;y)\in\{(-1;-56),(-4;-8),(0;56),(3;8)\}$

تمرين محلول 3:

اكتب القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b في كل حالة من الحالات الآتية:

① $a=-271$ ، $b=19$

② $a=332$ ، $b=-27$

③ $a=-116$ ، $b=-9$

④ $a=-12$ ، $b=15$

الحل :

تذكير : إذا كان a و b عددين صحيحين حيث $a\neq 0$، فإنه توجد ثنائية وحيدة $(q\,;r)$ مع $q\in\mathbb{Z}$ و $r\in\mathbb{N}$ بحيث : $a=qb+r$ و $0\leq r<|b|$.

① $-271=-15\times 19+14$

② $332=-12\times(-27)+8$

③ $-116=13\times(-9)+1$

④ $-12=-1\times 15+3$

تمرين محلول 4:

في القسمة الإقليدية لعدد طبيعي n على 69 ، الباقي هو 35 . في قسمته على 75 حاصل القسمة هو نفسه والباقي هو 17 . ما هو العدد n ؟

الحل :

لنبحث عن حاصل القسمة q :

لدينا : $n=69q+35=75q+17$ ومنه : $q=3$

وبالتالي : $n=69\times 3+35=242$

إذن : العدد المطلوب هو $n=242$

تمرين محلول 5:

عيّن مجموعة القواسم المشتركة للعددين الطبيعيين 110 و 270 .

الحل :

تذكير : مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم القاسم المشترك الأكبر لهما .

لدينا : $PGCD(110\,;270)=10\times PGCD(11\,;27)=10\times 1=10$

قواسم العدد 10 هي : $\{1;2;5;10\}$

إذن : مجموعة القواسم المشتركة للعددين 110 و 270 هي $\{1;2;5;10\}$

تمرين محلول 6:

عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين 2010 و 1431 .

الحل :

الطريقة الأولى : استعمال الخاصة $PGCD(ka\,;kb)=k\times PGCD(a\,;b)$

يمكن الملاحظة أن $2010=3\times 670$ و $1431=3\times 477$

ومنه : $PGCD(2010\,;1431)=3\times PGCD(670\,;477)$

لكن العددين 670 و 477 أوليان فيما بينهما وبالتالي : $PGCD(670\,;477)=1$

إذن : $PGCD(2010\,;1431)=3\times PGCD(670\,;477)=3\times 1=3$

الطريقة الثانية : استعمال خوارزمية إقليدس

الحاصل		1	2	2	8	3	1	2
المقسوم والقاسم	2010	1431	579	273	33	9	6	3
الباقي		579	273	33	9	6	3	

إذن : $PGCD(2010\,;1431)=3$

تمرين محلول 7:

عيّن كل الثنائيات $(a\,;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة التي تحقق :

$$\begin{cases} a+b=54 \\ PGCD(a\,;b)=9 \end{cases}$$

الحل :

تذكير : a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

إذا كان $PGCD\,(a\,;b)=d$ فإنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما

بينهما بحيث: $a=d\times a'$ و $b=d\times b'$.

من المساواة $PGCD\,(a\,;b)=9$ نستنتج أنه يوجد عددان طبيعيان a' و b'

أوليان فيما بينهما حيث: $a=9a'$ و $b=9b'$

تصبح المساواة $a+b=54$ كما يلي: $9a'+9b'=54$ ومنه: $a'+b'=6$

وبالتالي: $(a'\,;b')\in\{(1\,;5),(5\,;1)\}$ نستنتج أن: $(a\,;b)\in\{(9;45),(45\,;9)\}$

إذن: الثنائيات $(a\,;b)$ المطلوبة هي: $\{(9;45),(45\,;9)\}$

تمرين محلول 8:

عيّن كل الثنائيات $(a\,;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة التي تحقق:

$$\begin{cases} ab=360 \\ PGCD\,(a\,;b)=6 \end{cases}$$

الحل:

تذكير: a و b عددان طبيعيان غير معدومين.

إذا كان $PGCD\,(a\,;b)=d$ فإنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما

بينهما بحيث: $a=d\times a'$ و $b=d\times b'$.

من المساواة $PGCD\,(a\,;b)=6$ نستنتج أنه يوجد عددان طبيعيان a' و b'

أوليان فيما بينهما حيث: $a=6a'$ و $b=6b'$

تصبح المساواة $ab=360$ كما يلي: $6a'\times 6b'=360$ ومنه: $a'\times b'=10$

وبالتالي: $(a'\,;b')\in\{(1;10),(2\,;5),(10;1),(5\,;2)\}$

نستنتج أن: $(a\,;b)\in\{(6\,;60),(12;30),(60\,;6),(30;12)\}$

إذن: الثنائيات $(a\,;b)$ المطلوبة هي: $\{(6\,;60),(12;30),(60\,;6),(30;12)\}$

تمرين محلول 9:

عيّن كل الثنائيات $(a\,;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة التي تحقق:

$$\begin{cases} a^2-b^2=5440 \\ PGCD\,(a\,;b)=8 \end{cases}$$

الحل:

تذكير: a و b عددان طبيعيان غير معدومين.

إذا كان $PGCD\,(a\,;b)=d$ فإنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما

بينهما بحيث: $a=d\times a'$ و $b=d\times b'$.

من المساواة $PGCD\,(a\,;b)=8$ نستنتج أنه يوجد عددان طبيعيان a' و b'

أوليان فيما بينهما حيث: $a=8a'$ و $b=8b'$

تصبح المساواة $a^2-b^2=5440$ كما يلي: $(8a')^2-(8b')^2=5440$

وبالقسمة على 64 نحصل على: $(a')^2-(b')^2=85$

ومنه: $(a'-b')(a'+b')=85$

توجد حالتان ممكنتان فقط هما: $\begin{cases} a'+b'=85 \\ a'-b'=1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a'+b'=17 \\ a'-b'=5 \end{cases}$

وبالتالي: $(a'\,;b')\in\{(43\,;42),(11;6)\}$

نستنتج أن: $(a\,;b)\in\{(344\,;336),(88;48)\}$

إذن: الثنائيات $(a\,;b)$ المطلوبة هي: $\{(344\,;336),(88;48)\}$

تمرين محلول 10:

n عدد طبيعي غير معدوم. ليكن العدد $A=\dfrac{5n-3}{n+1}$.

1 أ- احسب $5(n+1)-(5n-3)$.

ب- ما هي قيم n التي من أجلها يكون A عددا صحيحا.

❷ أ- لماذا $PGCD\,(5n-3\,;n+1)$ قاسم للعدد 8؟

ب- ما هي قيم n التي تحقق $PGCD\,(5n-3\,;n+1)=8$ ؟

الحل:

❶ أ- حساب $5(n+1)-(5n-3)$: $5(n+1)-(5n-3)=8$

ب- قيم n التي من أجلها يكون A عددا صحيحا:

[A عدد صحيح] يكافئ [$(n+1)$ يقسم $(5n-3)$]

ومنه: $(n+1)$ يقسم $5(n+1)-(5n-3)$ أي: $(n+1)$ يقسم 8

وبالتالي: $n+1\in\{1;2;4;8\}$

إذن: قيم n التي من أجلها يكون A عددا صحيحا هي: $\{1;3;7\}$

❷ أ- $PGCD\,(5n-3\,;n+1)$ قاسم للعدد 8:

نفرض أن: $PGCD\,(5n-3\,;n+1)=d$ ومنه: $d\,|\,(5n-3)$ و $d\,|\,(n+1)$

وبالتالي: $d\,|\,[5(n+1)-(5n-3)]$ أي: $d\,|\,8$

إذن: $PGCD\,(5n-3\,;n+1)$ قاسم للعدد 8.

ب- قيم n التي تحقق $PGCD\,(5n-3\,;n+1)=8$:

لدينا: $PGCD\,(5n-3\,;n+1)=8$ ومنه: $8\,|\,(5n-3)$ و $8\,|\,(n+1)$

وبالتالي: $8\,|\,(5n-3)$ و $8\,|\,4(n+1)$ نستنتج أن: $8\,|\,[(5n-3)-4(n+1)]$

أي: $8\,|\,(n-7)$ ومنه: $n-7=8k$

إذن: قيم n بحيث $PGCD\,(5n-3\,;n+1)=8$ هي $n=8k+7$ مع $k\in\mathbb{N}$

تمرين محلول 11:

n و m عددان طبيعيان غير معدومين.

عيّن $PGCD\,(mn\,,n(2m+1))$

الحل:

تعيين $PGCD\,(mn\,,n(2m+1))$:

$$PGCD\,(mn\,,n(2m+1))=n\times PGCD\,(m\,,(2m+1))$$

إذا كان d قاسما لـ m و $2m+1$ في أن واحد فإن d يقسم $(2m+1)-2\times m$

أي: d يقسم 1 ومنه: $d=1$ نستنتج أن $PGCD\,(m\,,(2m+1))=1$

إذن: $PGCD\,(mn\,,n(2m+1))=n\times 1=n$

تمرين محلول 12:

عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n، $PGCD\,(n^2+5n+7\,;n+1)$

الحل:

لدينا: $n^2+5n+7=n^2+n+4n+7=(n+1)(n+4)+3$

أولا: نفرض أن $n>2$ ومنه: $0\le 3<n+1$

في هذه الحالة: المساواة $n^2+5n+7=(n+1)(n+4)+3$ تمثل القسمة الإقليدية لـ n^2+5n+7 على $n+1$

نستنتج أن $PGCD\,(n^2+5n+7\,;n+1)=PGCD\,(n+1\,;3)$

مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 3 هي: $\{1;3\}$

- إذا كان $n+1$ يقبل القسمة على 3 فإن $PGCD\,(n+1\,;3)=3$

وبالتالي: $PGCD\,(n^2+5n+7\,;n+1)=3$

- إذا كان $n+1$ لا يقبل القسمة على 3 فإن $PGCD\,(n+1\,;3)=1$

وبالتالي: $PGCD\,(n^2+5n+7\,;n+1)=1$

ثانيا: دراسة الحالات: $n=0$، $n=1$ و $n=2$:

إذا كان $n=0$ فإن $PGCD\,(n^2+5n+7\,;n+1)=PGCD\,(7\,;1)=1$

إذا كان $n=1$ فإن $PGCD(n^2+5n+7;n+1)=PGCD(13;2)=1$

إذا كان $n=2$ فإن $PGCD(n^2+5n+7;n+1)=PGCD(21;3)=3$

خلاصة:

- إذا كان $n+1$ يقبل القسمة على 3 أي: $n=3k+2$ مع $k\in\mathbb{N}$
  فإن $PGCD(n^2+5n+7;n+1)=3$
- إذا كان $n+1$ لا يقبل القسمة على 3 أي: $n=3k$ أو $n=3k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$
  فإن $PGCD(n^2+5n+7;n+1)=1$

تمرين محلول 13:

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، نعتبر D المستقيم الذي معادلته $3x+4y-1=0$.

1 عيّن مجموعة نقط D التي إحداثياتها أعداد صحيحة .

2 عيّن مجموعة النقط M من D التي إحداثياتها أعداد صحيحة بحيث يكون مربع المسافة بين M و O مضاعفا للعدد 13 .

الحل:

1 تعيين مجموعة نقط D التي إحداثياتها أعداد صحيحة:

تعيين مجموعة نقط D التي إحداثياتها أعداد صحيحة يؤول إلى حل المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y: $3x+4y=1$

تكتب المعادلة (E) باستعمال الموافقة بترديد 3 كما يلي: $4y\equiv1[3]$ أي: $y\equiv1[3]$

ومنه: $y=3k+1$ وبالتعويض في المعادلة (E) نجد: $x=-4k-1$

إذن: حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث: $(k\in\mathbb{Z})$ $\begin{cases}x=-4k-1\\y=3k+1\end{cases}$

2 تعيين مجموعة النقط M من D التي إحداثياتها أعداد صحيحة بحيث يكون مربع المسافة بين M و O مضاعفا للعدد 13:

لدينا: $OM^2\equiv0[13]$ ومنه: $x^2+y^2\equiv0[13]$

وبالتالي: $(-4k-1)^2+(3k+1)^2\equiv0[13]$

أخيرا: $25k^2+14k+2\equiv0[13]$ ومنه $-k^2+k+2\equiv0[13]$

نستنتج أن: $k\equiv2[13]$ أو $k\equiv-1[13]$ أي: $k=13\alpha+2$ أو $k=13\alpha-1$

ومنه: $(\alpha\in\mathbb{Z})$ $\begin{cases}x=-4(13\alpha+2)-1\\y=3(13\alpha+2)+1\end{cases}$ أو $(\alpha\in\mathbb{Z})$ $\begin{cases}x=-4(13\alpha-1)-1\\y=3(13\alpha-1)+1\end{cases}$

إذن: نقط D التي إحداثياتها أعداد صحيحة بحيث يكون مربع المسافة بين M و O مضاعفا للعدد 13 هي النقط التي إحداثياتها $(x;y)$ حيث:

$(x;y)\in\{(-52\alpha-9;39\alpha+7),(-52\alpha+3;39\alpha-2)\}$ مع $\alpha\in\mathbb{Z}$

تمرين محلول 14:

في المستوي المنسوب إلى معلم، نعتبر C_f منحني الدالة f المعرفة على المجموعة $D=[-3;1[\cup]1;3]$ بـ: $f(x)=\frac{2x^2-3x-3}{x-1}$

1 عيّن العدد الحقيقي a بحيث يكون:

من أجل كل x من D، $f(x)=2x-1+\frac{a}{x-1}$

2 عيّن نقط المنحني C_f التي إحداثياتها أعداد صحيحة .

الحل:

1 تعيين العدد الحقيقي a:

من أجل كل x من D ، $f(x)=\frac{2x^2-3x-3}{x-1}$

من جهة أخرى : $f(x)=2x-1+\frac{a}{x-1}=\frac{(2x-1)(x-1)+a}{x-1}=\frac{2x^2-3x+1+a}{x-1}$

وبالمطابقة نستنتج أن: $a=-4$ وبالتالي: $f(x)=2x-1-\frac{4}{x-1}$

② تعيين نقط المنحني C_f التي إحداثياتها أعداد صحيحة :

C_f هو مجموعة النقط $M(x\,;y)$ من المستوي حيث $x\in D$ و $y=f(x)$

يكون x و y عددين صحيحين إذا وفقط إذا كان $x\in D$ و $x-1$ يقسم 4

$x-1$ يقسم 4 معناه : $(x-1)\in\{-4\,;-2\,;-1;1;2\,;4\}$

ومنه : $x\in\{-3\,;-1\,;0\,;2\,;3\,;5\}$

إذن : نقط المنحني C_f التي إحداثياتها أعداد صحيحة هي النقط التي إحداثياتها :

$(-3\,;-6)$ ،$(-1\,;-1)$ ،$(0\,;3)$ ،$(2\,;-1)$ ،$(3\,;3)$ ،$(5\,;8)$.

تمرين محلول 15: (استعمال Excel في تعيين باقي القسمة)

لتكن الأعداد $a=2n^2+12n+22$ ، $b=n+2$ و $c=2n+5$ مع $n\in\mathbb{N}$

نريد تعيين باقي قسمة a على b وباقي قسمة a على c.

① أنجز ورقة حساب.

في الخلية $B2$ أحجز : $=2*A2\verb|^|2+12*A2+22$

في الخلية $C2$ أحجز : $=A2+2$

في الخلية $D2$ أحجز : $=MOD(B2\,;C2)$

في الخلية $E2$ أحجز : $=2*A2+5$

في الخلية $F2$ أحجز : $=MOD(B2\,;E2)$

حدّد الخلايا $B2:F2$ واسحبها نحو الأسفل.

② ضع تخمينا حول باقي قسمة a على b وباقي قسمة a على c.

الحل:

① إنجاز ورقة حساب باستعمال مجدول Excel :

	A	B	C	D	E	F
1	n	a	b	باقي قسمة a على b	c	باقي قسمة a على c
2	0	22	2	0	5	2
3	1	36	3	0	7	1
4	2	54	4	2	9	0
5	3	76	5	1	11	10
6	4	102	6	0	13	11
7	5	132	7	6	15	12
8	6	166	8	6	17	13
9	7	204	9	6	19	14
10	8	246	10	6	21	15
11	9	292	11	6	23	16
12	10	342	12	6	25	17
13	11	396	13	6	27	18
14	12	454	14	6	29	19
15	13	516	15	6	31	20
16	14	582	16	6	33	21
17	15	652	17	6	35	22
18	16	726	18	6	37	23
19	17	804	19	6	39	24
20	18	886	20	6	41	25

② وضع تخمين حول باقي قسمة a على b وباقي قسمة a على c:

إذا كان $n\geq 5$ فإن باقي قسمة a على b هو 6 .

إذا كان $n\geq 5$ فإن باقي قسمة a على c هو $n+7$.

تمرين محلول 16:

أثبت أن العدد $1^{2009}+2^{2009}+3^{2009}+4^{2009}$ يقبل القسمة على 5 .

الحل:

لدينا : $1^{2009}\equiv 1\,[5]$

ولدينا : $3\equiv -2\,[5]$ ومنه : $3^{2009}\equiv(-2)^{2009}\equiv -2^{2009}\,[5]$

ولدينا : $4\equiv -1\,[5]$ ومنه : $4^{2009}\equiv(-1)^{2009}\equiv -1\,[5]$

وبالتالي : $1^{2009}+2^{2009}+3^{2009}+4^{2009}\equiv 1+2^{2009}-2^{2009}-1\equiv 0\,[5]$

إذن : العدد $1^{2009}+2^{2009}+3^{2009}+4^{2009}$ يقبل القسمة على 5 .

تمرين محلول 17:

أثبت ، أنه من أجل كل عدد طبيعي n، المقدار $3^{2n}-2^n$ يقبل القسمة على 7 .

الحل :

لدينا: $3^{2n}-2^n=(3^2)^n-2^n=9^n-2^n$. لكن: $9\equiv 2[7]$ ومنه: $9^n\equiv 2^n[7]$

وبالتالي: $3^{2n}-2^n=9^n-2^n\equiv 2^n-2^n[7]$ ومنه: $3^{2n}-2^n\equiv 0[7]$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n، المقدار $3^{2n}-2^n$ يقبل القسمة على 7 .

تمرين محلول 18:

أثبت ، أنه من أجل كل عدد طبيعي n، المقدار $16\times 7^{2n}-28\times 3^{2n+3}$ يقبل القسمة على 5 .

الحل:

لدينا: $16\equiv 1[5]$ ، $28\equiv 3[5]$ و $49\equiv -1[5]$ و $3^4\equiv 1[5]$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $16\times 7^{2n}=16\times (7^2)^n\equiv(-1)^n[5]$

$28\times 3^{2n+3}=28\times 3^3\times 3^{2n}=28\times 3^3\times(3^2)^n\equiv 3^4\times(3^2)^n\equiv(-1)^n[5]$

ومنه: $16\times 7^{2n}-28\times 3^{2n+3}\equiv(-1)^n-(-1)^n[5]$

وبالتالي: $16\times 7^{2n}-28\times 3^{2n+3}\equiv 0[5]$

إذن: من أجل كل عدد طبيعي n، المقدار $16\times 7^{2n}-28\times 3^{2n+3}$ يقبل القسمة على 5 .

تمرين محلول 19:

1 ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7 .

– استنتج باقي قسمة العدد 3^{2009} على 7 .

2 λ عدد طبيعي يكتب $1x30$ في النظام العشري ، عين العدد الطبيعي x بحيث يكون: $3^{2009}+\lambda\equiv 0[7]$.

الحل:

1 دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7:

$3^0\equiv 1[7]$ ، $3^1\equiv 3[7]$ ، $3^2\equiv 2[7]$ ، $3^3\equiv 6[7]$ ، $3^4\equiv 4[7]$ ،

$3^5\equiv 5[7]$ ، $3^6\equiv 1[7]$.

من العلاقة: $3^6\equiv 1[7]$ نستنتج أن : $(3^6)^k\equiv 1^k[7]$ أي: $3^{6k}\equiv 1[5]$ مع $k\in\mathbb{N}$

$3^{6k+1}\equiv 3[7]$ ، $3^{6k+2}\equiv 2[7]$ ، $3^{6k+3}\equiv 6[7]$ ، $3^{6k+4}\equiv 4[7]$ ، $3^{6k+5}\equiv 5[7]$

نلخص بواقي قسمة 3^n على 7 في الجدول الآتي:

في هذا الجدول يدلّ k على عدد طبيعي .

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
البواقي	1	3	2	6	4	5

ملاحظة:

في هذه الحالة نقول إن بواقي قسمة 3^n على 7 دورية ودورها 6 .

+ استنتاج باقي قسمة العدد 3^{2009} على 7 :

لدينا: $2009=6\times 334+5$ وبالتالي فإن العدد **2009** من الشكل $6k+5$

نستنتج أن باقي قسمة العدد 3^{2009} على 7 هو 5 .

2 تعيين الأعداد الطبيعية x:

من الكتابة $\lambda=1x30$ نستنتج أن $0\le x\le 9$

لدينا: $\lambda=1x30=0+3\times 10+x\times 10^2+1\times 10^3$

ومنه: $\lambda\equiv 0+3\times 3+x\times 2+1\times 6[7]$ أي: $\lambda\equiv 2x+1[7]$

$3^{2009}+\lambda\equiv 0[7]$ يكافئ $2x+6\equiv 0[7]$ ومنه: $2x\equiv 1[7]$

وبالتالي: $x\equiv 4[7]$ نستنتج أن: $x=7k+4$ مع $k\in\mathbb{N}$

لكن: $0\le x\le 9$، نستنتج أن: $x=4$

إذن: $x=4$ ويكون عندئذ $\lambda=1430$.

تمرين محلول 20:

N عدد طبيعي يكتب $\overline{bbac}$ في النظام ذي الأساس 7 و $\overline{abca}$ في النظام ذي الأساس **11**.

أوجد الأعداد الطبيعية غير المعدومة a، b و c ثم اكتب N في النظام العشري.

الحل:

الشروط: $1\le a\le 6$، $1\le b\le 6$ و $1\le c\le 6$.

لدينا: $\overline{bbac}=\overline{abca}$

ومنه: $c+a\times7+b\times7^2+b\times7^3=a+c\times11+b\times11^2+a\times11^3$

وبالتالي: $c+7a+49b+343b=a+11c+121b+1331a$

وبعد التبسيط نجد: $1325a+10c=271b$

ومنه: $5(265a+2c)=271b$ ... **(1)**

نستنتج أن: **5** يقسم $271b$، وبما أن العددين **5** و **271** أوليان فيما بينهما وحسب مبرهنة غوص فإن **5** يقسم b واعتمادا على الشرط $1\le b\le 6$ نستنتج أن: $b=5$

تصبح المساواة (**1**) كما يلي: $265a+2c=271$ أي: $2c=271-265a$

من المعطيات: $c>0$ ومنه: $2c>0$ نستنتج أن: $271-265a>0$

وبالتالي: $a<\frac{271}{265}$ وبما أن a عدد طبيعي غير معدوم فإن: $a=1$

تصبح المساواة $265a+2c=271$ كما يلي: $265+2c=271$ ومنه: $c=3$

إذن: $a=1$ ، $b=5$ و $c=3$

كتابة N في النظام العشري:

$$N=\overline{bbac}=\overline{5513}=3+1\times7+5\times7^2+1\times7^3=1970$$

تمرين محلول 21:

1 نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث:

$$(E)\ ....\quad 56x-81y=6$$

أ- تحقق أن $(3;2)$ حل للمعادلة (E).

ب- حل المعادلة (E).

2 أ- N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha67\alpha}$ في النظام ذي الأساس **8** ويكتب $\overline{\beta6\alpha8}$ في النظام ذي الأساس **9**.

ب- عيّن العددين الطبيعيين α و β ثم اكتب N في النظام العشري.

الحل:

1 أ- التحقق أن $(3;2)$ حل للمعادلة (E):

لدينا: $56\times3-81\times2=168-162=6$

ومنه: $(x_0;y_0)=(3;2)$ حل للمعادلة (E).

ب- حل المعادلة (E):

لدينا: $\begin{cases}56x-81y=6\\56\times3-81\times2=6\end{cases}$ بالطرح نجد: $56(x-3)-81(y-2)=0$

ومنه: $56(x-3)=81(y-2)$ ...(*)

من المعادلة (*) نستنتج أن **81** يقسم $56(x-3)$ وبما أن العددين **81** و **56** أوليان فيما بينهما وحسب مبرهنة غوص فإن **81** يقسم $x-3$ وبالتالي: $x=3+81k$

وبالتعويض في المعادلة (*) ينتج: $y=2+56k$

إذن: مجموعة حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث:

$$\begin{cases}x=3+81k\\y=2+56k\end{cases}\ (k\in\mathbb{Z})$$

② تعيين العددين α و β :

الشروط: $0\le\alpha\le7$ و $0\le\beta\le7$

لدينا: $N=\overline{\alpha67\alpha}=\alpha+7\times8+6\times8^2+\alpha\times8^3=513\alpha+440$

ولدينا: $N=\overline{\beta6\alpha8}=8+\alpha\times9+6\times9^2+\beta\times9^3=729\beta+9\alpha+494$

ومنه: $513\alpha+440=729\beta+9\alpha+494$ أي: $504\alpha-729\beta=54$

وبقسمة الطرفين على **9** نحصل على المعادلة: $56\alpha-81\beta=6$

واعتمادا على السؤال الأول نستنتج أن: $(k\in\mathbb{N})$ $\begin{cases}\alpha=x=3+81k\\ \beta=y=2+56k\end{cases}$

لكن: $0\le\alpha\le7$ و $0\le\beta\le7$ نستنتج أن: $\alpha=3$ و $\beta=2$

✦ كتابة N في النظام العشري:

$N=\overline{3673}=513\times3+440=1979$

تمرين محلول 22:

① ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على **10**.

- استنتج رقم آحاد العدد 2008^{1429}.

② عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون:

$1429^{4n+1}+2008^{4n+3}+3n\equiv0[10]$

③ A و B عددان طبيعيان يكتبان في نظام تعداد أساسه x كما يلي: $A=\overline{101}$ و $B=\overline{102}$

- عيّن العدد الطبيعي x إذا علمت أن الجداء $A\times B$ يكتب في النظام ذي الأساس **8** على الشكل $\overline{1276}$.

الحل:

① دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على **10**:

$8^0\equiv1[10]$ ، $8^1\equiv8[10]$ ، $8^2\equiv4[10]$ ، $8^3\equiv2[10]$ ، $8^4\equiv6[10]$ ،

$8^5\equiv8[10]$. نستنتج أنه إذا كان n عددا طبيعيا غير معدوم فإن بواقي قسمة 8^n على **10** دورية ودورها $4=(5-1)$.

خلاصة:

✦ إذا كان $n=0$ فإن باقي قسمة 8^n على **10** هو **1** .

✦ إذا كان $n\neq0$، نلخص بواقي قسمة 8^n على **10** في الجدول الآتي:

في هذا الجدول يدلّ k على عدد طبيعي.

n	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$4k+4$
البواقي	**8**	**4**	**2**	**6**

✦ استنتاج رقم آحاد العدد 2008^{1429}:

رقم آحاد العدد 2008^{1429} هو باقي قسمة 2008^{1429} على **10**.

لدينا: $2008=4\times500+8$ وبالتالي فإن $2008\equiv8[10]$

ومنه: $2008^{1429}\equiv8^{1429}[10]$

من جهة أخرى: $1429=4\times357+1$ أي أن العدد **1429** من الشكل $4k+1$

وحسب الجدول السابق لدينا $8^{4k+1}\equiv8[10]$

نستنتج أن رقم آحاد العدد 2008^{1429} هو **8**.

② تعيين قيم n حتى يكون $1429^{4n+1}+2008^{4n+3}+3n\equiv0[10]$:

لدينا: $1429^{4n+1}\equiv(-1)^{4n+1}\equiv-1[10]$ ($4n+1$ عدد فردي)

ولدينا: $2008^{4n+3}\equiv8^{4n+3}\equiv2[10]$ (حسب الدراسة السابقة)

$1429^{4n+1}+2008^{4n+3}+3n\equiv0[10]$ يكافئ $-1+2+3n\equiv0[10]$

وبالتالي: $3n\equiv9[10]$ أخيرا: $n\equiv1[10]$

إذن: قيم n المطلوبة هي $n=10\alpha+1$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$

③ تعيين العدد الطبيعي x :

الشرط : $x>2$

لدينا : $A=\overline{101}=1+0\times x+1\times x^2$ و $B=\overline{102}=2+0\times x+1\times x^2$

ومنه : $A\times B=(x^2+1)(x^2+2)=x^4+3x^2+2$

من جهة أخرى : $A\times B=\overline{1276}=6+7\times 8+2\times 8^2+1\times 8^3=702$

وبالتالي : $x^4+3x^2+2=702$ أي : $x^4+3x^2-700=0$

وبحل هذه المعادلة نجد : $x=5$

تمرين محلول 23:

① عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين **2688** و **3024** .

② نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلتين:

$$(1)\ \cdots\quad 2688x+3024y=-3360$$

$$(2)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\quad 8x+9y=-10$$

أ- أثبت أن المعادلتين (1) و (2) متكافئتان.

ب- حل المعادلة (2).

③ في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر المستويين (P) و (Q) اللذين معادلتاهما على الترتيب:

$x+2y-z=-2$ و $3x-y+5z=0$

أ- أثبت أن المستويين (P) و (Q) يتقاطعان ضمن مستقيم (D) .

ب- بيّن أن إحداثيات نقط المستقيم (D) تحقق المعادلة (2) .

جـ- استنتج مجموعة نقط المستقيم (D) التي إحداثياتها أعداد صحيحة .

بكالوريات محلولة

تمرين محلول 1:

(بكالوريا **2008** . الشعبة : رياضيات)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $3x-21y=78$

① أ- بيّن أن (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب- أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 5[7]$

- استنتج حلول المعادلة (E).

② أ- ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

ب- عيّن الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق :

$$5^x+5^y\equiv 3[7]$$

الحل :

① أ- تبيان أن (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$:

تذكير : تقبل المعادلة $ax+by=c$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$ إذا وفقط إذا كان $\text{pgcd}(|a|;|b|)$ يقسّم العدد c.

نعلم أن : $\text{pgcd}(3;21)=3$ ، وبما أن العدد 3 يقسّم العدد 78 ($78=3\times 26$)

نستنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب- إثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 5[7]$:

لدينا : $21y\equiv 0[7]$ و $78\equiv 1[7]$ وعليه نكتب المعادلة (E) كما يلي:

$3x\equiv 1[7]$ وحسب خواص الموافقة نكتب: $5\times 3x\equiv 5\times 1[7]$ أي : $15x\equiv 5[7]$

نستنتج أن : $x\equiv 5[7]$

- استنتاج حلول المعادلة (E):

من : $x\equiv 5[7]$ نستنتج أن : $x=7k+5$ وبالتعويض في المعادلة (E) نجد : $y=k-3$