سلسلة استعد للبكالوريا رقم (02)

المستوى : ثالثة ثانوي

الشعبـــــة :علوم تجريبية + رياضيات و تقني رياضي

المحور : الدوال العددية لمتغير حقيقي

Les fonctions numériques d'une variable réelle

- * -الوحدة الثالثة : الاشتقاقية و توظيف المشتقات * -

Dérivabilité et applications des fonctions dérivées

1- قابلية الاشتقاق و التفسير البياني

التمرين (01) : f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفــة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $f(x)=\frac{|x|}{x+1}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- ادرس استمرارية الدالة f عند القيمة 0

2- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة 0 و فسّر النتائج بيانيا و أكتب معادلتي نصفي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة ذات الفاصلة 0 و ماذا تسمى هذه النقطة .

3- أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها و فسّر النتائج بيانيا

4- أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

ارسم (Δ_1) و (Δ_2) و المنحني C_f

التمرين (02) f الدالة المعرفــة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $f(x)=\sqrt{(x+2)^2}+\frac{1}{x+1}$

وليكن (C) المنحنى البياني الممثل لتغيرات الدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

1 - ادرس استمرارية و قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة $x_0=-2$ ثم فسّر النتيجة بيانيا

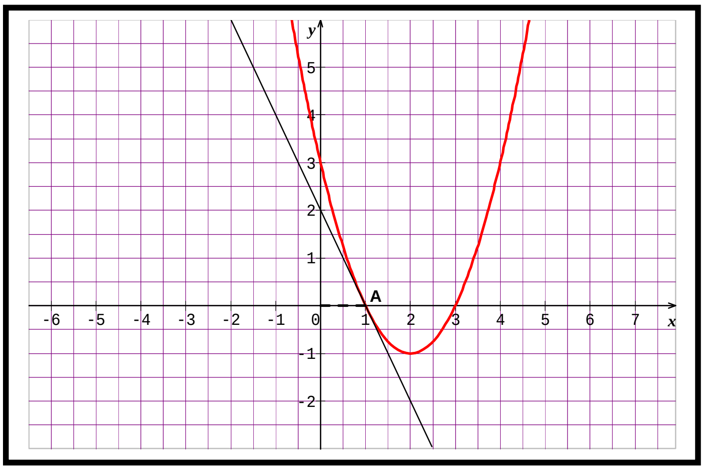
2 - ادرس تغيرات الدالة f

3 - احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-2)]$ و فسّر النتائج بيانيا

4 - عيّن عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ثم احسب فاصلة نقطة تقاطع المنحني (C) مع حامل محور الفواصل

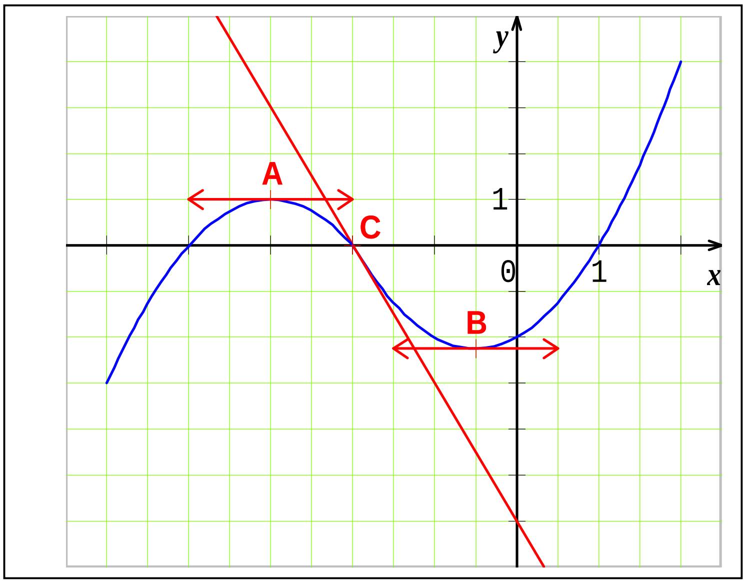
5 - ارسم بدقة المنحني (C) وبصفة خاصة نصفي المماسين عند النقطة الزاويّة .

التمرين (03) المستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث a,b,c اعداد حقيقية . (C) تمثيلها البياني في الشكل المقابل .



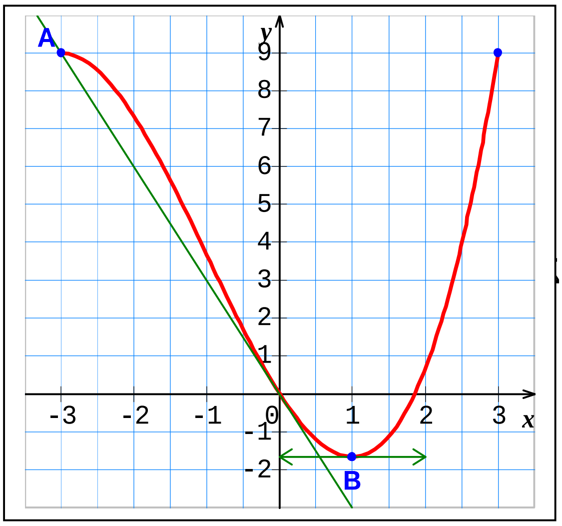
1. بقراءة بيانية احسب كلا من :
$f(1)$ ، $f(2)$ و $f'(1)$
2. باستعمال النتائج السابقة عين a,b,c

التمرين (04)



المنحنى البياني التالي C_f هو لدالة f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها
1. عين مجموعة تعريف الدالة f .
2. بقراءة بيانية عيّن العدد المشتق للدالة f عند كل من $-\frac{1}{2}$ ، 3- و 2- علماً أنّ ترتيب النقطة B هو $-\frac{9}{4}$.
4. استنتج معادلات المماسات للمنحنى C_f عند A ، B و C.
5. هل توجد مماسات أخرى للمنحنى C_f موازية لمماسه عند النقطة C ؟

التمرين (05) الشكل الموالي هو التمثيل البياني C لدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[-3;3]$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;I,J)$



المنحنى C يحقق الشروط التالية :
يمر بمبدأ المعلم O ، و يشمل النقطة $A(-3;9)$ ، يقبل في النقطة B التي فاصلتها 1 مماسا أفقيا و يقبل المستقيم (OA) ؛
1. ما هو معامل توجيه المستقيم (OA)؟
2. نفرض أن f معرفة على $[-3;3]$ بـــ:
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
حيث a ، b ، c و d أعداد حقيقية .
أ- بين باستعمال الشروط السابقة أن :
$$a=\frac{1}{3} ، b=1 ، c=-3 \text{ و } d=0$$
ب- حلل $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f.

التمرين (06) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بــ:

$$f(x)=\frac{x|x|}{|x+1|}$$

وليكن (C) المنحني البياني الممثل لتغيرات الدالة f في معلم متعامد ومتجانس

1/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة 0 ثم فسّر النتيجة بيانيا

2/ احسب النهايات عند حدود مجموعة تعريفها

3/ بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$: مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$ و $-\infty$

4/ بيّن أن f تقبل الإشتقاق على مجموعة تعريفها ثم احسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

5/ عين فاصلة نقطة تقاطع المنحني (C) مع المستقيم المقارب المائل ثم ارسم بدقة المنحني (C)

التمرين (07) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفــــة بــ: $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x-2}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون للمنحني C_f مستقيم مقارب معادلته $y=x-3$:

و f تقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها3.

2/ ادرس تغيرات الدالة f

3/ اثبت ان المنحني C_f يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3) ، يطلب إعطاء إحداثيات نقطتي التماس M_1 و M_2 ومعادلتي المماسين (D_1) و (D_2)

4/ ارسم بدقة المماسين (D_1) و (D_2) ثم المنحني C_f

5/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المنحني C_f والمستقيم (Δ_m) الذي معادلته : $y=-3x+m$

التمرين (08) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفــــة على $\mathbb{R}$ بــ : $f(x)=x+2\sqrt{|x|}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1-ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة 0 و فسّر النتيجة بيانيا و ماذا تسمى النقطة ذات الفاصلة 0

2- احسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

3- بيّن أن f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ثم احسب $f'(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f

4-شكل جدول تغيرات الدالة f .

5- عيّن إحداثيات نقط تقاطع C_f مع حامل محور الفواصل .

6- ارسم المنحني C_f في المجال $[-9;4]$

التمرين (09) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بـــ : $f(x)=1+\sqrt{x^2-2x}$

وليكن (C) المنحني البياني الممثل لتغيرات الدالة f في معلم متعامد ومتجانس

1/ عيّن D_f أكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالـــة f

2/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على مجموعة تعريفها D_f فسر النتائج هندسيا

3/ ادرس تغيرات الدالة f

4/ بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $x=1$ محور تناظر للمنحني (C)

5/ بيّن أن المستقيم (D_1) الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C) في جوار $+\infty$ ثم استنتج معادلة المستقيم المقارب المائل (D_2) في جوار $-\infty$

6/ ارسم المنحني (C)

التمرين (10) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة على $\mathbb{R}$ بـــ :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-x+a & x<2\\ \frac{x^2}{x+1} & x\geq 2\end{cases}$$

حيث a عدد حقيقي

وليكن (C) المنحني البياني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس

1/ أوجد العدد الحقيقي a حتى تكون الدالة f مستمرة عند القيمة 2

نفرض في كل ما يلي : $a=\frac{2}{3}$

2/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على $\mathbb{R}$ وبصفة خاصة عند القيمة 2 ثم فسّر النتيجة بيانيا

3/ ادرس تغيرات الدالة f .

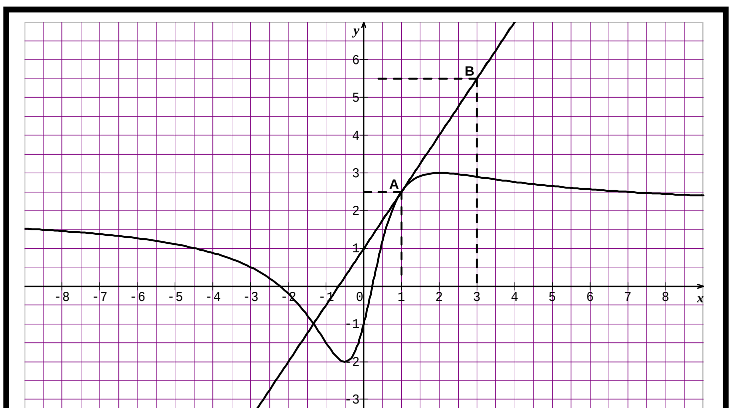
4/ بين أن المنحني (C) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلته

5/ ارسم المنحني (C) .

التمرين (11) (C) المنحني البياني الممثل للدالة f المعرفة بالعبارة :

$$f(x)=a+\frac{bx}{x^2+1}+\frac{c}{x^2+1}$$

عيّن الأعداد الحقيقية a,b,c علما ان المماس عند النقطة $A\left(1;\frac{5}{2}\right)$ يشمل النقطة $B\left(3;\frac{11}{2}\right)$ و المماس عند النقطة ذات الفاصلة 2 يوازي حامل محور الفواصل .



2- حساب المشتقات واتجاه التغير

التمرين (12) احسب الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية مبيّنا المجموعة التي تجري الحسابات عليها

/1 $f(x)=x^3(x^2+1)^4$ /2 $f(x)=\dfrac{x^4(x-1)^2}{(x^2+1)^3}$ /3 $f(x)=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n$

/3 $f(x)=\cos^3(x)+\sin(x^2+1)$ /4 $f(t)=\tan^3 t$ /5 $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}$

التمرين (13) باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايات التالية :

/1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ، /2 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$ ، /3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$ ، /4 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin 3x}{2\cos x-1}$

/5 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$ ، /6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x}$ ، /7 $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$

التمرين (14) n عدد طبيعي غير معدوم ، و x عدد حقيقي يختلف عن 1.

1) بسط المجموع $1+x+x^2+...+x^n$.

2) استنتج تبسيطا للعبارة : $1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$

التمرين (15) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_n(x)=\left(x^2-2x\right)^n$.

1) أدرس تغيرات الدالة f_n (ميّز الحالتين n زوجي ثم فردي) .

2) نسمي C_n المنحني الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ومتجانس .

أ ــ تحقق من أنّ المستقيم ذي المعادلة $x=1$ هو محور تناظر للمنحني C_n.

ب ــ برّر أنّ C_n يمرّ من أربع نقط إحداثياتها مستقلة عن العدد الطبيعي n .

أحسب إحداثيات هذه النقط . أرسم في نفس المعلم المنحنيين C_1 و C_7 .

التمرين (16) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+\sqrt{|4x^2-1|}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

/1 ادرس قابلية اشتقاق الدالـــة f على $\mathbb{R}$ وفسّر النتائج بيانيا

/2 ادرس تغيرات الدالة f .

/3 احسب: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x]$ وفسّر النتائج بيانيا

/4 ارسم بدقة المنحنى C_f

التمرين (17) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بـــ $f(x)=1+2\cos x+\cos 2x$

1/ اثبت أن الدالة f دورية ودورها 2π

2/ بيّن ان الدالة f زوجية واستنتج مجال كافي لدراسة تغيرات الدالة f

3/ ادرس تغيرات الدالة f

4/ أوجد نقط تقاطع المنحني C_f مع حامل محور الفواصل

5/ ارسم المنحني C_f على المجال $[-\pi;\pi]$ و كيف يمكن استنتاج المنحني C_f

6/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد حلول الجملة $\left\{\cos^2 x+\cos x=\frac{m}{2};-\pi\le x\le\pi\right\}$

التمرين (18) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بـــ $f(x)=\cos^2 x.\sin 2x$

1/ اثبت أن الدالة f دورية ودورها π

2/ بيّن ان الدالة f فردية واستنتج مجال كافي لدراسة تغيرات الدالة f

3/ ادرس تغيرات الدالة f

4/ارسم المنحني C_f على المجال $[-\pi;\pi]$ و كيف يمكن استنتاج المنحني C_f

---

التمرين (19) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$ بـــ :

$$f(x)=\frac{\cos 2x}{\cos x}$$

1/ اثبت أن الدالة f دورية ودورها 2π

2/ بيّن أن الدالة f زوجية واستنتج مجال كافي لدراسة تغيرات الدالة f

3/ ادرس تغيرات الدالة f

4/ارسم المنحني C_f على المجال $[-\pi;\pi]$ و كيف يمكن استنتاج المنحني C_f

---

التمرين (20) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بـــ:

$$f(x)=-x+\sqrt{x^2+8}$$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ أحسب $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+2x\right]$. فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها ثم ارسم المنحني C_f .

3/ نعتبر الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x)=-x-\sqrt{x^2+8}$

وليكن C_g منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) بين ان C_g و C_f متناظران بالنسبة للمبدأ O

ارسم C_g ثم عين معادلة لـــ (Γ) حيث $(\Gamma)=(C_f)\cup(C_g)$

3- التقريب التآلفي –طريقة أولر لرسم منحني تقريبي

التمرين (21) 1 /برّر التقريب التآلفي المحلي عند 0 في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $(1+x)^3 \approx 1+3x$. ب) $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}$. ج) $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$. د) $\sin x \approx x$.

2/ باختيار دالة مناسبة وباستعمال التقريب التآلفي احسب : أ) $\tan 46°$ ، ب) $\sqrt{3654}$

التمرين (22) كرة حديدية نصف قطرها $8cm$ تتمدد عند ارتفاع درجة الحرارة.

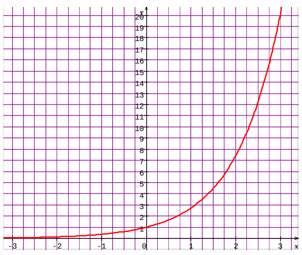
1. ما هو تغير حجمها لما يرتفع نصف قطرها بـِ $1mm$ ؟
2. ما هو تغير مساحتها في نفس الظروف ؟

التمرين (23) لتكن f دالة تحقق: $f(0)=1$ و $f'(x)=\sqrt{x}$.

1. باستعمال طريقة أولر و باختيار خطوة $h=0{,}5$ شكل جدولا يتضمن القيم التقريبية لـِ $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[0;5]$ ثم أنشئ تمثيلا تقريبيا للدالة f . تدور النتائج إلى $0{,}01$. عين قيمة مقربة للعدد $f(4)$.
2. باختيار خطوة جديدة $h=0{,}1$ عين قيمة مقربة للعدد $f(4)$.
3. نبرهن أن $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+1$. تحقق أن $f(0)=1$ و $f'(x)=\sqrt{x}$. أحسب $f(4)$ ثم قارن النتيجة مع القيم المقربة المحصل عليها سابقا بالخطوتين $0{,}5$ و $0{,}1$.

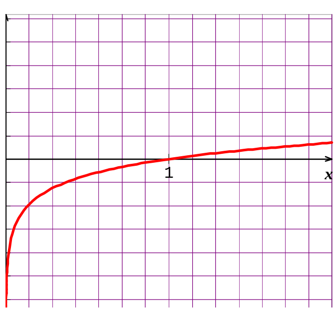
التمرين (24) 1/ لتكن f دالة تحقق: $f(0)=1$ و $f'(x)=f(x)$.

- بإتباع طريقة أولر أنجز ورقة الحساب الموالية باختيار خطوة 0.005 أنجز جدولا يتضمن القيم التقريبية لــ $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[-3;3]$ ثم أنشئ تمثيلا تقريبيا للدالة f



2/ لتكن f دالة تحقق: $f(1)=0$ و $f'(x)=\frac{1}{x}$.

- بإتباع طريقة أولر أنجز ورقة الحساب الموالية باختيار خطوة 0.01 أنجز جدولا يتضمن القيم التقريبية لــ $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $]0;2]$ ثم أنشئ تمثيلا تقريبيا للدالة f

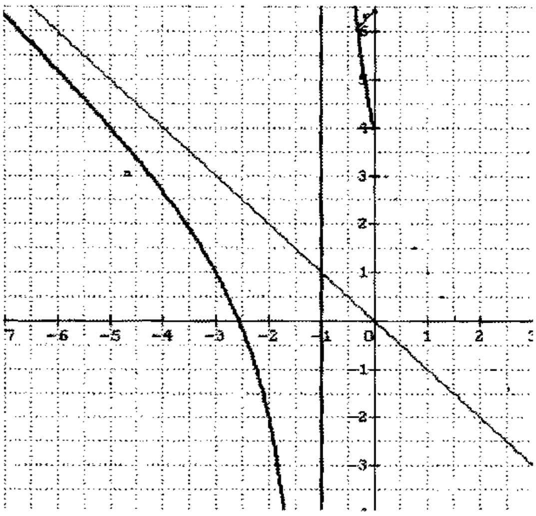


{ التدريب على حل تمارين بكالوريات }

التمرين (01) بكالوريا شعبة علوم تجريبية دورة 2009

I) f دالة معرّفة على $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـ: $f(x)=-x+\frac{4}{x+1}$

(c_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مبين في الشكل.



1) أ) أحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

ب) بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات f شكّل جدول تغيراتها.

2) g دالة معرفة المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+\frac{4}{x+1}$

(c_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد تجانس.

أ) أحسب نهاية g عند $+\infty$.

ب) تحقق من أن (c_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلاً (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

جـ) أدرس تغيرات g .

II) k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$

1) أ) أحسب $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$ ، $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$ ماذا تستنتج ؟

ب) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

2) أكتب معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$.

3) أرسم (Δ_1)، (Δ_2) و (C_k).

التمرين (02) الدالة العددية f : $f(x)=|x-2|+\frac{1}{x-1}$

/1 ادرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة $x_0=2$. فسر النتيجة بيانيا

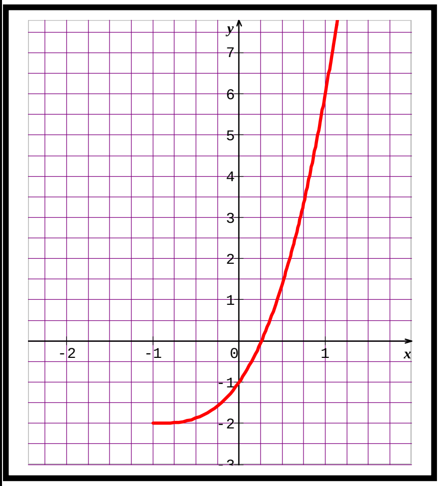
/2 ادرس تغيرات الدالة f و اكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f)

/3 اثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا a في المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$

/4 ارسم المنحني (C_f)

/5 ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $|x-2|+\frac{1-m(x-1)}{x-1}=0$

/6 استنتج مما سبق عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي q $|\cos q-2|+\frac{1-m(\cos q-1)}{\cos -1}=0$



التمرين (03) بكالوريا شعبة علوم تجريبية دورة 2008

المنحني (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي : $g(x)=x^3+3x^2+3x-1$

1- أ) بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g وحدّد $g(0)$ و إشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

ب) علل وجود عدد حقيقي a من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يحقق $g(a)=0$

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

2- f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يأتي:

$f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$ و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$

ب) عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

ج) احسب : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ وفسّر النتيجة بيانيا.

د) شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3- نأخذ a ; 0.26 . أ) عيّن مدور $f(a)$ إلى 10^{-2}. ب) ارسم المنحنى (Γ).

التمرين (04) لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها . لها جدول التغيرات التالي :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

تكتب عبارة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ حيث a,b,c أعداد حقيقية.

1) احسب $f'(x)$

2) اعتمادا على جدول تغيرات الدالة f :

أ) عيّن الأعداد الحقيقية a,b,c .

ب)عين $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x)$ و $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x)$ و فسّر النتيجة بيانيا .

جــ) قارن بين صورتي العددين $\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{2}$ بالدالة f معللا إجابتك .

3) نأخذ فيما يلي : $a=1\ ;\ b=1\ ;\ c=\frac{1}{4}$ وليكن (C) المنحني البياني الممثل لتغيرات الدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

أ) بين أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته : $y=x+1$.

ب)ادرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

ج) أثبت أن النقطة $w(1;2)$ مركز تناظر للمنحني (C).

د) عين نقط تقاطع المنحني (C) مع حامل محور الفواصل ثم ارسم المنحني (C)

4) l عدد حقيقي ، عيّن بيانيا ، حسب قيم l عدد حلول المعادلة $f(x)=|l|$

التمرين (05) $\boxed{\text{أ}}$ لتكن الدالة f في المتغير الحقيقي x و المعرفة على $]-2;0[\cup]0;+\infty[$بـــ :

$f(x)=1+\frac{\sqrt{x+2}}{x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f .

2/ عيّن إحداثيات A نقطة تقاطع C_f مع حامل محور الفواصل .

3/ بيّن أن المنحني C_f يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلتهما .

4 / اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني C_f في النقطة التي فاصلتها $x_0=-1$.

5/ احسب $f(2)$ ثم ارسم بدقة المماس (Δ) و المنحني C_f و بخاصة نصف المماس في النقطة ذات الفاصلة $x=-2$.

$\boxed{\text{ب}}$نعرف الدالة g في المتغير الحقيقي x حيث : $f(x)=1+\frac{\sqrt{|x|+2}}{|x|}$

1/ عيّن مجموعة التعريف D_g . 2/ ادرس شفعية الدالة g

3/ حدّد المجال I لقيم x بحيث يكون لكل x من I : $g(x)=f(x)$.

4/ ارسم في نفس المعلم و بلون مخالف المنحني البياني (C_g) للدالة g انطلاقا من المنحني (C_f) موضحا بالشرح طريقة رسمه .

التمرين (06) لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$

(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.(وحدة الطول : $2cm$)

الجزء A : لتكن الدالة g المعرفة على ℝ كما يلي : $g(x)=x^3-3x-4$

1) شكل جدول تغيرات الدالة g .

2) بيّن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد a من المجال $\left]2;\dfrac{7}{3}\right[$ و يحقق : $g(a)=0$ ، ثم عيّن قيمة تقريبية له بتقريب 10^{-2} .

3) ادرس إشارة g على ℝ

الجزء B : 1) اوجد D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب النهايات للدالة f عند أطراف D_f.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$

ب - استنتج جدول تغيرات الدالة f

3) أ-أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a,b و c بحيث من اجل كل عدد حقيقي x من D_f

تكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x)=a.x+b+\dfrac{x+c}{x^2-1}$

ب- أستنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار كل من $-\infty$ و $+\infty$ يطلب تعيين معادلته .

ج) ادرس وضعية المنحني (C) بالنسبة للمستقيم (Δ)

د) بيّن أن : $f(a)=\dfrac{3a^2+10a+8}{2a+4}$. ثم عيّن حصرا للعدد $f(a)$ انطلاقا من حصر a

هـ) أنشئ المنحني (C) و المستقيم (Δ) .

التمرين (07) **بكالوريا شعبة تقني رياضي دورة 2010**

f الدالة العددية المعرفة على ℝ كما يلي : $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

وليكن (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- بيّن أن الدالة f فردية

2- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=1+\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$

3- ادرس تغيرات الدالة f

4- اكتب معادلة للمماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

5- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) واستنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

6- بيّن أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحني (C_f) في جوار $+\infty$ ، ثم استنتج معادلة (D') المستقيم المقارب الأخر .

7- ارسم (D)و (D') و (C_f) في المعلم السابق.

8- g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=|x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

أ-بيّن أن الدالة g زوجية .

ب-انطلاقا من (C_f) ارسم (C_g) منحني الدالة g في نفس المعلم السابق .

التمرين (08) f الدالة العددية المعرفةعلى $\mathbb{R}^*$ بالعبارة : $f(x)=\frac{x^3+ax+b}{2x}$

(g) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1/ عين العددين a و b حتى تقبل f قيمة حدية عند -1 قيمتها2

نفرض في كل ما يلي : $a=1$ **و** $b=-2$

2/ ادرس تغيرات الدالة f

3/ احسب : $\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right]$ وماذا تستنتج ؟

4/ اكتب معادلة المماس (T) في النقطة التي فاصلتها $x_0=1$

5/ بيّن أن المماس (T) يقطع المنحني (g) في نقطة M_0 يطلب تعيينها

6/ اثبت ان المنحني (g) يقبل نقطة انعطاف w يطلب تعيينها

7/ مستعينا بالنتائج السابقة ارسم القطع المكافئ الذي معادلته : $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ ثم المماس (T) و المنحني (g)

8/ نعتبر الدالة h حيث : $h:x\to\frac{-x^2|x|-|x|-2}{2x}$

أ- ادرس شفعية الدالة h .

ب- استنتج رسم المنحني (C_h) انطلاقا من رسم المنحني (g)

التمرين (09) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بـــ: $f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) **1/** ادرس تغيرات الدالة f ثم عين المستقيمات المقاربة للمنحني C_f

2/ اكتب معادلة للمماس (D) للمنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة 0

3/ احسب $f(-x)+f(x)$ وماذا تستنتج بالنسبة للمنحني C_f

4/ ادرس الوضع النسبي للمنحني C_f والمستقيم (D) .ماذا تستنتج ؟

5/ بيّن أن المنحني C_f يقطع المستقيم الذي معادلته $y=x$ في نقطة فاصلتها x_0 حيث : $1 < x_0 < 2$

6/ ارسم المنحني C_f .

II) / لتكن الدالة h المعرفة بـــــ: $h(x)=1+\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$ (g') تمثيلها البياني

1/ ادرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة h عند القيمة $x_0 = 0$

2/ بين أن الدالة h زوجية .

3/استنتج رسم المنحني (C_h) انطلاقا من رسم C_f

التمرين (10) الجزء الأول f الدالة العددية: $f(x) = ax + \frac{bx+c}{(x-2)^2}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث المنحني C_f يشمل النقطة $D(3;1)$ وتكون النقطة $E(1;1)$ ذروة للمنحني C_f .

2/ بيّن أن الدالة المعرفة في السؤال 1) هي الدالة : $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 1}{(x-2)^2}$

3/ ادرس تغيرات الدالة f و عيّن معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني C_f

4/ عيّن عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ وبيّن أنه يوجد حل وحيد a في المجال $\left]\frac{5}{2};3\right[$

5/ باستعمال خوارزمية المسح اوجد حصرا للعدد a سعته 0.1

6/ ادرس وضعي المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب المائل

7/ بيّن ان المنحني C_f يقبل مماسا (Δ) يوازي المستقيم المقارب المائل

8/ اثبت ان المنحني C_f يقبل نقطة انعطاف w يطلب تعيينها

9/ ارسم (Δ) و C_f .

10/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = x + m$

الجزء الثاني h الدالة المعرفة كما يلي : $\begin{cases} h(x) = f(x) & x \geq 3 \\ h(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2} & x < 3 \end{cases}$

1/ ادرس استمرارية وقابلية اشتقاق h عند القيمة $x_0 = 3$ ثم فسر النتيجة بيانيا

2 / ادرس تغيرات الدالة h مستعينا بتغيرات الدالة f

3/ ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (C_h) ثم ارسم المنحني (C_h)

التمرين (11) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بـــ: $f(x) = \frac{4x^2 - 11x + 7}{2(x-2)}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة واكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني C_f

2/ برهن أن النقطة A تقاطع المستقيمين المقاربين مركز تناظر للمنحني C_f

3/ احسب إحداثيات نقط تقاطع المنحني مع المحورين الإحداثيين ثم ارسم المنحني C_f

4/ برهن انه يوجد مماسان للمنحني معامل توجيه كل منهما $\frac{3}{2}$

5/ احسب إحداثيات نقطتي التماس B و C لهذين المماسين مع المنحني ثم تحقق من أن النقطتين B و C متناظرتين بالنسبة إلى النقطة A .وعيّن معادلتي المماسين .

6/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=\frac{3}{2}x+m$

6/ نعتبر الدالة العددية (f_m) للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f_m(x)=\frac{4x^2+(m-8)x-m+4}{2(x-2)}$

نسمـــــــي (C_m) المنحني الممثل للدالة (f_m) في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ - بين انه توجد نقطة ثابتة تنتمي إلى جميع المنحنيات (C_m)

ب - ما هو المنحني (C_m) الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيين $\left(\frac{7}{4};0\right)$

التمرين (12) f الدالة العددية على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x-1+\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f .

2/ احسب :$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-3)]$ و $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

3/ بيّن ان النقطة $A\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني C_f .

4/ بين أن المنحني C_f يقبل مماسين T_1 و T_2 ميلهما $\frac{5}{2}$ ثم حدد معادلتيهما.

5/ بيّن أن المنحني C_f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها a حيث : $\frac{5}{6}<a<\frac{1}{2}$

6/ ارسم C_f ثم استنتج إشارة $f(x)$ حسب قيم x .

7/ ناقش بيانيا عدد حلول المعادلة : $f(x)=x+m$ حيث m وسيط حقيقي

التمرين (13) 1 . نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $g(x)=2x-\sqrt{1+x^2}$

- أدرس اتجاه تغير الدالة g.
- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا a يطلب تعيينه. استنتج إشارة g على $\mathbb{R}$.

2. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=2\sqrt{1+x^2}-x$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد.

نعتبر المستقيمين $(D):y=-3x$ و $(D'):y=x$

أ) أدرس نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$. استنتج جدول تغيرات الدالة f.

جـ) أحسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+3x]$. فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها.

د) بين أن المستقيم (D') مستقيما مقاربا للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

هــ) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) و (D'). أرسم (C_f)،(D) و (D').

التمرين (14) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بـــ: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$

1/ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث المنحني (g) تمثيلها البياني يشمل النقطة $D(0;-3)$ وتكون النقطة $E(-1;-2)$ ذروة للمنحني (g) .

2/ بيّن أن الدالة المعرفة في السؤال 1) هي الدالة : $x \to \frac{x^2+3}{x-1}$

- ادرس تغيرات الدالة f واكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (g)

3/ بيّن أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين w مركز تناظر للمنحني (g)

4/ ارسم المنحني (g) في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

5/ لتكن الدالة h المعرفة بـــــ: $h(x)=\frac{x^2+3}{|x-1|}$ تمثيلها البياني (g')

بيّن أن المنحني (g') يستنتج بسهولة من رسم (g) ثم ارسم (g')

التمرين (15) $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد للمستوي ، وحدة الرسم هي $1cm$.

نعتبر الدالة u المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـِ : $u(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ نسمي C تمثيلها البياني .

1. أ ــ عيّن نهاية الدالة u عند $-\infty$.

ب ــ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا : $u(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

- استنتج نهاية الدالة u عند $+\infty$

2. أ ــ بيّن أنّ $[u(x)+2x]$ تؤول إلى 0 عندما x يؤول إلى $-\infty$.

ب ــ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $u(x)>0$. استنتج إشارة $[u(x)+2x]$.

جـــ ــ فسّر هذه النتائج بيانيا .

3 . بيّن أن : $u'(x)=\frac{-u(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة u

4. أرسم C ومستقيمه المقارب المائل

التمرين (16) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=1-x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

وليكن (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ احسب $f'(x)$ ثم استنتج $f'(0)$

2/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $1-(x^2+1)\sqrt{x^2+1}\leq 0$

3/ ادرس تغيرات الدالة f .

4/ أثبت أنه المستقيم : $(D):y=-x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$

5/ أثبت أنه المستقيم : $(D'):y=-x+2$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$

6/ بيّن ان النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر للمنحني C_f

7/ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا a حيث : $\frac{7}{4} < a < 2$

8/ أنشـــــــــئ المنحنـــــــي (C_f)

9/ ناقش بيانيا عدد حلول المعادلة : $f(x)=x+m$ حيث m وسيط حقيقي

التمرين (17) f هي الدالة المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ بـــ : $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1) بين أن الدالة f فردية

2) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

3) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحي (C) عند $+\infty$.

- حدّد وضعية (C) بالنسبة لـــ Δ

4) باستعمال نتيجة السؤال 1) استنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلاً عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

5) ليكن (C') التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ بـــ : $g(x)=-f(x)$

أ) عين المستقيمات المقاربة للمنحني (C').

ب) انطلاقا من المنحنـــــــي (C) استنتج رسم المنحني (C').

التمرين (18) f الدالة العددية المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يأتي : $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

نرمز بـــ (C_f) إلى منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1.أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة : $y=\frac{1}{2}x-1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$

ب-بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ فإن : $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\le 1$

- استنتج وضعية (C_f) بالنسبة لـــ(Δ) على المجال $]1;+\infty[$.

2. احسب : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(h)}{h}$ ثم فسّر هندسيا هذه النتيجة .

3.لتكن الدالة g المعرفة على $]1;+\infty[$ بـــ : $g(x)=x^2\sqrt{x^2-1}-2$

أ- احسب $g(\sqrt{2})$ ، ثم بين أن g متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

ب- استنتج مما سبق إشارة g على المجال $]1;+\infty[$.

4.أ- احسب $f'(x)$ وبين أن $g(x)$ و $f'(x)$ لهما نفس الإشارة على $]1;+\infty[$

ب. ادرس تغيرات f على المجال $]1;+\infty[$ ثم سجل جدول تغيراتها.

جـــ.أنشئ المنحني (C_f)

التمرين (19) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=|x-1|+\frac{x+3}{x-1}$

وليكن (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. اكتب عبارة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .
2. ادرس تغيـــرات الدالـــة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. أثبت أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) في جوار $(+\infty)$ و المستقيم (Δ') الذي معادلته : $y=-x+2$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) في جوار $(-\infty)$
4. اكتب معادلة المماس (T) عند نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع محور التراتيب .
5. أثبت أن المنحنـــي (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها a حيث :
$$\frac{-3}{5}<a<\frac{-1}{2}$$
6. ارسم (C_f) و (T)
7. (Δ_m) مستقيم معادلته : $y=mx-m+1$ حيث m وسيط حقيقي

أ) بين أن جميع المستقيمات (Δ_m) تشترك في نقطة واحدة .

ب) ناقش حسب قيم m عدد حلول المعادلة : $f(x)=mx-m+1$

التمرين (20) نعتبر في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. النقط $A(-1;2)$ ، $B(-1;0)$ ، $C(0;2)$ و $M(x;0)$ حيث $x<-1$ المستقيم (AM) يقطع محور التراتيب في النقطة N .

1. احسب بدلالة x كل من ترتيب النقطة N ومساحات المثلثات OMN ، CAN ، ABM.
2. لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty;-1[$ بـــ: $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ وليكن (C_f) منحنيها في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

أ) بتقسيم المثلث OMN بشكل مناسب عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل x من $]-\infty;-1[$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$

ب) ادرس تغيرات f على المجال $]-\infty;-1[$

جـ) تحقق ان (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D_1) و (D_2) يطلب تحديدهما ثم ارسم (C_f)

د) ما هي قيمة x التي تكون من أجلها مساحة المثلث OMN أصغر ما يمكن ؟

هـ) احسب عندئذ هذه المساحة.

التمرين (21) f الدالة العددية المعرفة على المجموعة : $]-\infty;-4]\cup[0;+\infty[$ كما يلي
$$f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$$
وليكن (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ احسب النهايتين : $\lim_{x\to -4^-}\frac{f(x)+3}{x+4}$ و $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x}$ و فسّر النتائج بيانيا .

2/ احسب : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا

3/ أثبت أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له .

4/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5/ ارسم المنحني (C_f) .

6/ h الدالة العددية المعرفة على المجموعة : $]-\infty;-4]\cup[0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=x+1-\sqrt{x^2+4x}$$

وليكن (C_h) منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) بيّن أن المنحنيين (C_f) و (C_h) متناظرين بالنسبة للنقطة $w(-2;-1)$

ب) نسمي (Γ) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي التي تحقق :

$$y^2-2(x+1)y-2x+1=0$$

-أثبت أن : $(\Gamma)=(C_f)\cup(C_h)$

جـ) ارسم (Γ)

7/ نعتبر الشعاعين $\vec{u}=\vec{i}$ و $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$

-أثبت أن الثلاثية $(w;\vec{u};\vec{v})$: معلما للمستوى ثم اكتب معادلة لــ (Γ) بالنسبة للمعلم $(w;\vec{u};\vec{v})$

الهدية

- **تأمل في هذه المعادلـــة :**

رغبة + إرادة + ممارسة + جهد منظم = متـــعـــة ونجاح بحول الله.

- أود أن أورد أمامك نص رسالة بعث بها بديع الزمان الهمذاني، الذي كان من أئمة عصره في الكتابة، إلى ابن أخت له كان ينفق عليه من ماله ليتعلم. كتب إليه:

" أنت ولدي ما دمت والدفتر أليفك والمحبرة حليفك، فإذا قصّرت، ولا أخالك، فغيري خالك، والسلام ".

- في أهمية اللغات

بقـــــدر لغات المرء يكثر نفعه ... فتلك له عند الملمّات أعوان

فأقبل على درس اللغات وحفظها ... فكل لسان في الحقيقة إنسان! .

قال زيد : أمرني رسول الله ــ صلى الله عليه وسلم ــ فتعلمتُ له كتاب يهود بالسريانية وقال: إني والله ما آمن يهود على كتابي، فما مر لي نصف شهر حتى تعلمته وحذقته، فكنت أكتب له إليهم، واقرأ له كتبهم. (رواه البخاري، وأبو داود والترمذي)

– إذا كنتَ في قومٍ فصاحِب خِيارَهم *** ولا تصحبِ الأردى فتردى مع الرَّدِي

عن المرءِ لا تَسَلْ وسَلْ عن قرينهِ *** فكلُّ قـــريـــنِ بالمقارَن يقتدِي

– لا تكثر السهر المفرط له متاعب كبيرة - **لا تؤجل الحفظ** - **أسرع إلى الحفظ**