التمرين 1 : (Bac S Polynésie juin 2013)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+2u_n}$.

1) احسب u_1 و u_2 .

2) أ- برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0< u_n <1$.

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

3) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\frac{u_n}{1-u_n}$.

أ- بيّن أن (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=\frac{3^n}{3^n+1}$.

جـ- احسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين 2 : (Bac S Métropole juin 2013)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$.

1) أ- احسب u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 .

ب- خمن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

2) أ- برهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\le n+3$.

ب- بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$

جـ- استنتج صحة التخمين السابق (السؤال 1 - ب) .

3) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n-n$.

أ- بيّن أن (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$.

جـ- احسب نهاية المتتالية (u_n) .

4) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ و $T_n=\frac{S_n}{n^2}$

أ- عبّر عن S_n بدلالة n .

ب- عيّن نهاية المتتالية (T_n) .

التمرين 3 : (بكالوريا 2013 . الشعبة : تقني رياضي)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0=e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n=\sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$

(v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\frac{1}{2}\ln u_n+\frac{1}{2}$.

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم احسب حدّها الأول .

2) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3) احسب بدلالة n المجموع S_n ؛ حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

4) احسب بدلالة n الجداء P_n ؛ حيث : $P_n = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$.

التمرين 4 : (Bac Nouvelle Calédonie mars 2011)

I- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - \ln\left(x^2 + 1\right)$.

1) حل ، في $\mathbb{R}$ ، المعادلة : $f(x) = x$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0 ; 1]$.

3) استنتج أنه إذا كان $x \in [0 ; 1]$ فإن $f(x) \in [0 ; 1]$.

II- لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right)$

1) برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n \le 1$.

2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها .

التمرين 5 : (بكالوريا المغرب 2013 . الشعبة : علوم تجريبية)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_1 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} = \dfrac{25}{10 - u_n}$

1) أ- تحقق أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $5 - u_{n+1} = \dfrac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$.

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $5 - u_n > 0$.

2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = \dfrac{5}{5 - u_n}$.

أ- بيّن أنه ، من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $v_{n+1} = \dfrac{10 - u_n}{5 - u_n}$ ثم تحقق أنه ، من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $v_{n+1} - v_n = 1$.

ب- بيّن أنه ، من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $v_n = n$ وستنتج أن : $u_n = 5 - \dfrac{5}{n}$.

جـ- احسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين 6 : (بكالوريا 2013 . الشعبة : علوم تجريبية)

I) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{5^{n+1}}{6^n}$.

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول .

2) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) معرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$.

1) برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \le u_n \le 6$.

2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3) أ- برهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $6 - u_{n+1} \le \dfrac{5}{6}(6 - u_n)$.

ب- بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le 6 - u_n \le v_n$. استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$