دنان عمر

الحساب التكاملي

تعريف: f دالة مستمرة على المجال I من R .
a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \leq b$.
نسمي تكامل f من a إلى b العدد الحقيقي المعرف كما يلي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

حيث F دالة أصلية للدالة f على I

خواص: f و g دالتان مستمرتان على المجال I .
a، b، c ثلاث أعداد حقيقية من I.

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$
- $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

- إذا كان $a \leq b$ و $f(x) \geq 0$ ومن أجل كل x من I: $\int_a^a f(x)\,dx \geq 0$
- إذا كان $a \leq b$ و $f(x) \leq g(x)$ ومن أجل كل x من I: $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

نظرية القيمة المتوسطة

f دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ و $f([a,b]) = [m,M]$ فإن $m(b-a) \leq \int_a^a f(t)\,dt \leq M(b-a)$

نتائج : إذا كان $a \neq b$ فإن : $m \leq \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(t)\,dt \leq M$

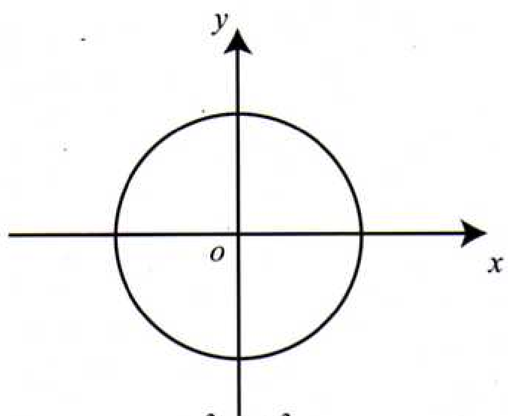
نسمي $\bar{f} = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(t)\,dt$ القيمة المتوسطة للدالة f على المجال I

التكامل بالتجزئة

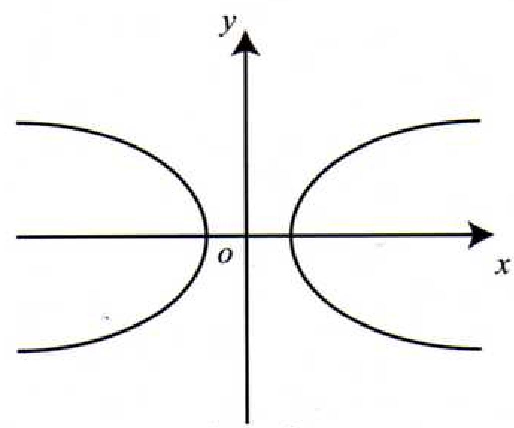
لتكن u و v دالتان قابلتان للإشتقاق على مجال I بحيث دالتهما المشتقة u' و v' مستمرتان على I وليكن a و b من I

$$\int_a^b u(x).v'(x)\,dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)\,dx$$

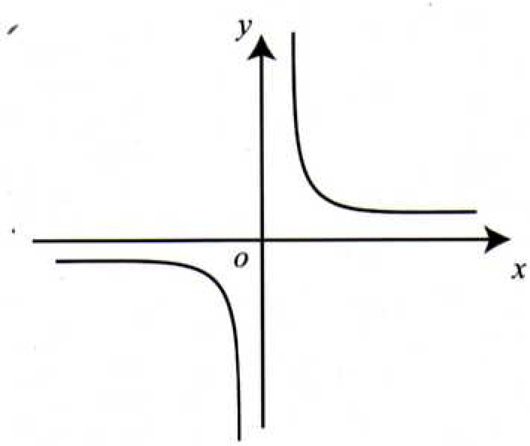
الخاصية	نقول أن	إذا كان
$P(\emptyset)=0$	A هي الحادثة المستحيلة	$A=\emptyset$
$1 \geq P(A) \geq 0$	A حادثة كيفية	A
$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$	A و B حادثين غير متلائمتين	$A \cap B=\emptyset$
$P(E)=1$	A هي الحادثة الأكيدة	$A=E$
$P(\bar{A})=1-P(A)$	A هي الحادثة العكسية	$\bar{A}$
$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$	A و B كيفيتان	B,A



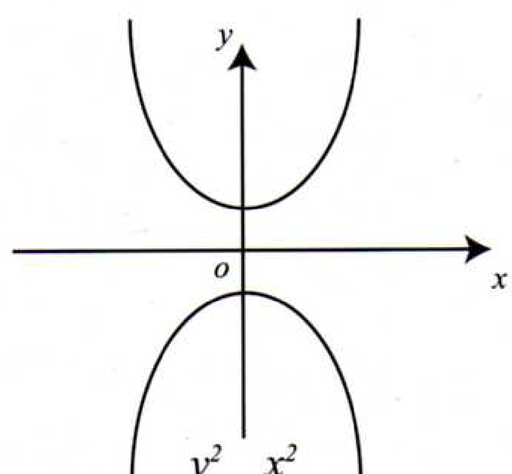
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$xy=1$$



$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

كليك للنشر
ClicÉdition

حي الكثبان، عمارة أ، مدخل 10 محل 23، المحمدية، الجزائر.
الهاتف: 021 82 00 15 / 021 82 96 37، الناسوخ: 021 82 96 37.
البريد الإلكتروني: clicedition@gmail.com

2008-066

تصميم: حمايدي حسين

الدالة الأسية ذات الأساس e

تعريف: توجد دالة وحيدة قابلة للإشتقاق على R بحيث $f'=F$ و $f(0) = 1$ ونرمز لها بالرمز exp ونسميها الدالة ذات الأساس e

نتائج:

- من أجل x من R و X من R_+^* لدينا :

$$x = \ln X \text{ معناه } e^x = X$$

$$\ln e = 1 \,,\ e^{\ln x} = x$$

- الدالة الآسية معرفة وقابلة للإشتقاق على R وتساوي دالتها المشتقة

– إذا كانت $u(x)$ قابلة للإشتقاق على D فإن الدالة $x \longrightarrow e^{u(x)}$ قابلة على D ودالتها المشتقة هي :

$$x \longrightarrow u'(x)e^{u(x)}$$

الدالة الأسية ذات الأساس a

ليكن $a \in R_+^*$ من أجل كل x من R لدينا

$$a^x = e^{x \ln(a)}$$

خواص:

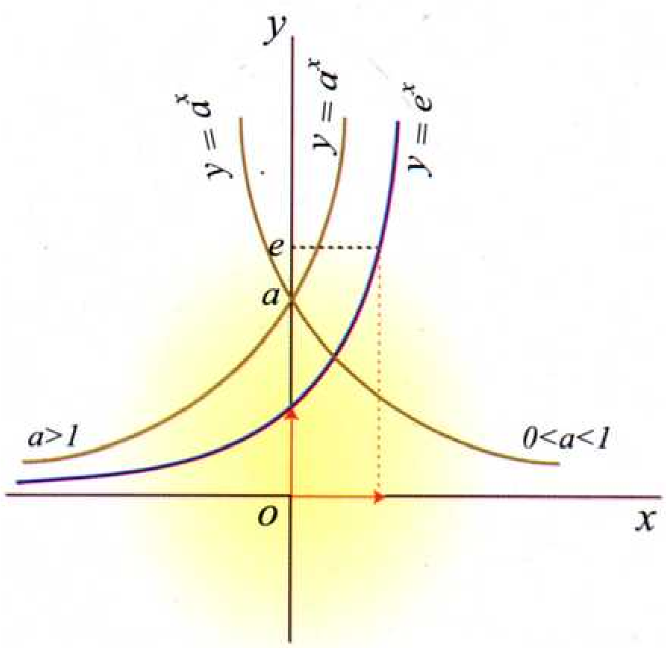
من أجل الأعداد الحقيقية x، a و b لدينا :

- $e^x > 0$ • $e^0 = 1$ • $e^1 = e$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ • $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$
- $b = a$ يكافئ $e^a = e^b$ • $e^{b-a} = \dfrac{e^b}{e^a}$
- $a < b$ يكافئ $e^a < e^b$

النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$



خواص:

من أجل العددان الحقيقيان الموجبان تماما a و b ومن أجل الحقيقيان xوy لدينا :

- $\dfrac{1}{a^y} = a^{-y}$ • $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$ • $a^x . a^y = a^{x+y}$ • $(a^x)^y = a^{xy}$ • $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $1^x = 1$ • $(a.b)^x = a^x . b^x$

الإحتمالات الشرطية

• قوام عناصر مجموعة منتهية:

E مجموعة منتهية ذات n عنصرا حيث $n \geq 1$ و P عدد طبيعي، $P \geq 1$.

■ عدد قوائم ذات P عنصرا من E هو: n^P .

• الترتيبات:

E مجموعة ذات n عنصرا و P عدد طبيعي غير معدوم حيث $P \leq n$.

عدد ترتيبات P عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا هو العدد الطبيعي A_n^P المعرف كما يلي:

$$A_n^P = n(n-1)(n-2).....(n-P+1)$$

• التبديلات:

عدد تبديلات مجموعة ذات n عنصرا هو $n!$ المعرف كما يلي:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ..... \times 2 \times 1$$

• التوفيقات:

n و P عددان طبيعيان حيث $P \leq n$

عدد توفيقات P عنصرا من مجموعة ذات n عنصر هو العدد C_n^P أو $\binom{P}{n}$ المعرف كما يلي:

$$C_n^P = \frac{n!}{P!\,(n-P)!}$$

• المثلث العددي:

n \ P	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

$C_{n-1}^{P-1} + C_{n-1}^P$

$\parallel$

C_n^P

• دستور ثنائي الحد:

a و b عددان طبيعيان و n عدد طبيعي حيث: $n > 1$

$$(a+b)^n = \sum_{P=0}^{n} C_n^P \, a^{n-p} \, . \, b^p$$

$$= a^n + C_n^a \, a^{n-1} b + ...+ C_n^P \, a^{n-p} \, b^p + ... + b^n$$

لسحب P كرة من صندوق يشمل n كرة توجد عدّة حالات

السحب	على التوالي	في آن واحد
تعاد الكرة إلى الصندوق	n^P قائمة	
لا تعاد الكرة إلى الصندوق	A_n^P ترتيبة	C_n^P توفيقة

• خواص:

n و P عددان طبيعيان حيث $P \leq n$

■ $C_n^P = C_n^{n-P}$ ■ $C_{n-1}^{P-1} + C_{n-1}^P = C_n^P$ ■ $C_n^n = 1$ ■ $A_n^P = \dfrac{n!}{(n-P)!}$

الدالة اللوغاريتمية النيبرية

- تعريف: دالة $ln(x)$ معرفة وقابلة للإشتقاق على $]0\,,+\infty[$ ومن أجل كل x من هذا المجال

$$ln(1) = 0 \qquad ln'(x) = \frac{1}{x}$$

- خواص:
من أجل العددان الحقيقيان الموجبان تماما a و b لدينا:

$$ln\frac{a}{b} = ln(a) - ln(b) \qquad ln\frac{1}{b} = -\,ln(b)$$

$$ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}ln(a)\ ,\ ln(a^n) = n.ln(a)\ \ ,\ n \in Z$$

$a = b$ يكافئ $ln(a) = ln(b)$

$a > b$ يكافئ $ln(a) > ln(b)$

$0 < a < 1$ يكافئ $ln(a) < 0$

$a > 1$ يكافئ $ln(a) > 0$

$$ln(a.b) = ln(a) + ln(b)$$

■ النهايات:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(x+1)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{ln(x)}{x} = 0$$

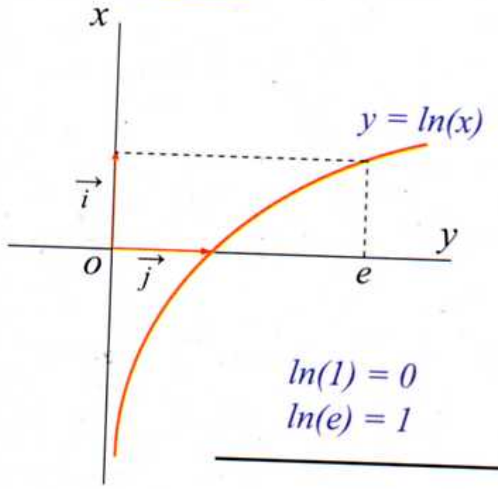
$$\lim_{x\to 0} x.ln(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} ln(x) = -\infty$$

■ المشتق

- إذا كانت $u(x)$ قابلة للإشتقاق وموجبة تماما على المجال D فإن الدالة $ln\,(u(x))$ قابلة على D ودالتها المشتقة هي:

$$(ln \circ u)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$



دالة اللوغاريتم العشري

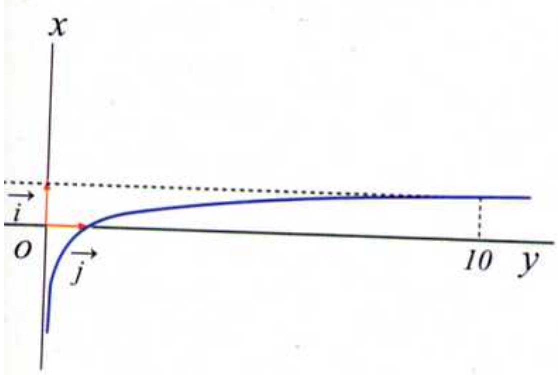
- تعريف: نسمي دالة اللوغاريتم العشري التي نرمز لها بالرمز log معرفة على $]0\,,+\infty[$ كما يلي:

$$log(x) = \frac{ln(x)}{ln\,10}$$

■ خواص:

من أجل العددان الحقيقيان الموجبان تماما a و b

- لدينا:
- $log(a.b) = log(a) + log(b)$
- $log(a^n) = n.log(a)\ \ ,\ n \in Z$
- $log\,10 = 1 \qquad log\,1 = 0$



- **نتيجة:** إذا كان x عددا حقيقيا موجبا تماما حيث:
$n \le log\,x \le n+1$ فإن $10^n \le x \le 10^{n+1}$

المعادلات التفاضلية : حلول المعادلة $y' = ay$

● **مبرهنة 1**

ليكن a عددا حقيقيا غير معدوم

الحلول على R للمعادلة التفاضلية $y' = ay$ هي الدوال f المعرفة على R كما يلي :

$$f(x) = C \,.\, e^{ax} , C \in R$$

● **مبرهنة 2**

b و a عددا حقيقيا حيث a غير معدوم

الحلول على R للمعادلة التفاضلية $y' = ay+b$ هي الدوال f المعرفة على R كما يلي :

$$f(x) = C \,.\, e^{ax} - \frac{b}{a} , C \in R$$

الحساب في معلم متعامد و متجانس

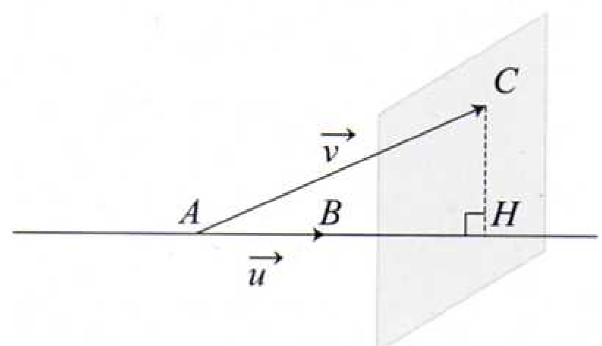
■ الجداء السلمي

ليكن الشعاعان $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ شعاعان من الفضاء حيث $(\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0})$

■ الجداء السلمي $\overrightarrow{uv}$ هو العدد الحقيقي :

$$\overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{v} = \overline{AB} \times \overline{AH}$$

حيث H هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم الموجه (AB).



إذا كان $\overrightarrow{u} \neq 0$ و $\overrightarrow{v} \neq 0$ فإن :

$$\overrightarrow{uv} = ||\overrightarrow{u}|| \,.\, ||\overrightarrow{v}|| \,.\, \cos\theta$$

θ هي قيس الزاوية $\widehat{BAC}$

خواص :

ليكن : $\overrightarrow{u}$ ، $\overrightarrow{v}$ ، $\overrightarrow{w}$ أشعة ، k عدد حقيقي.

$$\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{v}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w}$$

$$\overrightarrow{v}(k\,\overrightarrow{u}) = k(\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u})$$

بالتعريف : الشعاعان $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ متعامدان إذا كان:

$$\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = 0$$

■ $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + \overrightarrow{v}^2 + 2\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u}$

■ $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + \overrightarrow{v}^2 - 2\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u}$

■ $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$

مع $\overrightarrow{u}^2 = ||\overrightarrow{u}||^2$ و $\overrightarrow{v}^2 = ||\overrightarrow{v}||^2$

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

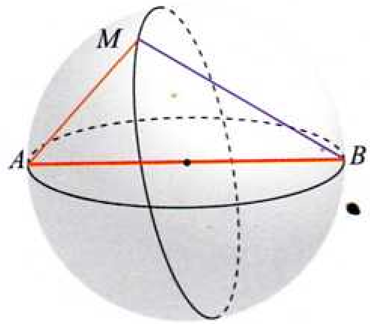
إذا كان $\overrightarrow{u}(x,y,z)$ و $\overrightarrow{v}(x',y',z')$ شعاعان من الفضاء

$$\overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$\overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \,.\, ||\overrightarrow{v}|| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

سطح كرة

سطح الكرة التي مركزها $c\,(a,b,c)$ ونصف قطرها $R > 0$ هي مجموعة النقط $M(x,y,z)$ بحيث : $CM = R$



المعادلة الديكارتية لسطح هذه الكرة هي

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

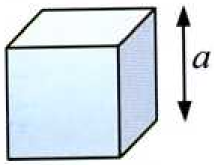
■ **معادلة كرة معرفة بقطرها AB**

A و B نقطتان من الفضاء.
مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BM}=0$
هي سطح الكرة التي قطرها AB

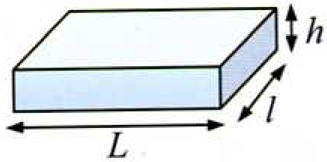
■ إذا كانت $A\,(x_0,y_0,z_0)$ و $B\,(x_1,y_1,z_1)$ نقطتين مختلفتين فإن معادلة سطح الكرة التي قطرها AB هي :

$$(x-x_0)(x-x_1)+(y-y_0)(y-y_1)+$$
$$(z-z_0)(z-z_1)=0$$

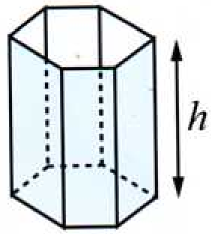
الحجوم



$V=a^3$

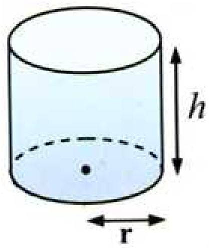


$V=L\times l\times h$

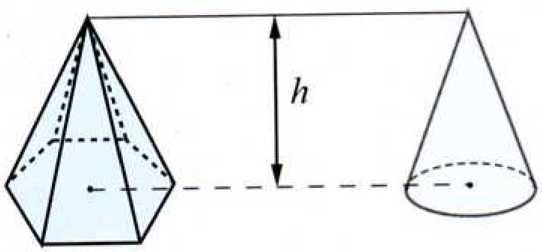


$V=B\times h$

B : مساحة القاعدة



$V=\pi\, r^2\times h$



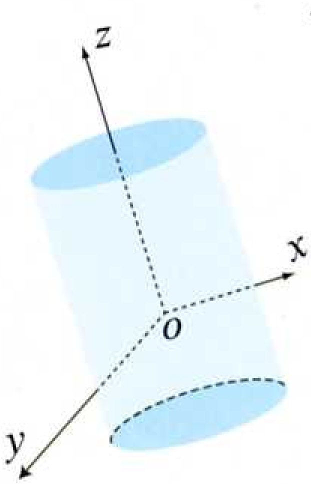
$$V=\frac{1}{3}\,B\times h$$

B : مساحة القاعدة

السطح الأسطواني الدوراني

المعادلة الديكارتية للسطح الأسطواني الدوراني الذي محوره OZ ونصف قطره r هي مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث :

$$x^2+y^2=r^2$$



• طويلة شعاع

إذا كان $\vec{u}\,(x,y,z)$ شعاع من الفضاء فإن :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

• المسافة بين نقطتين

لتكن $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ نقطتان من الفضاء

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

• التمثيل الشعاعي لمستقيم

لتكن A , B نقطتان مختلفتان من الفضاء.
المستقيم (AB) هي مجموعة النقاط من الفضاء التي من أجلها يوجد عدد حقيقي k والتي تحقق :

$$\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$$

■ **التفسير في معلم**

ليكن $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم D

لتكن $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ إحداثيات النقطة M.

المساواة $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ تكتب

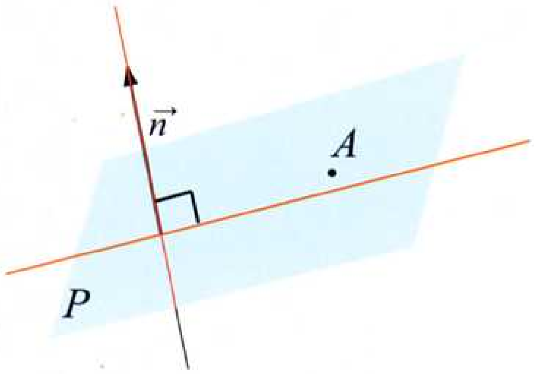
$$\begin{cases} x = x_A + k\,\alpha \\ y = y_A + k\,\beta \\ z = z_A + k\,\gamma \end{cases} \qquad k \in R$$

تسمى التمثيل الوسيطي للمستقيم D

• المستوي

يوجد مستو وحيد P في الفضاء يمر من النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ وعمودي على الشعاع غير المعدوم $\vec{n}\,(a,b,c)$ هي مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق : $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

أي : $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$



■ لتكن a، b، c ثلاث نقط ليست كلها معدومة :
مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة

$$ax+by+cz+d=0$$

هي معادلة المستوي P العمودي على الشعاع $\vec{i}\,(a,b,c)$

• بعد نقطة عن مستوي

ليكن P المستوي الذي معادلته :
$ax + by + cz + d = 0$
$A(x_0,y_0,z_0)$ نقطة من الفضاء.

$$AH = \frac{|\,ax_0 + by_0 + cz_0 + d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$