تصحيح مادة الرياضيات شعبة الرياضيات بكالوريا 2015

الموضوع الأول

التمرين الأول :

1) أ) لدينا $\overrightarrow{AB}(9;-1;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(3;-2;1)$ بما أن $\frac{-2}{-1} \neq \frac{3}{9}$ و منه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا إذن النقط A و B و C ليست في استقامية.

ب) لدينا $\overrightarrow{AD}(-1;-1;1)$ تكون النقط A و B و C و D من نفس المستوي يعني أوجود عددين حقيقين α و β حيث

$\overrightarrow{AD} = \alpha.\overrightarrow{AC} + \beta.\overrightarrow{AB}$ أي ان $\begin{cases} -1 = 3\alpha + 9\beta \dots .(1) \\ -1 = -2\alpha - \beta \dots .(2) \\ \quad 1 = \alpha - \beta \dots .(3) \end{cases}$ بطرح (2) من (3) نجد $2 = 3\alpha$ و منه $\alpha = \frac{2}{3}$ بالتعويض في (3) نجد ان

$1 = \frac{2}{3} - \beta$ و منه $\beta = -\frac{1}{3}$ بتعويض القيمتين في (1) نجد $-1 = 3\left(\frac{2}{3}\right) + 9\left(\frac{-1}{3}\right)$ و منه $-1 = 2 - 3$ صحيحة و منه النقط من نفس المستوي .

ج)مما سبق نجد $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}.\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}.\overrightarrow{AB}$ و منه D مرجح النقط A و B و C المرفقة بالمعاملات 2 و -1 و 2 على الترتيب .

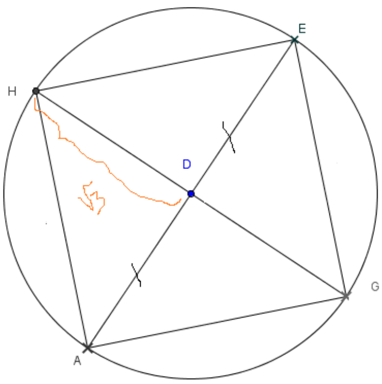
د)تعيين إحداثيات $E(x;y;z)$ نظيرة A بالنسبة D أي أن $\overrightarrow{ED} = -\overrightarrow{AD}$ و منه $\begin{cases} -x = 1 \\ 4 - y = 1 \\ 5 - z = -1 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 6 \end{cases}$ و منه $E(-1;3;6)$.

هـ)كتابة المعادلة الديكارتية للمستوي المحوري للقطعة $[AE]$ و منه شعاعه الناظيمي $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AE}(-2;-2;2)$ المعادلة من الشكل $-2x - 2y + 2z + d = 0$ و هو يشمل منتصف القطعة $[AE]$ أي ان $-2\left(\frac{-1+1}{2}\right) - 2\left(\frac{3+5}{2}\right) + 2\left(\frac{6+4}{2}\right) + d = 0$ و منه $0 - 8 + 10 + d = 0$ و منه $d = -2$. و منه $-2x - 2y + 2z - 2 = 0$ إذن $x + y - z + 1 = 0$.

2) تعين مجموعة النقط M حيث $\|3\overrightarrow{MD} - 3\overrightarrow{MA}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\|$ يكافئ $\|3\overrightarrow{AD}\| = \|3\overrightarrow{MD}\|$ لأن D مرجح الجملة $\{(C;2);(B;\ -1);(A\,;2)\}$ و منه $MD = AD$ مجموعة النقط سطح كرة مركزها D و نصف قطرها $AD = \sqrt{3}$.

3) أ) لدينا $F(1;8;10)$ نعويض الاحداثيات في المعادلة $(p): x + y - z + 1 = 0$ و منه $1 + 8 - 10 + 1 = 0$ محققة .

ب)الرباعي $AGEH$ مربع و مساحته $S_{AGEH} = 4\left(\frac{1}{2}DA^2\right) = 2 \times 3 = 6$ و لك الشكل التوضيحي



4) أ) لدينا $\overrightarrow{AC}(3;-2;1)$ و $\overrightarrow{AE}(-2;-2;2)$

و $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC} = -6 + 4 + 2 = 0$ و منه $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان

و $\overrightarrow{FD}(-1;-4;-5)$ مرتبط خطيا مع الشعاع $\overrightarrow{DH}$ و النقطتان D و H من المستوي (AEH) و

$\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{AC} = -3 + 8 - 5 = 0$ و منه $\overrightarrow{DH}$ عمودي على $\overrightarrow{AC}$ و منه $\overrightarrow{AC}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطان خطيا من مستوي (AEH) فهو شعاع ناظيمي لهذا المستوي.

ب)لدينا $N(3t;4-2t;5+t)$ و منه $\overrightarrow{DN}(3t;-2t;\ t)$ و $\overrightarrow{AC}(3;-2;1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و الشعاعان مرتبطان خطيا من اجل كل عدد حقيقي t و منه N تنتمي إلى (Δ) .

ج)المجسم $NAGEH$ هو مخروط (تصوره برفع النقطة D للأعلى يشبه الخيمة) حجمه هو ثلث مساحة القاعدة في الارتفاع :

$u.v$ $v(t) = \frac{1}{3}S_{AGEH} \times DN = \frac{6}{3} \times \sqrt{(3t)^2 + (-2t)^2 + (t)^2} = 2|t|\sqrt{14}$ و هو المطلوب

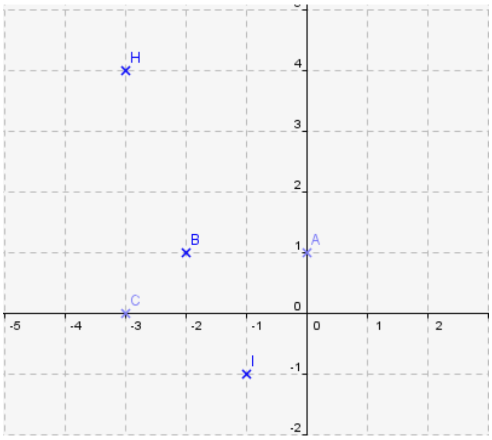
د)تعيين N_1 , N_2 .

$v(t) = 2\sqrt{3}$ يعني ان $2|t|\sqrt{14} = 2\sqrt{3}$ و منه $|t| = \sqrt{\frac{3}{14}}$ إذن $t = \sqrt{\frac{3}{14}}$ او $t = -\sqrt{\frac{3}{14}}$ و منه

و $\mathrm{N}_1\left(3\sqrt{\frac{3}{14}};4-2\sqrt{\frac{3}{14}};5+\sqrt{\frac{3}{14}}\right)$ و $\mathrm{N}_2\left(-3\sqrt{\frac{3}{14}};4+2\sqrt{\frac{3}{14}};5-\sqrt{\frac{3}{14}}\right)$.

التمرين الثاني :

1) أ) تعليم النقط



ب)لدينا $\frac{1+i}{2}=-\frac{-3+2-i}{i+2-i}=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ و منه $\left|\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و هي نسبة التشابه و $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=\frac{5\pi}{4}$.هي زاوية و نسبة التشابه الذي يحول A إلى C و مركزه B .

2) تعيين z_G لاحقة مركز ثقل المثلث ABC لدينا $z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{i-2+i-3}{3}=\frac{-5+2i}{3}=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}i$.

3)أ) الكتابة على الشكل الجبري $\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}=\frac{-2+i+3}{-3+4i-i}=\frac{1+i}{-3+3i}=-\frac{1}{3}\frac{(1+i)^2}{2}=-\frac{1}{3}i$.

ب)مما سبق نستنتج أن $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{CB}\right)=\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}\right)=-\frac{\pi}{2}$ و منه المستقيمين (AH) و (CB) متعامدان .

ج)لدينا $\frac{z_A-z_C}{z_H-z_B}=\frac{i+3}{-3+4i+2-i}=\frac{3+i}{-1+3i}=\frac{-i(-1+3i)}{(-1+3i)}=-i$ و منه $\left(\overrightarrow{BH},\overrightarrow{CA}\right)=\arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_H-z_B}\right)=-\frac{\pi}{2}$ و منه المستقيمين (BH) و (CA) متعامدان أي ان H تنتمي للارتفاع المتعلق بالرأس B في المثلث ABC و لدينا مما سبق المستقيمين (AH) و (CB) متعامدان يعني ان H تنتمي للارتفاع المتعلق بالرأس A في المثلث ABC و منه فهي نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلث ABC .

4)لدينا $z_H-z_I=-3+4i+1+i=-2+5i$ و $z_H-z_G==-3+4i+\frac{5}{3}-\frac{2}{3}i=-\frac{4}{3}+\frac{10}{3}i=\frac{2}{3}(=-2+5i)$

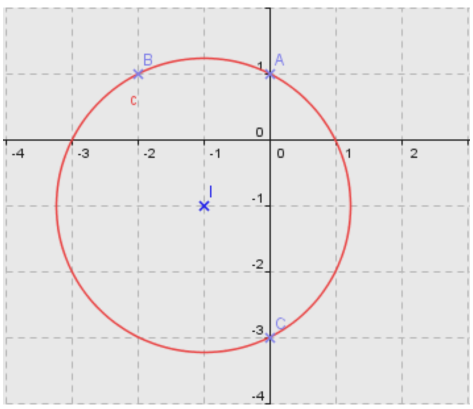
و منه $\overrightarrow{GH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{IH}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{IH}$ و $\overrightarrow{GH}$ مرتبطان خطيا يعني ان النقط H و G و I في استقامية .

5)أ)(Γ)هي مجموعة النقط $M(z)$ حيث $z+1+i=\sqrt{5}e^{i\theta}$ و $\theta\in\mathbb{R}$

$A\epsilon(\Gamma)$ يعني أنه يوجد عدد حقيقي θ حيث $|z_A+1+i|=\left|\sqrt{5}e^{i\theta}\right|=\sqrt{5}$ و لدينا $z_A+1+i=1+2i$ و منه $|z_A+1+i|=\sqrt{5}$ و منه محققة .

ب)لدينا $|z+1+i|=\sqrt{5}$ أي أن $MI=\sqrt{5}$ و منه مجموعة النقط (Γ) هي الدائرة ذات المركز I و نصف القطر $\sqrt{5}$.

ج) إنشاء (Γ)



د) لدينا $|z_B+1+i|=|-2+i+1+i|=|-1+2i|=\sqrt{5}$ و منه B تنتمي إلى(Γ)

و$|z_C+1+i|=|-3+1+i|=|-2+i|=\sqrt{5}$ و منه C تنتمي إلى(Γ) .

التمرين الثالث :

1) أ) تعيين بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7 لدينا $2^3 \equiv 1[7]$, $2^2 \equiv 4[7]$, $2^1 \equiv 2[7]$, $2^0 \equiv 1[7]$ و منه بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7 تشكل متتالية دورية و دورها 3

و منه باقي قسمة 2^n على 7 : هو 1 لما $n = 3k$ و هو 2 لما $n = 3k + 1$ و هو 4 لما $n = 3k + 2$.

ب) لدينا $1962 \equiv 2[7]$ و منه $1962^{1954} \equiv 2^{1954}[7]$ و بما ان $1954 = 3 \times 651 + 1$ فإن $1962^{1954} \equiv 2[7]$

و لدينا $1954 \equiv 1[7]$ و منه $1954^{1962} \equiv 1[7]$ و $2015 \equiv 6[7]$ و $6 \equiv -1[7]$ و منه $2015 \equiv -1[7]$ إذن منه $2015^{53} \equiv -1[7]$ لان الأس فردي .

بالجمع نجد $1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53} \equiv 2 - 1 - 1[7]$ و منه $962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53} \equiv 0[7]$ الباقي المطلوب 0.

2) أ)بما أن 89 لا يقبل القسمة على الأعداد 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و لدينا $11^2 = 121$ فإن العدد 89 أولي .

ب) لدينا $7832 = 2^3 \times 11 \times 89$ و منه عدد القواسم الطبيعية المطلوبة هو $16 = (1+1)(1+1)(3+1)$ و

هي $\begin{cases} 2^0 \times 11^0 \times 89^0 = 1 \\ 2^1 \times 11^0 \times 89^0 = 2 \\ 2^2 \times 11^0 \times 89^0 = 4 \\ 2^3 \times 11^0 \times 89^0 = 8 \end{cases}$ و $\begin{cases} 2^0 \times 11 \times 89^0 = 11 \\ 2^1 \times 11 \times 89^0 = 22 \\ 2^2 \times 11 \times 89^0 = 44 \\ 2^3 \times 11 \times 89^0 = 88 \end{cases}$ و $\begin{cases} 2^0 \times 11^0 \times 89 = 89 \\ 2^1 \times 11^0 \times 89 = 178 \\ 2^2 \times 11^0 \times 89 = 356 \\ 2^3 \times 11^0 \times 89 = 712 \end{cases}$ و $\begin{cases} 2^0 \times 11 \times 89 = 979 \\ 2^1 \times 11 \times 89 = 1958 \\ 2^2 \times 11 \times 89 = 3916 \\ 2^3 \times 11 \times 89 = 7832 \end{cases}$

و منه قواسم 7832 هي 1 و 2 و 4 و 8 و 11 و 22 و 44 و 88 و 89 و 178 و 356 و 712 و 979 و 1958 و 3916 و 7832 .

ج) نضع $d = PGCD(977 ,981)$ و منه d قاسم للعددين 977 و 981 فهو قاسم للعدد $4 = 981 - 977$ و قواسم 4 هي 1 و 2 و 4 و 2 و 4 ليسا قاسمين للعددين 977 و 981 و منه القاسم المشترك الأكبر للعددين هو 1 و منه العددان اوليان فيما بينهما .

3) لدينا $\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases}$ و $PGCD(x ,y) = 2$ نضع $\begin{cases} x = 2x' \\ y = 2y' \end{cases}$ حيث $PGCD(x' ,y') = 1$ نعوض في الجملة نجد

$\begin{cases} 4x'^2 - 4y'^2 = 31328 \\ 2x' - 2y' \equiv 8[22] \end{cases}$ وهذا يعني ان $\begin{cases} x'^2 - y'^2 = 7832 \\ x' - y' \equiv 4[11] \end{cases}$ أي ان $\begin{cases} (x' + y')(x' - y') = 7832 \\ x' - y' \equiv 4[11] \end{cases}$ يعني ان

$(x' - y')$ و $(x' + y')$ قاسمين لـ 7832 و باقي قسمة $x' - y'$ على 11 هو 4 أي ان $\begin{cases} x' - y' = 4 \text{ و } x' + y' = 1958 \\ x' - y' = 356 \text{ و } x' + y' = 22 \end{cases}$

$\begin{cases} x' - y' = 4 \\ x' + y' = 1958 \end{cases}$ بالجمع نجد $2x' = 1962$ و منه $x' = 981$ و $y' = 977$.

$\begin{cases} x' - y' = 356 \\ x' + y' = 22 \end{cases}$ بالجمع نجد $2x' = 378$ و منه $x' = 189$ و $y' = -167$ مرفوض لان العددين طبيعين

بالتعويض نجد $\begin{cases} x = 981 \times 2 = 1962 \\ y = 977 \times 2 = 1954 \end{cases}$.

4) أ) مبرهنة بيزو لدينا a أولي مع b يعني انه يوجد عددين صحيحين α و β حيث $\alpha a + \beta b = 1 \ldots\ldots\ldots(1).$

a أولي مع c يعني انه يوجد عددين صحيحين α' و β' حيث $\alpha' a + \beta' c = 1 \ldots\ldots(2)$

بضرب (1) في (2) فنجد $(\alpha a + \beta b)(\alpha' a + \beta' c) = 1$ اي ان

$\alpha\alpha' a^2 + \alpha a\beta' c + \beta b\alpha' a + \beta b\beta' c = 1$ و منه $\left(\alpha\alpha' a + \alpha\beta' c + \beta b\alpha'\right) a + \beta\beta' bc = 1$ و منه حسب نظرية بيزو العددين a و $b \times c$ أوليان فيما بينهما .

ب)البرهان بالتراجع : التحقق $PGCD(a ; b) = 1$ محققة نفرض ان $PGCD(a ; b^n) = 1$ و لنبرهن $PGCD(a ; b^{n+1}) = 1$

$PGCD(a ; b^n) = 1$ و $PGCD(a ; b) = 1$ فحسب ما سبق فإن $PGCD(a ; b \times b^n) = 1$ و منه $PGCD(a ; b^{n+1}) = 1$ و منه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $PGCD(a ; b^n) = 1$.

ج) استنتاج $PGCD(1954\,;1962)=2.PGCD(977\,;981)=2$

و منه نجد $PGCD(1954^{1962}\,;1962^{1954})=PGCD(2^{1962}\times 977^{1962}\,;2^{1954}\times 981^{1954}).$

$PGCD(1954^{1962}\,;1962^{1954})=2^{1954}PGCD(2^{8}\times 977^{1962}\,;981^{1954})$ و بما ان $PGCD(977;981)=1$ فحسب ب) فإن

$PGCD(977^{1962}\,;981^{1954})=1$ و بما ان $PGCD(2;981)=1$ فحسب ب) فإن $PGCD(2^{8};981^{1954})=1$ فحسب أ) نجد أن

$PGCD(2^{8}\times 977^{1962}\,;981^{1954})=1$ إذن $PGCD(1954^{1962}\,;1962^{1954})=2^{1954}$

التمرين الرابع :

1) أ)دراسة استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين لدينا و منه $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(1-x^{2}\ln x)=1$ الدالة مستمرة عند 0 لأن $f(0)=1$

ب) حساب : و منه $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{f(x)-1}{x}\right]=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{-x^{2}\ln x}{x}\right]=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}[-x\ln x]=0$ و منه المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 0 موازي لحامل محور التراتيب.

2) أ) حساب . $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x^{2}\ln x)=-\infty$ +∞

ب)دراسة تغيرات الدالة f المشتقة $f'(x)=-2x\ln x-x^{2}\times\frac{1}{x}=-x(2\ln x+1)$. اشارتها من اشارة $-(2\ln x+1)$

$-(2\ln x+1)=0$ يكافئ ان $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

$-(2\ln x+1)>0$ يكافئ أن $x<\frac{1}{\sqrt{e}}$ و منه f متزايدة على المجال $\left[0\,;\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ و متناقصة على المجال الباقي و هو $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}\,;+\infty\right[$.

جدول التغيرات

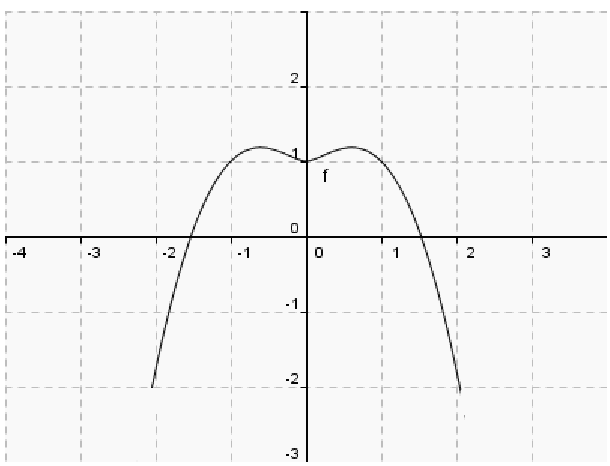
x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	$1+\frac{1}{2e}$	↘	$-\infty$

3) أ) بما أن الدالة f مستمرة و متناقصة على $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}\,;+\infty\right[$ و تغير إشارتها على هذا المجال و لا تغير إشارتها على المجال $\left[0\,;\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ فحسب نظرية القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا αعلى المجال $[0\,;+\infty[$.

ب) لدينا $f(1{,}531)=0{,}001658$ و $f(1{,}531)=-0{,}00118$ و منه $1{,}531<\alpha<1{,}532$ . .

4) أ) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=g(x)$ و منه g دالة زوجية .

ب)المنحنى (C_g) :



5)المكاملة بالتجزئة :

لدينا $\int_1^x t^2 lnt d\,t = \left[\frac{1}{3}t^3 lnt\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{3}t^3 \times \frac{1}{t}dt = \frac{1}{3}x^3 lnx - \left[\frac{1}{9}t^3\right]_1^x = \frac{1}{3}x^3 lnx - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9}$

و من الدالة الأصلية المطلوبة هي $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 lnx - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9}$.

6)أ) كتابة عبارة $F(t)$ و منه

أي ان $F(t) = \int_t^\alpha f(x)dx = \int_t^\alpha (1 - x^2 lnt)dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3 lnx + \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}\right]_t^\alpha$

و منه $F(t) = \alpha - \frac{1}{3}\alpha^3 ln\alpha + \frac{1}{9}\alpha^3 - t + \frac{1}{3}t^3 lnt - \frac{1}{9}t^3$.

ب) لدينا $F(t) = \alpha - \frac{1}{3}\alpha^3 ln\alpha + \frac{1}{9}\alpha^3 - t + \frac{1}{3}t^3 lnt - \frac{1}{9}t^3$ و منه $F(t) = \frac{9\alpha - 3\alpha^3 ln\alpha + \alpha^3 - 9t + 3t^3 lnt - t^3}{9}$

أي ان $F(t) = \frac{9\alpha - 3\alpha^3 ln\alpha + \alpha^3 - 3t(1 - t^2 lnt) - 6t - t^3}{9} = \frac{-t.f(t) - 6t - t^3 + 9\alpha - 3\alpha^3 ln\alpha + \alpha^3}{9}$ و لدينا

$f(\alpha) = 0$ يعني أن $1 - \alpha^2 ln(\alpha) = 0$ و منه $ln(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2}$ و منه $= \frac{-t.f(t) - 6t - t^3 + 9\alpha - 3\alpha^3\frac{1}{\alpha^2} + \alpha^3}{9}$ $F(t)$

و منه $F(t) = \frac{-t.f(t) - t^3 - 6t + \alpha^3 + 6\alpha}{9}$ و هو المطلوب .

ج) حساب النهاية :

$$\lim_{\substack{> \\ t \to 0}} F(t) = \frac{\alpha^3 + 6\alpha}{9}$$

7) لدينا $\delta(m) = \pi m^2$ و $A = \frac{2}{9}(\alpha^3 + 6\alpha).ua$ أ) تكون $\delta(m) = 2A$ يعني ان $\pi m^2 = \frac{4}{9}(\alpha^3 + 6\alpha)$ أي أن $m = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{\pi}(\alpha^3 + 6\alpha)}$

ب) حصر m لدينا $3{,}140 < \pi < 3{,}142$ بالقلب نجد $\frac{1}{3{,}142} < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{3{,}140} \ldots.(1)$ و $1{,}531 < \alpha < 1{,}532$ و منه نجد

. $9{,}186 < 6\alpha < 9{,}192$ و $3{,}588604 < \alpha^3 < 3{,}595641$ بجمع المتباينتين نجد $12;7764 < \alpha^3 + 6\alpha < 12{,}78764 \ldots.(2)$

و بضرب (1) في (2) نجد $4{,}069905 < \frac{1}{\pi}(\alpha^3 + 6\alpha) < 4{,}072497$ بالجذر نجد $2{,}0174 < \sqrt{\frac{1}{\pi}(\alpha^3 + 6\alpha)} < 2{,}018043$

بالضرب في $\frac{2}{3}$ نجد $1{,}344964 < m < 1{,}345362$ و هو المطلوب.

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1) الحد العام للمتتالية العددية المعرفة بـ $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$ هو أ) $u_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$

لأن $u_0 = -3 + 6 = 3$ و $u_{n+1} = -3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 6 = \frac{1}{2}\left[-3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6\right] + 3 = \frac{1}{2}u_n + 3$ محققة .

2) لدينا $|iz - 1 - i| = 3$ يعني ان $|i(z + i - 1)| = 3$ و منه $|z + i - 1| = 3$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z هي دائرة مركزها ذو اللاحقة $1 + i -$ و نصف قطرها 3 إذن ب) صحيحة .

3) لدينا $\overline{abcd}$ يقبل القسمة على 11 يعني أن $\overline{abcd} \equiv 0[11]$ أي ان $1000a + 100b + 10c + d \equiv 0[11]$ و لدينا $10 \equiv -1[11]$ و $100 \equiv 1[11]$ و $1000 \equiv -1[11]$ و منه $-a + b - c + d \equiv 0[11]$ و منه بالضرب في -1 نجد $a - b + c - d \equiv 0[11]$ أي ان $a - b + c - d$ مضاعف للعدد 11 إذن أ) صحيحة .

4) لدينا $\begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}t - k \\ y = 2 - t + \frac{3}{2}k \\ z = -3 + 4t - 6k \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}\left(t - \frac{3}{2}k\right) \\ y = 2 - \left(t - \frac{3}{2}\right) \\ z = -3 + 4\left(t - \frac{3}{2}k\right) \end{cases}$ و هذا يكافئ $\begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}\alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = -3 + 4\alpha \end{cases}$ و التمثيل الوسيطي لمستقيم الذي شعاع توجيهه $\vec{v}\left(\frac{2}{3}; -1; 4\right)$ و مرتبط خطيا مع $\vec{u}\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; -2\right)$ و يمر من النقطة $A(1; 2; -3)$ و منه ب) صحيحة .

التمرين الثاني :

1) حل المعادلة $z^2 - 2(1 - \sqrt{3})z + 8 = 0$ نحسب المميز

$\Delta = \left[-2(1 - \sqrt{3})\right]^2 - 4 \times 8 = 4(4 - 2\sqrt{3}) - 32 = 4(4 - 2\sqrt{3} - 8) = -4(4 + 2\sqrt{3})$ و منه

أي ان $\Delta = -4(1 + \sqrt{3})^2 = \left[2i(1 + \sqrt{3})\right]^2$ المعادلة تقبل حلين هما $z_0 = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$ و

$z_1 = (1 - \sqrt{3}) - i(1 + \sqrt{3})$.

2) أ) لدينا $\frac{z_B}{z_A} = \frac{\overline{z_A}}{z_A} = \frac{(\overline{z_A})^2}{|z_A|^2} = \frac{(1-\sqrt{3})^2 - (1+\sqrt{3})^2 - 2i(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})^2 + (1+i\sqrt{3})^2} = \frac{-4\sqrt{3} + 4i\sqrt{3}}{8}$

$\frac{z_B}{z_A} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ و منه $\left|\frac{z_B}{z_A}\right| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$ و $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$

حيث $\theta = arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)$ و منه $\theta = -\frac{7\pi}{6}$ و منه $\frac{z_B}{z_A} = e^{-\frac{7\pi}{6}i}$.

ب)تعيين عمدة z_A : $arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = arg(z_B) - arg(z_A) = arg(\overline{z_A}) - arg(z_A) = -2arg(z_A)$ و $arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = -\frac{7\pi}{6}$

و منه $-2arg(z_A) = -\frac{7\pi}{6}$ إذن $arg(z_A) = \frac{7\pi}{12}$.

ج) استنتاج القيمتين المضبوطين لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$|z_A| = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ و منه $\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$.

3) أ) حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة $7x - 2y = 1$ لدينا $\begin{cases} 7x - 2y = 1 \\ 7(1) - 2(3) = 1 \end{cases}$ بالطرح نجد $7(x-1) = 2(y-3)$ بما ان 7 و 2 أوليان فيما بينهما حسب نظرية غوس 7 قاسم لــ $(y-3)$ و 2 قاسم لـ $(x-1)$ و منه $k \, \varepsilon \, \mathbb{Z}$: $\begin{cases} x - 1 = 2k \\ y - 3 = 7k \end{cases}$ و منه $k \, \varepsilon \, \mathbb{Z}$: $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 3 + 7k \end{cases}$ حلول المعادلة .

ب) لدينا $7x - 24y = 12$ يكافئ $7x = 24y + 12$ أي ان $7x = 12(2y+1)$ و بما ان 7 و 12 اوليان فيما بينهما فإن 12 قاسم لــ x او بمعنى أخر x مضعف للعدد 12.

ج) لدينا مما سبق $k' \, \varepsilon \, \mathbb{Z}$: $x \equiv 12k'$ بالتعويض في المعادلة نجد $7(12k') - 24y = 12$ و منه $7k' - 2y = 1$ من السؤال 3) نجد ان $k \, \varepsilon \, \mathbb{Z}$: $\begin{cases} k' = 1 + 2k \\ y = 3 + 7k \end{cases}$ و منه $k \, \varepsilon \, \mathbb{Z}$: $\begin{cases} x' = 12(1+2k) \\ y = 3 + 7k \end{cases}$ أي ان $k \, \varepsilon \, \mathbb{Z}$: $\begin{cases} x' = 12 + 24k \\ y = 3 + 7k \end{cases}$ الحلول.

د) لدينا $\frac{7\pi}{12} n = n.argz_A$ و $arg(z_A{}^n) = n.argz_A$ و $(z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا يعني ان عمدته هي من الشكل $\pi + 2\pi\alpha$ و α عدد صحيح أي ان

$\frac{7\pi}{12} n = \pi + 2\pi\alpha$ بالضرب في $\frac{12}{\pi}$ نجد $7n = 12 + 24\alpha$ أي ان $7n - 24\alpha = 12$ و منه $(n:\alpha)$ حلول للمعادلة

$7x - 24y = 12$ إذن مما سبق نجد ان $n = 12 + 24k$ و $k \, \varepsilon \, \mathbb{N}$ . .

التمرين الثالث :

1) لدينا (Δ_1) شعاع توجيهه هو $\vec{u}(-1\,;2\,;-1)$ و يشمل $A(2;0;0)$ و منه تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x = 2 - m \\ y = 2m \\ z = -m \end{cases}$ و (Δ_2) تمثيله الوسيطي هو $\begin{cases} x = -3 - 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 7 + 3t \end{cases}$ نساوي بينهما نجد $\begin{cases} -3 - 3t = 2 - m \\ 2 + 2t = 2m \\ 7 + 3t = -m \end{cases}$ أي ان $\begin{cases} m = 5 + 3t \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 2 + 2t = 2(5 + 3t) \ldots\ldots (2) \\ 7 + 3t = -m \ \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$ و منه $2 + 2t = 2(5+3t)$ أي ان $-4t = 8$ و منه $t = -2$ بالتعويض في (1) نجد $m = -1$ و بتعويض القيمتين في (3) نجد $1 = (-2)3 + 7$ محققة و منه نقطة التقاطع $C(3;-2;1)$.

2) لدينا (d) مستقيم شعاع توجيهه $\vec{v}(2;5;3)$ و (Δ_1) شعاع توجيهه هو $\vec{u}(-1\,;2\,;-1)$ بما ان $\vec{v}$ و $\vec{u}$ غير مرتبطان خطيا لان $\frac{2}{-1} \neq \frac{5}{2}$

و منه (d) و (Δ_1) غير متوازيان. و (Δ_1) تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x = 2 - m \\ y = 2m \\ z = -m \end{cases}$ و (d) تمثيله الوسيطي هو $\begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = -5 + 5\alpha \\ z = -1 + 3\alpha \end{cases}$ بالمساواة بينهما نجد

$\begin{cases} 2 - m = -1 + 2k \\ 2m = -5 + 5k \\ -m = -1 + 3k \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 2 - m = -1 + 2\alpha \ldots . (4) \\ 2m = -5 + 5\alpha \ldots . \ldots (5) \\ m = 1 - 3\alpha \ldots\ldots\ldots . (6) \end{cases}$ و منه $2 - 6\alpha = -5 + 5\alpha$ أي ان $11\alpha = 3$ و منه $\alpha = \frac{7}{11}$ بالتعويض في (6) و منه $m = 1 - \frac{21}{11} = -\frac{10}{11}$ بتعويض القيمتين في (4) نجد $2 + \frac{10}{11} = -1 + 2\frac{7}{11}$ أي ان $\frac{32}{11} = \frac{3}{11}$ غير صحيحة و منه المستقيمان (d) و (Δ_1) ليسا من نفس المستوي .

3) أ)التمثيل الوسيطي للميتوي (p) الذي يشمل المستقيمين (Δ_1) و(Δ_2) . و(Δ_1) شعاع توجيهه هو$\vec{u}(-1\,;2\,;-1)$ و (Δ_2) تمثيله الوسيطي هو $\begin{cases} x = -3 - 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 7 + 3t \end{cases}$ و المستوي (p) يشمل $C(3;-2;1)$ و منه التمثيل الوسيطي لــ (p) هو $\begin{cases} x = 3 - 3t - m \\ y = -2 + 2t + 2m \\ z = 1 + 3t - m \end{cases}$ حيث t و m عددان حقيقيان .

ب) لدينا التمثيل الوسيطي للمستوي (p) هو $\begin{cases} x = 3 - 3t - m \\ y = -2 + 2t + 2m \\ z = 1 + 3t - m \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 4x = 12 - 12t - 4m \\ 3y = -6 + 6t + 6m \\ 2z = 2 + 6t - 2m \end{cases}$ بالجمع نجد $4x + 3y + 2z = 8$

و منه المعادلة الديكارتية للمستوي (p) هي $4x + 3y + 2z - 8 = 0$.

ح) لدينا $\overrightarrow{BC}(4;3;2)$ هو شعاع ناظيمي للمستوي (p) و C نقطة من المستوي لأنها نقطة تقاطع (Δ_1) و(Δ_2) و منه C هي المسقط العمودي لـ B على المستوي (p) .

4) أ) $I(-1+2\alpha;-5+5\alpha;-1+3\alpha)$ نقطة من (d) و $D(-3-3t;2+2t;7+3t)$ نقطة من (Δ_2) و $A(2;0;0)$ نقطة من (Δ_1) تكون I و A وD في استقامية يعني أن I هي نقطة تقاطع المستوي (p) والمستقيم (d) نعويض إحداثيات I في المعادلة الديكارتية للمستوي نجد

$4(-1+2\alpha)+3(-5+5\alpha)+2(-1+3\alpha)-8=0$ و منه $29\alpha=29$ و منه $\alpha=1$ و منه $I(1;0;2)$ و $\overrightarrow{AI}(-1;0;2)$ و $\overrightarrow{AD}(-5-3t;2+2t;7+3t)$ مرتبطان خطيا يعني ان $2+2t=0$ و منه $t=-1$ و منه $\overrightarrow{AD}(-2\ ;\ 0\ ;\ 4)$

و منه $D(0\ ;\ 0\ ;4)$.

ب) مما سبق لدينا $D(0\ ;\ 0\ ;4)$ و $A(2;0;0)$ و منه منتصف $[AD]$ احداثياتها $\left(\frac{2+0}{2};\frac{0+0}{2};\frac{0+4}{2}\right)$ أي ان $(1;0;2)$ و هي احداثيات I و هو المطلوب .

5) k مرجح الجملة المثقلة $\{(B;1)\,;(I\,;2)\}$ و I منتصف $[AD]$ و منه k مرجح الجملة المثقلة $\{(B;1)\,;(A\,;1);(D;1)\}$ و منه k مركز ثقل المثلث ABD و مسقط النقطة B على المستوي (p) هي C و منه مسقط العمودي للمثلث ABD على(p) هو المثلث ACD و G المسقط العمودي لـ k على المستوي (p) إذن G مركز ثقل المثلث ACD و منه G مرجح الجملة $\{(C;1)\,;(A\,;1);(D;1)\}$.

ب)و منه $G\left(\frac{2+0+3}{3};\frac{0+0-2}{3};\frac{0+4+1}{3}\right)$ أي ان $G\left(\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\ ;\frac{5}{3}\right)$.

التمرين الرابع :

1) دراسة استمرارية f عند 0 من اليسار $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}(x-1)e^{\frac{1}{x}}=0=f(0)$

و منه الدالة مستمرة على يسار 0.

2) حساب النهاية بوضع $X=\frac{1}{x}$ نجد انه لما x يؤول إلى 0 بقيم أصغر فإن X يؤول إلى $-\infty$

$$\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}=\lim_{X\to-\infty}(1-X)e^{X}=\lim_{X\to-\infty}-e.\left[(X-1)e^{X-1}\right]=\quad 0$$

و منه المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 0 موازي لحامل محور الفواصل .

3) أ)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{\frac{1}{x}}=-\infty$$

ب)دراسة تغيرات الدالة f المشتقة $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}-\frac{x-1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}}=\frac{e^{\frac{1}{x}}(x^2-x+1)}{x^2}$ و هي موجبة على المجال $]-\infty\,;0]$ لأن

x^2-x+1 موجب لان مميزها موجب و الباقي موجب أي x^2 و $e^{\frac{1}{x}}$ على المجال السابق و منه الدالة متزايدة على هذا المجال.

جدول تغيراتها

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ 0
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ 0

4) أ) بوضع بوضع $X=\frac{1}{x}$ نجد انه لما x يؤول إلى $-\infty$ فإن X يؤول إلى 0 بقيم أصغر

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=\lim_{X\overset{<}{\to}0}\left[\left(\frac{1}{X}-1\right)e^{X}-\frac{1}{X}\right]=\lim_{X\overset{<}{\to}0}\left[\left(\frac{e^{X}-1}{X}\right)-e^{X}\right]=0$$ لأن

$$\lim_{X\overset{<}{\to}0}\left(\frac{e^{X}-1}{X}\right)=\lim_{X\overset{<}{\to}0}e^{X}=1$$

ب) مما سبق نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) جهة $-\infty$.

5) أ) حساب النهاية

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$$

ب) دراسة تغيرات الدالة g المشتقة

$$g'(x)=\frac{x.f'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{x\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}(x^2-x+1)}{x^2}\right)-e^{\frac{1}{x}}(x-1)}{x^2}=\frac{e^{\frac{1}{x}}(x^2-x+1)-e^{\frac{1}{x}}(x-1)x}{x^3}=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$$

و هي سالبة على المجال $]-\infty\,;0[$ و منه الدالة g متناقصة على هذا المجال .

جدول تغيراتها

x	$-\infty$ 0
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	1 ↘ 0

6)أ)من جدول تغيرات الدالة g نستنتج ان 1 حاد من الأعلى لـ g و منه من أجل كل عدد حقيقي من$]-\infty\,;0[$ فإن $g(x)<1$ و منه $\frac{f(x)}{x}<1$

إذن $f(x)>x$ لان x سالب و هو المطلوب .

ب)مما سبق نجد ان (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty\,;0[$

ج) رسم المنحنى

7)أ)تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<0$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0<0$ أي ان $-3<0$ محققة

نفرض ان $u_n<0$ و لنبرهن ان $u_{n+1}<0$

لدينا $u_{n+1}=f(u_n)$ أي ان $u_{n+1}=(u_n-1)e^{\frac{1}{u_n}}$

بما ان $u_n<0$ فإن (u_n-1) سالب و $e^{\frac{1}{u_n}}$ موجب و منه u_{n+1} سالبة

أي أن $u_{n+1}<0$ محققة و منه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n<0$

ب) لدينا مما سبق في دراسة الدالة $f(x)>x$ و منه $f(u_n)>u_n$ أي أن $u_{n+1}>u_n$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة .

ج)المتتالية (u_n) محدود من الأعلى و متزايدة فهي متقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) و المنصف الأول $lim(u_n)=0$.

8)أ) حساب : $h'(x)=e^{\frac{1}{x}}+x\left(\frac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}-m.$ و منه $h'(x)=\left[1-\frac{1}{x}\right]e^{\frac{1}{x}}-m$

ب) $h'(x)=0$ يعني ان $\left[1-\frac{1}{x}\right]e^{\frac{1}{x}}=m$ أي ان $\frac{f(x)}{x}=m$ أي ان $f(x)=mx$ حلولها هي فواصل نقاط تقاطع $\left(C_f\right)$ مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=mx$

لما $m\geq 1$ فإن $\left(C_f\right)$ و (Δ_m) لا يتقاطعان إذن المعادلة $h'(x)=0$ ليس لها حلول .

لما $m<1$ فإن $\left(C_f\right)$ و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه المعادلة $h'(x)=0$ تقبل حلا وحيد ا