إعداد: عبد المطلب

بوزريعة: جمادى الأولى 1432 هـ

الاحتمالات [I]

Probabilités

تمرين1

يحتوي صندوق على 9 كرات مرقمة من 1 إلى 9. نسحب عشوائيا من هذا الصندوق 3 كرات في آن واحد.
ما هو احتمال الحصول على:
1- ثلاث كرات أرقامها زوجية؟
2- ثلاث كرات إحداها على الأقل تحمل رقما فرديا؟
3- كرتين فقط تحملان رقمين أوليين؟
4- ثلاث كرات مجموع أرقامها يساوي 9 ؟

$\frac{1}{28}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{20}{21}$	$\frac{1}{21}$

تمرين2

يتألف برنامج أسئلة مسابقة من 16 أسئلة مختلفة.
سحب تلميذ عشوائيا وفي آن واحد سؤالين.
I- هذا التلميذ درس 10 أسئلة فقط من هذا البرنامج.
ما هو الاحتمال لكي يسحب التلميذ من بين هذين السؤالين:
1- سؤالان لم يدرسهما؟ **2-** سؤالان درسهما؟
3- سؤال واحد فقط درسه؟
4- على الأقل سؤالا واحدا درسه؟
II- نفرض الآن أن هذا التلميذ درس n سؤالا من بين 16 أسئلة ($n \leq 16$).
1- ما هو الاحتمال P_n لكي يسحب هذا التلميذ من بين السؤالين سؤالا واحدا درسه على الأقل؟
2- عين قيم الأعداد الطبيعية n بحيث ($P_n \geq 0{,}975$).

$\{13،14،15،16\}$	$\frac{n(-n+31)}{240}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

تمرين3 بكالوريا

يحتوي كيس على 10 كرات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس، منها 3 حمراء، 3 خضراء و4 بيضاء.
1) نسحب من هذا الكيس، ثلاث كرات، في آن واحد، ما احتمال الحصول على: **أ)** نفس اللون.
ب) الألوان الثلاثة. **ج)** كرة بيضاء واحدة على الأقل.
2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كرات عدد الكرات البيضاء المسحوبة.
أ) ما هو قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X؟
ب) احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X.

$\frac{6}{5}$	0	1	2	3
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

$\frac{5}{6}$ ، $\frac{3}{10}$ ، $\frac{1}{20}$

تمرين4

يحتوي كيس على 4 كريات بيضاء، 3 سوداء وكرتين خضراوتين. نسجل على كل كرية بيضاء الرقم 1- ، وعلى كل كرية سوداء الرقم 2 وعلى كل كرية خضراء الرقم 3.
نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من هذا الكيس.
ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب ، مجموع الرقمين المسجلين على الكرتين المسحوبتين.
1- ما هي قيم المتغير العشوائي X؟
2- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .
3- احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ والتباين $V(X)$.

-2	1	2	4	5	6
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$

$\frac{16}{9}$ ، $\frac{847}{162}$

تمرين5

يحتوي صندوق على 11 كرة. 5 سوداء ، 4 بيضاء و 2 حمراء. نسحب عشوائيا في آن واحد 4 كرات.
1- احسب احتمال سحب: • أربع كرات من اللون نفسه.
• كرتين من اللون نفسه، وكرتين من لونين مختلفين.
• أربع كرات من لونين مختلفين.
• كرة واحدة حمراء وعلى الأقل واحدة بيضاء.
2- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الألوان المحصل عليها. عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب الأمل الرياضياتي للمتغير X.

$\frac{74}{165}$ ، $\frac{82}{165}$ ، $\frac{16}{33}$ ، $\frac{1}{55}$

1	2	3
$\frac{1}{55}$	$\frac{82}{165}$	$\frac{16}{33}$

$\frac{37}{15}$

تمرين6

يحتوي كيس على 8 قريصات. ثلاث قريصات تحمل الرقم 1 وثلاث قريصات تحمل الرقم 2 واثنتان تحملان الرقم 3.
نسحب عشوائيا في آن واحد من هذا الكيس 3 قريصات.
1- احسب احتمال سحب ثلاث قريصات:
• تحمل الرقم نفسه. • تحمل أرقاما مختلفة.
2- نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع أرقام القريصات المسحوبة. عين قانون الاحتمال ثم احسب الأمل الرياضياتي للمتغير X.

$\frac{9}{28}$ ، $\frac{1}{28}$

3	4	5	6	7	8
$\frac{1}{56}$	$\frac{9}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{19}{56}$	$\frac{9}{56}$	$\frac{3}{56}$

$\frac{45}{8}$

تمرين7

يحتوي كيس على 4 قريصات بيضاء و n قريصة سوداء ($n \geq 3$). نعتبر أن جميع السحبات متساوية الاحتمال.

1- نسحب قريصتين في آن واحد وبلا اختيار.

نعتبر أن سحب قريصة بيضاء يعطي ربح 3 نقاط وسحب قريصة سوداء يعطي ربح نقطتين. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع ربحي القريصتين المسحوبتين.

α. عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

β. احسب بدلالة n الأمل الرياضياتي $E(X)$.

δ. كيف يمكن اختيار العدد الطبيعي n للقريصات السوداء حتى يكون $E(X) = \frac{24}{5}$ ؟

2- نسحب الآن 3 قريصات على التوالي بحيث تعاد القريصة المسحوبة عند كل سحب. احسب احتمال الحوادث:

α. سحب قريصات كلها من اللون نفسه.

β. سحب قريصة واحدة بيضاء.

δ. سحب قريصات من اللونين.

6	5	4
$\frac{12}{n^2+7n+12}$	$\frac{8n}{n^2+7n+12}$	$\frac{n(n-1)}{n^2+7n+12}$

$n=6$

$\frac{12n}{(n+4)^2}$ ، $\frac{12n^2}{(n+4)^3}$ ، $\frac{n^2-4n+16}{(n+4)^2}$

تمرين8

نعتبر نردين غير مزيفين، لوناهما مختلفان وأوجه كل منهما مرقمة من 1 إلى 6 ، نرمي هذين النردين في آن واحد ونسجل الرقمين اللذين يظهران على الوجهين العلويين.

نسمي S مجموع الرقمين المحصل عليهما:

$2 \leq S \leq 3$ نسجل 10 نقاط

$3 < S \leq 5$ نسجل 6 نقاط

$5 < S < 10$ نسجل 3 نقاط

$10 \leq S \leq 12$ نسجل نقطتين.

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمي عدد النقط المسجلة.

1- عين على شكل جدول قانون الاحتمال لـ X.

2- احسب $E(X)$ ، $V(X)$ و $\sigma(X)$.

3- احسب احتمال الحادثة: $X \leq 6$.

10	6	3	2
$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{6}$

$\frac{11}{12}$	2,236 ; 5 ; 4

تمرين9

نعتبر نردين مكعبين أوجه النرد الأول مرقمة كما يلي: 2 ، 2 ، 3 ، 3 ، 6 ، 6 وأوجه النرد الثاني مرقمة كما يلي: 1 ، 4 ، 4 ، 5 ، 5 ، 5 . نفرض أن كل الأوجه في كل من المكعبين لها نفس احتمال الظهور. نرمي النردين في آن واحد.

1- ما احتمال أن يكون الرقمان المسجلان على الوجهين العلويين: **أ)** زوجيين؟ **ب)** أحدهما زوجي والآخر فردي؟

2- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمي مجموع رقمي الوجهين العلويين. عين قانون الاحتمال ثم احسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X.

11	10	8	7	6	4	3
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$

$\frac{5}{9}$ ، $\frac{2}{9}$	$\frac{23}{3}$

تمرين10

رقمت أوجه نرد مزيف من 1 إلى 6.

عند رمي هذا النرد نفترض أن احتمال ظهور وجه يحمل رقما زوجيا هو ضعف احتمال ظهور وجه يحمل رقما فرديا.

1- احسب احتمال ظهور الوجه الذي يحمل رقما فرديا.

2- احسب احتمال ظهور الوجه الذي يحمل رقما زوجيا.

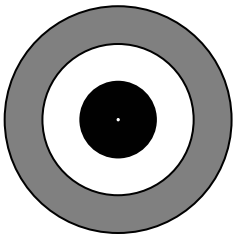
3- عندما يرمي شخص هذا النرد، يربح 10 نقاط إذا ظهر الوجه الذي يحمل رقم 6، ويربح 5 نقاط إذا ظهر الوجه الذي يحمل رقم 3، أما إذا ظهر وجه آخر غير هذين الوجهين فإنه يخسر5 نقاط. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمي عدد النقط المحصل عليها: عين قانون الاحتمال ثم احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

-5	5	10
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

$\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{9}$

تمرين11

رياضي يرمي بسهم ليصيب هدفا عبارة عن قرص مركزه O ونصف قطره r. نشكل على هذا القرص ثلاث دوائر مركزها O، أنصاف أقطارها على الترتيب $\frac{r}{3}$ ، $\frac{2r}{3}$ ، r تحدّد ثلاث مناطق ملونة على الترتيب من المركز بالأسود، الأبيض، الرمادي. نفرض أن السهم يصيب الهدف عند كل رمية وأن احتمال إصابة كل منطقة يتناسب طردا مع مساحتها. (نذكر أن مساحة قرص نصف قطره r هي πr^2).



عند إصابة المنطقة السوداء نسجل 30 نقطة.

عند إصابة المنطقة البيضاء نسجل 20 نقطة.

عند إصابة المنطقة الرمادية نسجل 10 نقاط.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية عدد النقاط المسجلة. عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

$P(X=10) = \frac{5}{9}$	$P(X=20) = \frac{1}{3}$	$P(X=30) = \frac{1}{9}$

عبد المطلب