إعداد: عبد المطلب

بوزريعة: محرم 1432 هـ

الأعداد المركبة

Nombres Complexes

تمرين1

اكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة التالية:

$$z_1=(1+2i)^2(3+4i)+(1-i)^3+20$$

$$z_2=\frac{1+18i}{3+4i}+\frac{7-26i}{3-4i}-\frac{-2+15i}{i}$$

$$z_3=\left[\left(-\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}+1\right)i\right]^2$$

$$z_4=\frac{-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}\,i}{1+\sqrt{2}\,i-i}\qquad z_5=\left(\frac{5+7i}{-7+5i}\right)^{2011}$$

i	$1+i$	$-4(2+\sqrt{3})i$	$-7-2i$	$-7-2i$

تمرين2

حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية:

1) $z.\bar{z}+2z-3\bar{z}-31-25i=0$

2) $z^2+4\bar{z}-5=0$

3) $(z+\bar{z})^2+2i\,z.\bar{z}-4i=0$

$\pm\sqrt{2}\,i$	$1\ ;\ -5\ ;\ 2-\sqrt{7}\,i\ ;\ 2+\sqrt{7}\,i$	$-2+5i\ ;\ 3+5i$

تمرين3

عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي المركب بحيث:

1) $|z-1+i|=|z+1|$

2) $|iz-3-2i|=3$

3) $z+\bar{z}=|z|$

$4x-2y-1=0$	$r=3\ ;\ \Omega(2,-3)$	$(y=\sqrt{3}\,x)\cup(y=-\sqrt{3}\,x)\ x\geq 0$

تمرين4

في المستوي المركب، لاحقة النقطة M هي العدد المركب: $z=x+iy$ ، x و y عددين حقيقيين. نرفق بكل عدد مركب z العدد المركب Z حيث:

$$Z=2z.\bar{z}+iz-(2+i)\bar{z}-7+2i$$

1- اكتب Z على الشكل الجبري.

2- عين وارسم المجموعة E_1 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا حقيقيا. (وحدة الطول 2cm)

3- عين وارسم المجموعة E_2 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا تخيليا صرفا.

$r=2\ ;\ \Omega(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$y=-1$

تمرين5

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$، لاحقة النقطة M هي العدد المركب $z=x+iy$ ، x و y عددين حقيقيين. نرفق بكل عدد مركب $z\neq 2$ العدد المركب Z حيث:

$$Z=\frac{z+2}{z-2}$$

1- اكتب Z على الشكل الجبري.

2- عين المجموعة E_1 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا حقيقيا، والمجموعة E_2 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا تخيليا صرفا.

3- لتكن النقطة M' صورة Z. عين المجموعة E_3 للنقط M من المستوي حتى تكون: O، M، M' على استقامة واحدة.

$y=0$	$r=2\ ;\ O(0,0)$	$(y=0)\cup[r=2\sqrt{2}\ ;\ \Omega(-2,0)]$

تمرين6

في المستوي المركب لاحقة النقطة M هي العدد المركب: $z=x+iy$ ، x و y عددين حقيقيين. نرفق بكل عدد مركب $z\neq -i$ العدد المركب Z حيث:

$$Z=\frac{z-2-i}{z+i}$$

1- عين $\mathrm{Re}(Z)$ و $\mathrm{Im}(Z)$.

2- عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث:

- يكون Z عددا حقيقيا.
- يكون Z عددا تخيليا صرفا.
- تكون: $|Z|=\sqrt{2}$.

$y=x-1$	$r=\sqrt{2}\ ;\ \Omega(1,0)$	$r=4\ ;\ \Omega(-2,-3)$

تمرين7

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$، لاحقة النقطة M هي العدد المركب: $z=x+iy$ ، x و y عددين حقيقيين. نرفق بكل عدد مركب $z\neq i$ العدد المركب $f(z)$:

$$f(z)=\frac{2z-i}{iz+1}$$

1- عين وأنشئ المجموعة E للنقط M من المستوي حتى يكون $f(z)$ عددا حقيقيا موجبا. (وحدة الطول 4cm)

2- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $\overline{f(\bar{z})}=\frac{7}{4}i$.

$z=3i$	$[r=\frac{1}{4}\ ;\ \Omega(0,\frac{3}{4})]\cap(x>0)$

تمرين8

اكتب على الشكل المثلثي الأعداد المركبة التالية:

$z_1 = 2+2i$ ، $z_2 = -\sqrt{3}+i$ ، $z_3 = 3+i\sqrt{3}$ ، $z_4 = 5$

$z_5 = -8ie^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_6 = (1-\sqrt{3})i$ ، $z_7 = \left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i\right)^5$

$z_8 = (1-i\sqrt{3})(1+i)$ ، $z_9 = \dfrac{-1-i}{1+i\sqrt{3}}$ ، $z_{10} = \dfrac{3\sqrt{2}\,i}{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

$z_{11} = \dfrac{4e^{i\pi}}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}$ ، $z_{12} = \dfrac{5+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}$ ، $z_{13} = \alpha i \ (\alpha \in \mathbb{R})$

$z_{14} = \alpha i \ (\alpha \in \mathbb{C})$ ، $z_{15} = -2(\cos\theta + i\sin\theta) \ (\theta \in \mathbb{R})$

$z_{16} = \sin 2\theta + 2i\sin^2\theta \ \ (0<\theta<\pi)$

$z_{17} = 1-\tan^2\theta + 2i\tan\theta \ \ (-\pi/2<\theta<\pi/2)$

$z_{18} = \dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} \ \ (-\pi/2<\theta<\pi/2)$

$z_7\left[32,-\frac{5\pi}{4}\right]$	$z_6\left[\sqrt{3}-1,-\frac{\pi}{2}\right]$	$z_5\left[8,-\frac{\pi}{3}\right]$	$z_2\left[2,\frac{5\pi}{6}\right]$
$z_{11}\left[\sqrt{2},\frac{7\pi}{6}\right]$	$z_{10}\left[3,\frac{3\pi}{4}\right]$	$z_9\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{11\pi}{12}\right]$	$z_8\left[2\sqrt{2},\frac{-\pi}{12}\right]$
$z_{18}[1,2\theta]$	$z_{16}[2\sin\theta,\theta]$	$z_{14}\left[r,\theta+\frac{\pi}{2}\right]$	$z_{12}\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$

تمرين9

اكتب على الشكل الجبري والأسي الأعداد المركبة التالية:

$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} - i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$ ، $z_2 = -\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z_3 = \left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right]^4$ ، $z_4 = \dfrac{\left(\sqrt{6}e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 . e^{i\frac{4\pi}{3}}}{3e^{i\frac{3\pi}{2}}}$

$-2i$	$-8-8\sqrt{3}\,i$	$1-i$	$-\sqrt{6}+\sqrt{2}\,i$
$2e^{i\frac{3\pi}{2}}$	$16e^{i\frac{4\pi}{3}}$	$\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{4}}$	$2\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$

تمرين10

ليكن Z عدد مركب معرف كما يلي:

$$Z = \frac{(\sqrt{2}-1)+i(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+i}$$

1- اكتب Z على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي.

2- عين الأعداد الصحيحة n حتى يكون Z^n عددا حقيقيا.

3- عين الأعداد الصحيحة n حتى يكون Z^n تخيليا صرفا.

4- اكتب على الشكل الأسي ثم على الشكل الجبري العـــدد المركب z حيث: $Z \times z = 4\sqrt{2}\,e^{i\frac{13\pi}{12}}$

$-2\sqrt{3}+2i$	$4e^{i\frac{5\pi}{6}}$	$4k+2$	$4k$	$\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$	$1+i$

تمرين11

z_1 ، z_2 ، z_3 ثلاثة أعداد مركبة معرفة بما يلي:

$z_1 = 1+i$ ، $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ ، $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$

1- عين طويلة وعمدة كل من z_1 و z_2.

2- اكتب z_3 على الشكل الجبري وعلى الشكل المثلثي.

3- استنتج قيمتي: $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

4- بين أن: $\left(\dfrac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\dfrac{\overline{z_1}}{\sqrt{2}}\right)^n = 2\cos\dfrac{n\pi}{4}$. $n \in \mathbb{N}$

$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{7\pi}{12}\right]$	$\frac{1-\sqrt{3}}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$	$\left[2,-\frac{\pi}{3}\right]$	$\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$

تمرين12

z_1 ، z_2 ، Z ثلاثة أعداد مركبة معرفة بما يلي:

$z_1 = 1-i$ ، $z_2 = \sqrt{2}-i\sqrt{6}$ ، $Z = \dfrac{z_1^{\,5}}{z_2^{\,4}}$

1- عين طويلة وعمدة كل من z_1 ، z_2 ، $z_1^{\,5}$ و $z_2^{\,4}$.

- استنتج الشكل الجبري لكل من $z_1^{\,5}$ و $z_2^{\,4}$.

2- عين الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب Z.

3- احسب طويلة وعمدة العدد Z ثم استنتج قيمة: $\tan\dfrac{\pi}{12}$.

4- عين الأعداد الصحيحة n حتى يكون Z^n عددا حقيقيا موجبا.

$\left[64,-\frac{4\pi}{3}\right]$	$\left[4\sqrt{2},-\frac{5\pi}{4}\right]$	$\left[2\sqrt{2},-\frac{\pi}{3}\right]$	$\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]$
$24k$	$2-\sqrt{3}$	$\left[\frac{\sqrt{2}}{16},\frac{\pi}{12}\right]$	$\frac{-4+4i}{-32+32\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}+1}{32}+i\frac{\sqrt{3}-1}{32}$

تمرين13

z_1 ، z_2 ، z_3 ثلاثة أعداد مركبة معرفة بما يلي:

$z_1 = (1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})$ ، $z_2 = -1+i\sqrt{3}$ ، $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$

1- عين طويلة وعمدة كل من z_2 و z_3 ثم z_1.

2- استنتج قيمتي: $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

3- احسب العددين: $\left(\dfrac{z_3}{\sqrt{2}}\right)^{2012}$ و $\left(\dfrac{z_1+z_2}{\sqrt{2}\,z_3}\right)^{1432}$.

4- اكتب على الشكل الأسي الجذور التكعيبية للعدد: $2z_3$

$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	-1	$\left[2\sqrt{2},-\frac{\pi}{12}\right]$	$\left[\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right]$	$\left[2,\frac{2\pi}{3}\right]$
$\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{4}}$	$\sqrt{2}\,e^{i\frac{13\pi}{12}}$	$\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{12}}$		

تمرين14

نعتبر المعادلة (E) في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$:

$$z^3-4(1+i)z^2+12iz+8-8i=0$$

1- برهن أن المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا z_0 يطلب حسابه.

2- عين العددين المركبين a و b بحيث يمكن كتابة المعادلة (E) على شكل: $(z-2)(z-2i)(az+b)=0$.

3- استنتج حلول المعادلة (E).

4- المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن A، B و C النقاط التي لواحقها على الترتيب: $z_A=2$ ، $z_B=2i$ ، $z_C=2+2i$.

عين طبيعة المثلث ABC واحسب إحداثيتي مركز ثقله.

$\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$	$2+2i$	$2i$	2

تمرين15

نعتبر المعادلة (E) في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$:

$$z^3+2(1+i)z^2+(9+4i)z+18i=0$$

1- برهن أن (E) تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يطلب حسابه، ثم عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يمكن كتابة (E) على شكل: $(z-z_0)(az^2+bz+c)=0$.

2- استنتج الحلين الآخرين: z_1 و z_2 حيث $\mathrm{Im}(z_1)<0$.

3- المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن A و B صورتي العددين المركبين z_1 و z_2 على الترتيب. عين طبيعة المثلث OAB.

$-1+2\sqrt{2}\,i$	$-1-2\sqrt{2}\,i$	$-2i$

تمرين16

$f(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث:

$$f(z)=z^3-3\sqrt{2}z^2+6z-18\sqrt{2}$$

1- احسب $f(3\sqrt{2})$ ثم عين العدد الحقيقي a بحيث:

$$f(z)=(z-3\sqrt{2})(z^2+a)$$

2- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $f(z)=0$.

نرمز إلى z_1، z_2 و z_3 حلول المعادلة $f(z)=0$ حيث z_1 الحل الحقيقي و $\mathrm{Im}(z_2)<0$.

3- المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقاط A، B و C صور الأعداد المركبة z_1، z_2 و z_3 حلول المعادلة $f(z)=0$ على الترتيب. عين طبيعة المثلثين ABC و OAB.

$\sqrt{6}i$	$-\sqrt{6}i$	$3\sqrt{2}$	$a=6$

تمرين17

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (E) التالية:

$$(iz+3+4i)(z^2-8z+25)=0$$

نرمز لحلول المعادلة (E) بـ z_0، z_1 و z_2 حيث: $\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)$ و $\mathrm{Im}(z_0)=\mathrm{Im}(z_1)$.

2- المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن A، B و C نقاط من هذا المستوي لواحقها z_0، z_1 و z_2 على الترتيب. بين أن النقاط A، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة $(\mathscr{C})$، يطلب تعيين مركزها ω ونصف قطرها r. أنشئ المثلث ABC والدائرة $(\mathscr{C})$.

$r=5$; $\omega(0,0)$	$4-3i$	$4+3i$	$-4+3i$

تمرين18

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية:

$$z^2-2mz+m^2+1=0$$

z مجهول و m وسيط حقيقي.

2- المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن M_1 و M_2 نقطتان لاحقتاهما على الترتيب العددين المركبين: $z_1=m-i$ و $z_2=m+i$.

- عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون المثلث OM_1M_2 متساوي الأضلاع.
- عين قيم m حتى تكون O، M_1 و M_2 في استقامية.

0	$\pm\sqrt{3}$	$m+i$	$m-i$

تمرين19

$f(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث:

$$f(z)=z^4+(2-i)z^3+z^2+(12-i)z+20-10i$$

1- بين أن المعادلة $f(z)=0$ تقبل حلا حقيقيا $z_0=-2$.

2- عين كثير الحدود $g(z)=z^3+az^2+bz+c$ حيث: $f(z)=(z-z_0)\times g(z)$ (a ، b و c أعدادا مركبة)

3- اكتب $\overline{g(z)}$ بدلالة $\bar{z}$ ، حيث $\bar{z}$ مرافق z، ثم حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $g(z)=0$ إذا علمت أنها تقبل حلين مترافقين z_1 و $\bar{z_1}$. الحلّ z_1 يحقّق $\mathrm{Im}(z_1)<0$.

4- المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقاط M_0، M_1، M_2، M_3 صور الأعداد المركبة z_0، z_1، z_2 و z_3 حلول $f(z)=0$ على الترتيب. أنشئ الرباعي $M_0M_1M_2M_3$ واحسب مساحته.

7,5 u.a	$-2+i$	$1+2i$	$1-2i$	-2

تمرين20

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. (الوحدة 1cm)

1- أنشئ النقط A ، B و C ذات اللواحق على الترتيب:
$z_A=1+i$ ، $z_B=2-i$ ، $z_C=3+2i$

2- احسب لاحقتي الشعاعين: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

3- فسر هندسيا الطويلة والعمدة للعدد المركب: $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

- بين أن: $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC.

4- عين لاحقة النقطة I مركز الدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC ثم احسب نصف قطرها r. ارسم (Γ).

5- عين لاحقة النقطة D حتى يكون ABDC مربعا.

$z_I=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$	$r=\frac{\sqrt{10}}{2}$	$z_D=4$

تمرين21

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=2\sqrt{3}-2i$ ، $z_C=-2i$

1- اكتب على الشكل الأسي العدد المركب: $\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مركز ثقله G.

2- لتكن النقطة D نظيرة A بالنسبة لحامل محور التراتيب.

- عين z_D لاحقة النقطة D.
- مثّل الرباعي ABCD ثم عين بدقّة طبيعته. الوحدة 1cm

3- اكتب على الشكل الأسي العدد المركب: $\dfrac{2\sqrt{3}-2i}{-\sqrt{3}+i}$.

- بين أن $\arg\left(\dfrac{2\sqrt{3}-2i}{-\sqrt{3}+i}\right)=\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}\right)$ ثم استنتج أن النقاط B ، O و D على استقامة واحدة.

$e^{i\frac{\pi}{3}}$	$G(\sqrt{3},-1)$	$z_D=-\sqrt{3}+i$	$2e^{i\pi}$

تمرين22 (بكالوريا)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، الوحدة 1cm. لتكن النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+3i$ ، $z_B=2\sqrt{3}$ ، $z_C=2i$

1- مثّل النقاط A ، B و C على ورقة مليمترية.

2- عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z_A.

3- أ) احسب طويلة كل من الأعداد المركبة التالية:
z_A-z_C ، z_B-z_A و z_B-z_C. استنتج طبيعة المثلث ABC.

ب) عين لاحقة المركز K للدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC ، حدد نصف قطر هذه الدائرة.

ج) بين أن النقطة O تنتمي إلى الدائرة (Γ).

4- لتكن النقطة D ذات اللاحقة $z_D=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

أ) بين أن $z_D=\sqrt{3}-i$.

ب) احسب لاحقة المنتصف M للقطعة [AD].

ج) بين أن الرباعي ABDC مستطيل.

$2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$	$z_K=\sqrt{3}+i$	$z_M=\sqrt{3}+i$

تمرين23

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1- نعتبر النقطتين A و B لاحقتيهما على الترتيب:
$z_A=-\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ و $z_B=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

أ) عين اللاحقة z_C للنقطة C نظيرة B بالنسبة للمبدأ O.

ب) عين اللاحقة z_I للنقطة I منتصف القطعة [AC].

ج) عين اللاحقة z_D للنقطة D نظيرة B بالنسبة للنقطة I.

د) أنشئ النقاط A ، B ، C ، D و I. (الوحدة 1cm)

2- أ) فسر هندسيا الطويلة والعمدة للعدد المركب: $\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_B}$.

ب) تحقق أن العدد المركب $\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

ج) ماذا يمكن قوله عن القطعتين [AC] و [BD]؟

3- ماهي طبيعة الرباعي ABCD؟ احسب مساحته.

4- بيّن أن النقاط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة $(\mathscr{C})$ يطلب حساب لاحقة مركزها ω ونصف قطرها r.

5- لتكن النقطة E نظيرة B بالنسبة لحامل محور الفواصل.

أ) عين z_E لاحقة النقطة E.

ب) احسب الجداء: $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BE}$.

ج) ماذا يمثل المستقيم (BE) بالنسبة للدائرة $(\mathscr{C})$؟

$z_C=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$	$z_I=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$	$z_D=-3\sqrt{2}+\sqrt{2}i$	$z_E=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

تمرين24

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، (وحدة الرسم 2cm). عين هندسيا ثم أنشئ مجموعة النقط M من المستوي لاحقتها z في كل حالة من الحالات التالية:

1) $|z-2-3i|=1$

2) $|z+1|=|z-1+2i|$

3) $|(1+i)\bar{z}|=3\sqrt{2}$

عبد المطلب