التمرين الأول :

(I 1.أ-لدينا $\frac{z_A - z_B}{z_A} = \frac{ae^{i\frac{3\pi}{4}} - \left(-a\sqrt{2}\right)}{ae^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right)}{ae^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{a\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{ae^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{ae^{i\frac{\pi}{4}}}{ae^{i\frac{3\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \boxed{-i}$

$\frac{z_A - z_B}{z_A} = -i$ معناه $\left|\frac{z_A - z_B}{z_A}\right| = \left|\frac{z_A - z_B}{z_A - z_O}\right| = |-i| = 1$ و

$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_A}\right) = \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_O}\right) = \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_O - z_A}\right) = \arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ أي أن $AB = AO$ و

$\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ وهذا يعني أن المثلث OAB قائم في A ومتساوي الساقين .

ب- $z_B - z_C = -a\sqrt{2} - \overline{z_A} = -a\sqrt{2} - ae^{-i\frac{3\pi}{4}} = a\left(-\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ أي

$z_B - z_C = z_A = z_A - z_O$ وهذا يعني أن $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA}$ ومنه الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع ولأن أحد زوياه قائمة وفيه ضلعان متتابعان متقايسان ينتج أن $OABC$ مربع . مساحته هي $OA^2 = |z_A|^2 = \boxed{a^2}$

2.أ-العبارة المركبة للتشابه S هي $\boxed{z' = \frac{b}{a}e^{i\frac{3\pi}{4}}z}$. لدينا $\frac{b}{a}e^{i\frac{3\pi}{4}}z_A = \frac{b}{a}e^{i\frac{3\pi}{4}} \times ae^{i\frac{3\pi}{4}} = be^{i\frac{3\pi}{2}} = z_E$ ومنه $.S(A) = E$

ب- الرباعي $OEFG$ هو صورة المربع $OABC$ بالتشابه S وعليه مساحة $OEFG$ تساوي $\left(\frac{b}{a}\right)^2 \times a^2 = b^2$ لأن $\frac{b}{a}$ هي نسبة التشابه S.

3.أ-لدينا $|z_C| = \left|\overline{z_A}\right| = a$ و $|z_E| = b$ و $\frac{z_E}{z_C} = \frac{be^{i\frac{3\pi}{2}}}{ae^{-i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{b}{a}e^{i\frac{9\pi}{4}} = \frac{b}{a}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه $\arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ وعليه

$$|z_C|^2 + |z_E|^2 - 2|z_C \times z_E|\cos\left[\arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right)\right] = a^2 + b^2 - 2a \times b \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{a^2 + b^2 - a \times b\sqrt{2}}$$

ب-لدينا $EC^2 = \overrightarrow{EC}^2 = \left(\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE}\right)^2 = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OE}^2 - 2\overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OE}$ أي

$EC^2 = \overrightarrow{EC}^2 = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OE}^2 - 2\left\|\overrightarrow{OC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OE}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OE}\right)$ ولدينا $\left|\overrightarrow{OC}\right| = |z_C| = a$ و

$\left|\overrightarrow{OE}\right| = |z_E| = b$ و $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OE}\right) = \arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right)$ وعليه

$EC^2 = |z_C|^2 + |z_E|^2 - 2|z_C \times z_E|\cos\left[\arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right)\right] = \boxed{a^2 + b^2 - a \times b\sqrt{2}}$

(II 1. لدينا $\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{\frac{b}{a}e^{i\frac{3\pi}{4}}z_n}{z_n} = \boxed{\frac{b}{a}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$.

2. لدينا $\frac{b}{a} = \left|\frac{b}{a}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right| = \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ومنه : $u_{n+1} = \frac{b}{a}u_n$. ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{\frac{b}{a}}$ وحدها الأول $u_0 = |z_0| = |z_A| = \boxed{a}$.

$\frac{3\pi}{4} = \arg\left(\frac{b}{a}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) = \arg(z_{n+1}) - \arg(z_n) = \arg\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right)$ أي $v_{n+1} - v_n = \frac{3\pi}{4}$ ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{3\pi}{4}$ وحدها الأول $v_0 = \arg(z_A) = \boxed{\frac{3\pi}{4}}$.

3. لدينا $T_n = a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \ldots + \frac{b^n}{a^{n-1}} = a\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} + \ldots + \frac{b^n}{a^n}\right)$ ومنه

أي $T_n = a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \ldots + \frac{b^n}{a^{n-1}} = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{b}{a}}$

$T_n = a \times \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{b}{a}} = \boxed{a^2 \times \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{a - b}}$ ، بما أن $a < b$ فإن $\frac{b}{a} > 1$ و $a - b < 0$ وعليه $\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} = +\infty$ و $\boxed{\lim_{n \to +\infty} T_n = +\infty}$.

4. النقط A, O و M_n في استقامية معناه $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM_n}\right) = k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$. أي أن $\arg\left(\frac{z_n}{z_0}\right) = k\pi$ وعليه

$\arg(z_n) - \arg(z_0) = k\pi$ ومنه $v_n = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ ولكن $v_n = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}n$ أي $\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}n = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ وعليه

$n = \frac{4}{3}k = 4m$ حيث $m \in \mathbb{N}$ أي أن مجموعة قيم n حتى تكون النقط A, O و M_n في استقامية هي مضاعفات العدد 4.

التمرين الثاني :

1. أ-لدينا $\alpha = 2n^3 - 14n + 2 = (2n^2 - 6n + 4)(n+3) - 10$ أي أن $\alpha = 2n^3 - 14n + 2 = (2n^2 - 6n + 4)\beta - 10$

نضع $PGCD(\alpha, \beta) = d$ و $PGCD(\beta, 10) = d'$ عندئذ :

d يقسم كلا من α و β وبالتالي d يقسم $\left(2n^2-6n+4\right)\beta-\alpha=\boxed{10}$ أي d يقسم d' $\cdots(1)$ ،

d' يقسم كلا من 10 و β وبالتالي d' يقسم $\left(2n^2-6n+4\right)\beta-10=\boxed{\alpha}$ أي d' يقسم d $\cdots(2)$ ،

من (1) و (2) نستنتج أن $d=d'$ أي $PGCD(\alpha,\beta)=PGCD(\beta,10)$.

ب-قواسم العدد 10 هي $\{1;2;5;10\}$ ومنه $PGCD(\alpha,\beta)=PGCD(\beta,10)\in\boxed{\{1;2;5;10\}}$.

جـ-$PGCD(\alpha,\beta)=5$ معناه $PGCD(\beta,10)=5$ معناه $\begin{cases}\beta\equiv 0[5]\\ \beta\not\equiv 0[10]\end{cases}$ أي $\begin{cases}n+3\equiv 0[5]\\ n+3\not\equiv 0[10]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}n\equiv 2[5]\\ n\not\equiv 7[10]\end{cases}$ أي

$\begin{cases}n=5m+2\\ n\not\equiv 10s+7\end{cases}$ مع $m,s\in\mathbb{N}$.اي $\begin{cases}n=5m+2\\ 5m+2\not\equiv 10s+7\end{cases}$ أي $\begin{cases}n=5m+2\\ 5m\not\equiv 10s+5\end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases}n=5m+2\\ m\not\equiv 2s+1\end{cases}$ اي $\begin{cases}n=5m+2\\ m=2s\end{cases}$

وعليه $\boxed{n=10s+2}$

2.أ-لدينا $4^1\equiv 4[11],4^2\equiv 5[11],4^3\equiv 9[11],4^4\equiv 3[11],4^5\equiv 1[11]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا

$4^{5k}\equiv 1[11]$ و $4^{5k+1}\equiv 4[11],4^{5k+2}\equiv 5[11],4^{5k+3}\equiv 9[11],4^{5k+4}\equiv 3[11]$ أي :

إذا كان $n=$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
فإن باقي قسمة 4^n على 11 هو	1	4	5	9	3

ب- $\begin{cases}4^{5n}+4^n+n\equiv 0[11]\\ n\equiv 2[10]\end{cases}$ معناه $\begin{cases}4^n+n+1\equiv 0[11]\\ n=10k+2 \quad ,k\in\mathbb{N}\end{cases}$ لأن ($4^{5n}\equiv 1[11]$)تكافيء $\begin{cases}4^{10k+2}+10k+2+1\equiv 0[11]\\ n=10k+2 \quad ,k\in\mathbb{N}\end{cases}$

تكافيء $\begin{cases}\left(4^{5k+1}\right)^2+10k+2+1\equiv 0[11]\\ n=10k+2 \quad ,k\in\mathbb{N}\end{cases}$ تكافيء $\begin{cases}10k+19\equiv 0[11]\\ n=10k+2 \quad ,k\in\mathbb{N}\end{cases}$ (لأن $4^{5k+1}\equiv 4[11]$) تكافيء

$\begin{cases}-k+8\equiv 0[11]\\ n=10k+2 \quad ,k\in\mathbb{N}\end{cases}$ تكافيء $\begin{cases}k\equiv 8[11]\\ n=10k+2 \quad ,k\in\mathbb{N}\end{cases}$ تكافيء $\begin{cases}k=11p+8 \quad ,p\in\mathbb{N}\\ n=10k+2 \quad ,k\in\mathbb{N}\end{cases}$ ومنه

$n=10(11p+8)+2$ أي $\boxed{n=110p+82}$ مع $p\in\mathbb{N}$ وهي قيم n المطلوبة .

<u>التمرين الثالث</u>

1.أ- لدينا $\overrightarrow{AB}(2;2;-2),\overrightarrow{AC}(-2;-7;-8)$ نلاحظ أن : $\frac{2}{-7}=\frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}}\neq\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}}=-1=\frac{2}{-2}$ وهذا يعني أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$

و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ، وعليه النقط A,B و C ليست في استقامية فهي إذن تعين مستويا .

ب- لدينا $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=3\times 2+(-2)\times 2+1\times(-2)=0$ و $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times(-2)+(-2)\times(-7)+1\times(-8)=0$ ومنه الشعاع $\vec{n}$

عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وهما من المستوي (ABC) غير مرتبطين خطيا إذن الشعاع $\vec{n}$ ناظمي

للمستوي (ABC). وعليه معادلة لـ (ABC) هي $3x-2y+z+d=0$ مع $d\in\mathbb{R}$ وبتعويض إحداثيات A (مثلا)

نجد معادلة لـ (ABC) هي $\boxed{3x-2y+z-1=0}$.

2.أ-لدينا $\begin{cases} x=1+3\alpha+\beta \\ y=1-2\alpha \\ z=4+\alpha+\beta \end{cases}$ معناه $\begin{cases} x=1+2\alpha+(\alpha+\beta)\cdots(1) \\ y=1-2\alpha \qquad \cdots(2) \\ z-4=\alpha+\beta \qquad \cdots(3) \end{cases}$ بتعويض (3) في (1) ثم بجمع الناتج مع (2) نجد أن $\boxed{x+y-z+2=0}$ وهي معادلة ديكارتية للمستوي $(\wp)$. لدينا $\vec{n'}(1;1;-1),\vec{n}(3;-2;1)$ شعاعان ناظميان للمستويين (ABC) و $(\wp)$ على الترتيب ، ولدينا $\vec{n}\cdot\vec{n'}=3\times1+(-2)\times1+1\times(-1)=3-2-1=0$ وهذا يعني أن المستويين (ABC) و $(\wp)$ متعامدان .

ب- المستويان (ABC) و $(\wp)$ متقاطعان وتقاطعهما مستقيم ، ولدينا

$3(-2+t)-2(-7+4t)+-7+5t-1=-6+3t+14-8t-7+5t-1=0$ ومنه المستقيم (Δ) محتوى في المستوي (ABC)

$-2+t-7+4t-(-7+5t)+2=-2+t+-7+4t+7-5t+2=0$ ومنه المستقيم (Δ) محتوى في المستوي $(\wp)$. وعليه المستويان (ABC) و $(\wp)$ متقاطعان وفق المستقيم (Δ).

جـ-لدينا $d\left(D,(ABC)\right)=\dfrac{|3\times(-3)-2\times4+4-1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}}=\dfrac{14}{\sqrt{14}}=\boxed{\sqrt{14}}$ و $d\left(D,(\wp)\right)=\dfrac{|-3+4-4+2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

ومنه $d\left(D,(\Delta)\right)=\sqrt{\left[d\left(D,(ABC)\right)\right]^2+\left[d\left(D,(\wp)\right)\right]^2}=\sqrt{14+\dfrac{1}{3}}=\boxed{\boxed{\sqrt{\dfrac{43}{3}}}=\boxed{\dfrac{\sqrt{129}}{3}}}$

3.أ-ليكن $\vec{n''}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (Q) عندئذ : $\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{n''}=0 \\ \vec{n'}\cdot\vec{n''}=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 3a-2b+c=0 \\ a+b-c=0 \end{cases}$ حلول هذه الجملة هي الثلاثيات $(a;4a;5a)$ ومنه $\vec{n''}(1;4;5)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (Q) وتكون معادلة له $x+4y+5z+d'=0$ وبالتعويض بإحداثيات النقطة D نجد أن معادلة للمستوي (Q) هي $\boxed{x+4y+5z-33=0}$.

ب-المستويان (ABC) و $(\wp)$ متقاطعان وفق المستقيم (Δ) العمودي على المستوي (Q) فهو يقطعه في نقطة وحيدة H ، وعليه المستويات الثلاثة (ABC) و $(\wp)$ و (Q) تتقاطع في نقطة وحيدة H إحداثياتها (x,y,z) تحقق :

$\begin{cases} x+4y+5z-33=0 \\ x=-2+t \\ y=-7+4t \\ z=-7+5t \end{cases}$ أي أن $\boxed{H\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{7}{3};\dfrac{14}{3}\right)}$.

جـ-المستقيم (Δ) عمودي على المستوي $(\wp)$ وبالتالي على المستقيم (DH) $((DH)\subset(\wp))$ وعليه H هي المسقط العمودي لـ D على (Δ) أي أن

$$d\left(D,(\Delta)\right)=HD=\sqrt{\left(-3-\frac{1}{3}\right)^2+\left(4-\frac{7}{3}\right)^2+\left(4-\frac{14}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{100}{9}+\frac{25}{9}+\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{129}{9}}=\boxed{\boxed{\frac{\sqrt{129}}{3}}=\boxed{\sqrt{\frac{43}{3}}}}$$

التمرين الرابع :

$I-1$.أ- من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا: $u'(x)=e^x-3$ وعليه إشارة $u'(x)$ هي :

x	0		$\ln 3$		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	

وعليه الدالة u متناقصة تماما على المجال $]0;\ln 3]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\ln 3;+\infty[$.

ب- للدالة u قيمة حدية صغرى هي $u(\ln 3)=e^{\ln 3}-3\ln 3+4-e=7-3\ln 3-e\simeq 0.986>0$ ومنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $u(x)>0$ أي $e^x-3x+4-e>0$ وعليه $\boxed{e^x-e>3x-4}$.

2. أ- من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا: $v'(x)=-9x^2+8x+\frac{1}{x}=\frac{-9x^3+8x^2+1}{x}$ ومنه $v'(1)=-9\times1^2+8\times1+\frac{1}{1}=0$.

ب- العدد 1 جذر لـ $v'(x)$ وبتحليل $v'(x)$ نجد : $v'(x)=-\frac{(x-1)(9x^2+x+1)}{x}$ ولكون $9x^2+x+1>0$ (مميزه $\Delta=-35<0$ و $9>0$) فإن إشارة $v'(x)$ عكس إشارة $x-1$ أي أن $v'(x)>0$ على المجال $]0;1[$ و $v'(x)<0$ على المجال $]1;+\infty[$ أي أن الدالة v متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ ومنه للدالة v قيمة حدية كبرى هي $v(1)=-3\times1^3+4\times1^2-1+\ln 1=0$ أي أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $v(x)\le 0$.

جـ- $v(x)\le 0$ معناه $-3x^3+4x^2-1+\ln x\le 0$ ومنه $-1+\ln x\le 3x^3-4x^2$ وعليه $-1+\ln x\le x^2(3x-4)$ ولكون $x\neq 0$ ينتج أن $\boxed{\frac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4}$.

3. من $e^x-e>3x-4$ و $\frac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4$ نستنتج أن $\frac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4<e^x-e$ أي أن $\frac{-1+\ln x}{x^2}<e^x-e$ ومنه $\boxed{e^x-e+\frac{1-\ln x}{x^2}>0}$.

II-1. $\boxed{\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty}$ لأن $\lim_{x\xrightarrow{>}0} e^x-ex=1$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln x}{x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln\frac{1}{X}}{\frac{1}{X}}=\lim_{X\to+\infty}-X\ln X=-\infty$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x}-e\right)=+\infty$ = $\lim_{x\to+\infty} e^x-ex$.

2. من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا
$f'(x)=e^x-e+\frac{1-\ln x}{x^2}>0$ (من السؤال $I-3$) ومنه
الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ وجدول تغيراتها هو

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. لدينا $f(1)=e^1-e\times1+\frac{\ln 1}{1}=\boxed{0}$.
تمثيل (C_f) (في الصفحة 6)

4. لتكن A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\frac{1}{2}$ و $x=2$

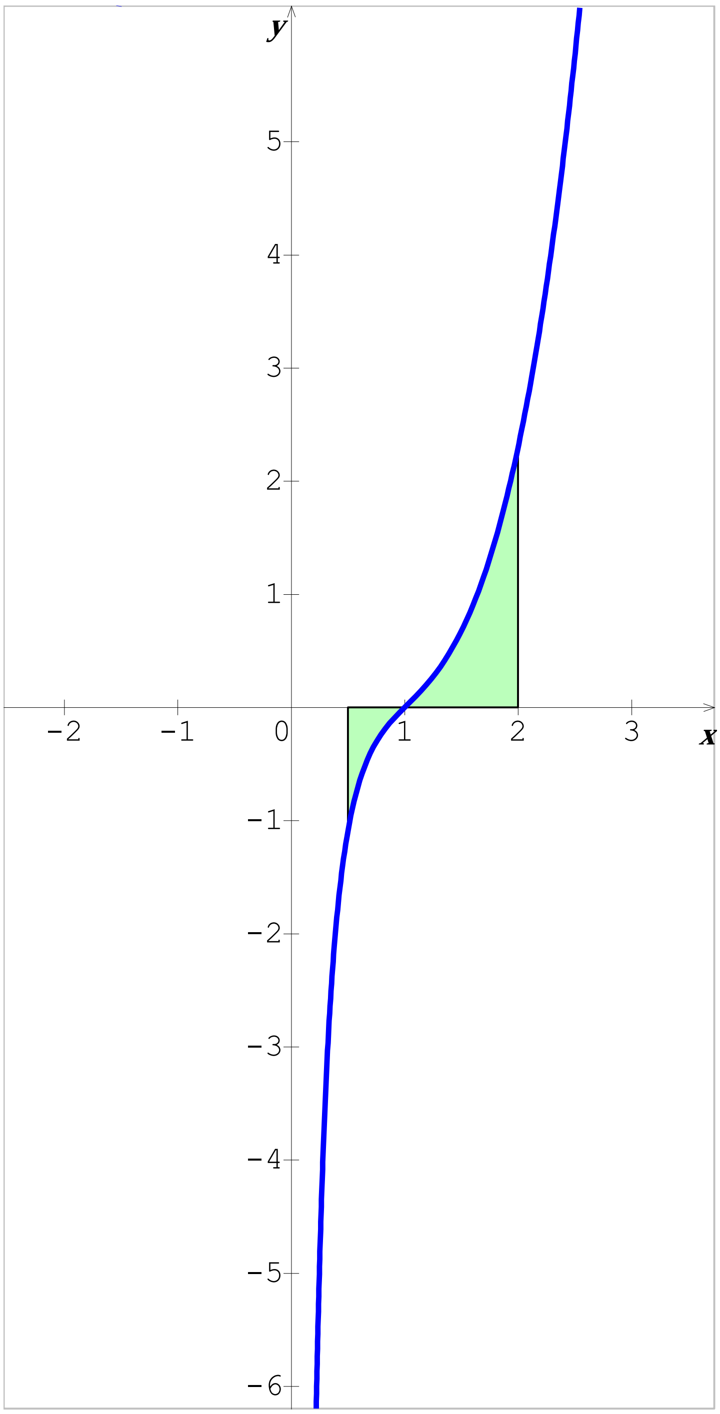
عندئذ : $A=\int_{\frac{1}{2}}^{1}-f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$

لدينا الدالة F المعرفة بـ $F(x)=e^{x}-\frac{e}{2}x^{2}+\frac{1}{2}(\ln x)^{2}$ هي دالة أصلية لـ f على $]0;+\infty[$ ومنه

أي $A=-\left[F(x)\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+\left[F(x)\right]_{1}^{2}=-F(1)+F\left(\frac{1}{2}\right)+F(2)-F(1)=F(2)+F\left(\frac{1}{2}\right)-2F(1)$

أي $A=e^{2}-\frac{e}{2}\times2^{2}+\frac{1}{2}(\ln2)^{2}+e^{\frac{1}{2}}-\frac{e}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}\right)^{2}-2\left(e^{1}-\frac{e}{2}\times1+\frac{1}{2}(\ln1)^{2}\right)=\boxed{e^{2}+e^{\frac{1}{2}}-\frac{25}{8}e+(\ln2)^{2}}$

$\boxed{A\approx1.024}$



تصحيح اختبار البكالوريا 2013 رياضيات شعبة رياضيات – الموضوع الثاني -

التمرين الأول :

1.أ- $2n+27\equiv 0[n+1]$ معناه $2n+2+25\equiv 0[n+1]$ أي $2(n+1)+25\equiv 0[n+1]$ ومنه $25\equiv 0[n+1]$ أي 25 مضاعف لـ $n+1$ أي $\boxed{n\in\{0,4,24\}}$.

$(b-a)(b+a)=24$ معناه $(b-a)(b+a)=2\times 12$ أو $(b-a)(b+a)=4\times 6$ لأن $b-a$ و $b+a$ من نفس الشفعية و $b>a$

$(b-a)(b+a)=2\times 12$ معناه $\begin{cases}b-a=2\\ b+a=12\end{cases}$ و $(b-a)(b+a)=4\times 6$ معناه $\begin{cases}b-a=4\\ b+a=6\end{cases}$ ومنه $\boxed{(a,b)\in\{(5,7),(1,5)\}}$.

$(b-a)(b+a)=24$ تكافيء $b^2-a^2=24$ ومنه $b^2=24+a^2$ وعليه قطعة طولها $\sqrt{24}$ هي ضلع في مثلث قائم طول وتره 5 وطول الضلع القائم الآخر هي1 أو هي ضلع في في مثلث قائم طول وتره 7 وطول الضلع القائم الآخر هي5.

$\alpha=\overline{10141}^5=1\times 5^4+1\times 5^2+4\times 5^1+1=\boxed{671}$ ، $\beta=\overline{3403}^5=3\times 5^3+4\times 5^2+3=\boxed{478}$

$\begin{cases}b^2-a^2=24\\ \alpha a-\beta b=9\end{cases}$ معناه $\begin{cases}b^2-a^2=24\\ 651a-478b=9\end{cases}$ معنا ه $\begin{cases}(a,b)\in\{(5,7),(1,5)\}\\ 671a-478b=9\end{cases}$ ومنه $\boxed{(a,b)=(5,7)}$.

$2013=3\times 11\times 61$ و $1434=2\times 3\times 239$ ومنه $\boxed{PGCD(2013,1434)=3}$.

$PGCD(2013,1434)=3$ معناه $PGCD(3\times 11\times 61,3\times 2\times 239)=3$ ومنه $3\times PGCD(671,478)=3$ أي $\boxed{PGCD(671,478)=1}$.

$2013x-1434y=27$ معناه $671x-478y=9$ ، من السؤال 2.ب- لدينا الثنائية $(5,7)$ حل خاص لهذه المعادلة أي $\begin{cases}671x-478y=9\\ 671\times 5-478\times 7=9\end{cases}$ ومنه $(*)\cdots\quad 671(x-5)=478(y-7)$ إذن 478 يقسم $671(x-5)$ وبما أن 478 و 671 أوليان فيما بينهما فإن (حسب مبرهنة غوص) 478 يقسم $x-5$ أي يوجد عدد صحيح k بحيث $x-5=478k$ ومنه $x=478k+5$ بالتعويض في $(*)$ نجد أن $y=671k+7$ ومنه حلول المعادلة المعطاة هي $\boxed{\{(478k+5,671k+7);\quad k\in\mathbb{Z}\}}$.

التمرين الثاني

1.لدينا $\Delta=1^2-4\times 1=-3=(i\sqrt{3})^2$ ومنه حلا المعادلة هما $\boxed{z_1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$ ، $\boxed{z_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$

2.أ-لدينا $|z_A|=1$ و $\arg(z_A)\equiv\frac{4\pi}{3}[2\pi]$ ومنه $\boxed{z_A=e^{i\frac{4\pi}{3}}}$.

ب- $\arg\left[\left(z-z_A\right)^2\right]=\arg\left(z_A\right)-\arg\left(z_B\right)$ تكافيء $2\arg\left(z-z_A\right)=2\arg\left(z_A\right)$ أي $\arg\left(z-z_A\right)=\arg\left(z_A\right)$ أي

$\arg\left(z-z_A\right)=\arg\left(z_A-z_O\right)$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{AM}$ مرتبطان خطيا ولهما نفس الاتجاه أي ومه

$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AM}\right)=2k\pi$ ومنه مجموعة النقط المطلوبة هي نصف المستقيم المفتوح الذي مبدؤه A (A ليست نقطة منه)

وشعاع توجيه له $\overrightarrow{OA}$ ولا يشمل O والذي عبارته التحليلية $\begin{cases} y=\sqrt{3}x \\ x<-\frac{1}{2} \end{cases}$ وعبارته المركبة

$\lambda>0$, $z=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}+\lambda e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

3.أ- ، لدينا $\left|z_A\right|=1$ و $\arg\left(z_A\right)\equiv\frac{4\pi}{3}\left[2\pi\right]$ و $\frac{z_B\sqrt{3}}{1-z_A}=\frac{-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}}{1+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}=\frac{-\sqrt{3}+3i}{3+i\sqrt{3}}=i$ ومنه r هو الدوران

الذي مركزه $\Omega(0;1)$ وزاويته $\frac{4\pi}{3}$.

ب-لدينا $\frac{3i}{1-(-2)}=\frac{3i}{3}=i$ ومنه نسبة التحاكي h هي -2 و مركزه النقطة $\Omega(0;1)$.

جـ- لدينا $S=h\circ r$ ،

لدينا r هو تشابه مباشر مركزه النقطة $\Omega(0;1)$ و نسبته 1 وزاويته $\frac{4\pi}{3}$ و h هو تشابه مباشر مركزه النقطة $\Omega(0;1)$ و نسبته 2 وزاويته $-\pi$ ومنه S هو التشابه المباشر الذي مركزه النقطة $\Omega(0;1)$ ذات اللاحقة i (نفس المركز) ونسبته 2 (جداء النسبتين) وزاويته $\frac{\pi}{3}$ (مجموع الزاويتين) . وتكون عبارته المركبة هي $z'-i=2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)$ أي

$z'=2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)+i$.

4.لدينا E هي صورة O بالتشابه المباشر $S_3=S\circ S\circ S$ الذي مركزه Ω ونسبته 6 وزاويته $\frac{3\pi}{3}=\pi$ ومنه

$\left(\overrightarrow{\Omega O},\overrightarrow{\Omega E}\right)=\pi+2k\pi$ وهذا يعني أن النقط O,Ω و E في استقامية .

5.أ-لدينا $z=2e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}$ تكافيء $z=2e^{i\theta}+i$ تكافيء $z-i=2e^{i\theta}$ ومنه $\left|z-z_\Omega\right|=2$ أي $\Omega M=2$ وعليه (Γ) هي الدائرة التي مركزها $\Omega(0;1)$ ذات اللاحقة i ونصف قطرها 2 .

ب-بما أن $S(\Omega)=\Omega$ فإن (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S هي الدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها $R=2\times2=4$.

التمرين الثالث :

1.أ-الشعاع $\overrightarrow{AB}(2;1;-1)$ شعاع توجيه لـلمستقيم (AB) ومنه $\boxed{\begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \quad ,t\in\mathbb{R} \\ z=2-t \end{cases}}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (AB).

ب-الشعاع $\vec{u}(1;0;-1)$ شعاع توجيه لـلمستقيم (Δ) ، الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ غير مرتبطين خطيا وعليه المستقيمين (AB) و (Δ) غير متوازيين فهما إما متقاطعين أو ليسا من نفس المستوي ، لنفرض أنهما متقاطعين عندئذ :

$\begin{cases} -1+2t=2+\alpha \\ t=-2 \\ 2-t=-1-\alpha \end{cases}$ أي $\begin{cases} -3+2t=\alpha \\ t=-2 \\ 3+t=\alpha \end{cases}$ وهذه الجملة لا تقبل حلا ، نستنتج إذن أن (AB) و (Δ) ليسا من نفس المستوي .

2.أ-الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ يوازيان المستوي (P) وهما غير معدومين و غير مرتبطين خطيا فهما يشكلان أساسا للمستوي (P) وعليه من أجل كل نقطة M من (P) يوجد عددان حقيقيان μ,λ بحيث $\overrightarrow{AM}=\mu\overrightarrow{AB}+\lambda\vec{u}$ ومنه

$\begin{cases} x+1=2\mu+\lambda \\ y=\mu \\ z-2=-\mu-\lambda \end{cases}$ ومنه $\boxed{\begin{cases} x=-1+2\mu+\lambda \\ y=\mu \\ z=2-\mu-\lambda \end{cases}}$ وهو تمثيل وسيطي للمستوي (P).

ب- $\begin{cases} x=-1+2\mu+\lambda \\ y=\mu \\ z=2-\mu-\lambda \end{cases}$ تكافيء $\begin{cases} x=-1+2y+\lambda \quad \cdots(1) \\ y=\mu \\ z=2-y-\lambda \quad \cdots(2) \end{cases}$ وبجمع (1) و (2) نجد $x+z=1+y$ ومنه

$\boxed{x-y+z-1=0}$ وهي معادلة ديكارتية للمستوي (P).

3.أ- لدينا $\overrightarrow{AM}(1+2\beta+1;1+\beta-0;1-\beta-2)$ أي $\overrightarrow{AM}(2\beta+2;1+\beta;-\beta-1)$ ومنه $\overrightarrow{AM}=(\beta+1)\overrightarrow{AB}$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ مرتبطان خطيا وعليه النقط B,A و M في استقامية أي أن $M\in(AB)$.

ب- M المسقط العمودي لـ N على (P) معناه $\begin{cases} \overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}=0 \\ \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \end{cases}$ ولدينا $\overrightarrow{MN}(1+\alpha-2\beta;-3-\beta;-2-\alpha+\beta)$ و منه

$\begin{cases} 1+\alpha-2\beta+2+\alpha-\beta=0 \\ 2(1+\alpha-2\beta)-3-\beta 2+\alpha-\beta=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 2\alpha-3\beta+3=0 \\ 3\alpha-6\beta-1=0 \end{cases}$ بحل هذه الجملة نجد أن $(\alpha,\beta)=\left(-5,-\frac{7}{3}\right)$ أي أن

$\boxed{M\left(-\frac{11}{3};-\frac{4}{3};\frac{10}{3}\right)}$ و $\boxed{N(-3;-2;4)}$.

جـ- لدينا $d(N,(P))=\frac{|-3-(-2)+4-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$ بطريقة اخرى

$$d(N,(P))=MN=\sqrt{\left(-3+\frac{11}{3}\right)^2+\left(-2+\frac{4}{3}\right)^2+\left(4-\frac{10}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{12}{9}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

مساحة المثلث ABN هي $S(ABN)=\frac{1}{2}\times AB\times d(N,(P))=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\boxed{\sqrt{2}}$

<u>التمرين الرابع</u>

$I-1$. أ- لدينا $\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty}$ و $\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x)=1}$ لأن $\lim_{x\to+\infty}(x^2-1)e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{e^x}=0$.

ب- من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $g'(x)=2xe^{-x}-(x^2-1)e^{-x}=\boxed{(-x^2+2x+1)e^{-x}}$ وعليه إشارة $g'(x)$ من إشارة ثلاثي الحدود $-x^2+2x+1$ الذي له جذرين هما $1-\sqrt{2}$ و $1+\sqrt{2}$ وعليه : إشارة $g'(x)$ هي

$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
	$-$	0	$+$	0	$-$	

أي أن الدالة g متناقصة تماما على كل من المجالين $\left]-\infty,1-\sqrt{2}\right]$ و $\left[1+\sqrt{2},+\infty\right[$ ومتزايدة تماما على المجال $\left[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right]$.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-0.25	$\nearrow$	1.43	$\searrow$	1

جدول التغيرات

2.أ- من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $\left]-\infty,1-\sqrt{2}\right]$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)\times g(1-\sqrt{2})<0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $\left]-\infty,1-\sqrt{2}\right]$.

كذلك الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $\left[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right]$ و $g(1-\sqrt{2})\times g(1+\sqrt{2})\approx-0.25\times1.43<0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $\left[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right]$.

الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $\left[1+\sqrt{2},+\infty\right[$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1>0$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ لا تقبل حلا على المجال $\left[1+\sqrt{2},+\infty\right[$ إذن نستخلص أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$. لدينا $g(0)=1+(0-1)e^{0}=1-1=0$ ومنه أحد الحلين هو 0 ولدينا $g(-0.8)\times g(-0.7)=\left[1+\left((-0.8)^2-1\right)e^{0.8}\right]\times\left[1+\left((-0.7)^2-1\right)e^{0.7}\right]\simeq0,2\times(-0.03)<0$ أي أن الحل الثاني α يحقق $-0.8<\alpha<-0.7$.

ب- إشارة $g(x)$

$-\infty$		α		0		$+\infty$
	$+$	0	$-$	0	$+$	

II−1.أ- $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ (واضحة) ،

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ لأن $\lim_{x\to+\infty} (x+1)^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

ب – لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} -(x+1)^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{(x+1)^2}{e^x} = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

جـ- بما أن $f(x) - x = -(x+1)^2 e^{-x} \le 0$ من اجل كل عدد حقيقي x فإن (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) مع كون (Δ)و (C_f) يشتركان في النقطة ذات الفاصلة -1.

2.أ- من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x) = 1 - \left[2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x}\right] = 1 - \left[2x + 2 - x^2 - 2x - 1\right]e^{-x}$ أي $f'(x) = 1 - (-x^2+1)e^{-x} = 1 + (x^2-1)e^{-x} = g(x)$.

ب- جدول تغيرات f

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

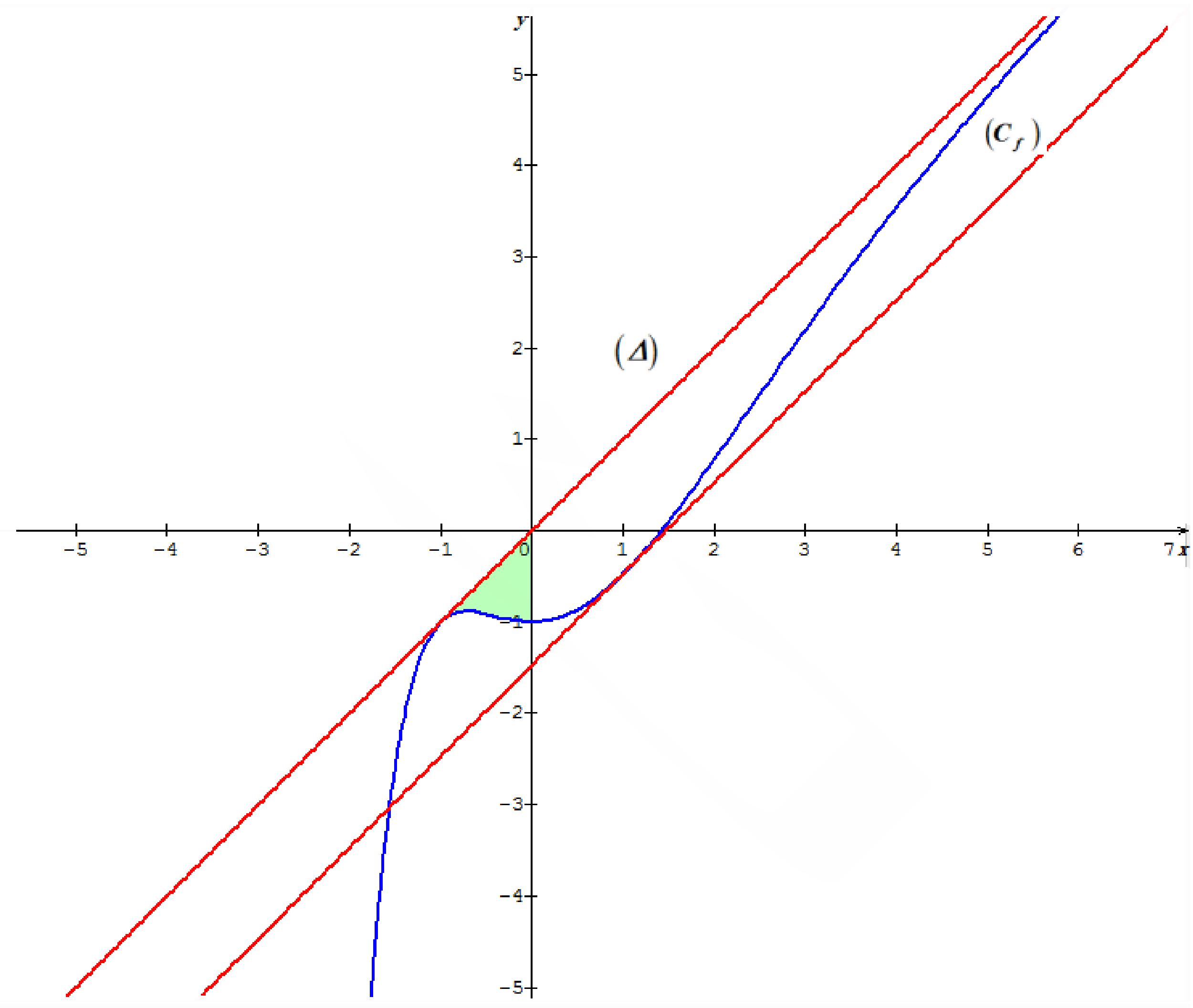
3.أ- $f'(x) = 1$ معناه $g(x) = 1$ أي $1 + (x^2-1)e^{-x} = 1$ ومنه $(x^2-1)e^{-x} = 0$ ومنه $x = 1$ أو $x = -1$.

وعليه (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما 1،

عند $x = 1$: لدينا $f'(1) = 1$ و $f(1) = 1 - \frac{4}{e}$ ومنه $y = 1\times(x-1) + 1 - \frac{4}{e}$ أي $\boxed{y = x - \frac{4}{e}}$ وهي معادلة لمماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$.

عند $x = -1$: لدينا $f'(-1) = 1$ و $f(-1) = -1$ ومنه $y = 1\times(x+1) - 1$ أي $\boxed{y = x}$ وهي معادلة لمماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x = -1$. وهو المستقيم (Δ).

ب- تمثيل (Δ) والمماسين و (C_f).



جـ- $(x+1)^2+me^x=0$ معناه $m=-(x+1)^2e^{-x}$ ومنه $x+m=x-(x+1)^2e^{-x}=f(x)$ ومنه حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x+m$ (يوازي المماسين) .

من التمثيل البياني لدينا

إذا كان $m<-\frac{4}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا .

إذا كان $m=-\frac{4}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما حل مضاعف $(x=1)$.

إذا كان $-\frac{4}{e}<m<0$ فإن المعادلة تقبل ثلاثة حلول مختلفة .

إذا كان $m=0$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا $(x=-1)$.

إذا كان $m>0$ فإن المعادلة لا تقبل حلا .

4.أ- من اجل كل عدد حقيقي x لدينا

$H'(x)=(-2x-4)e^{-x}-(-x^2-4x-5)e^{-x}=(x^2+2x+1)e^{-x}=(x+1)^2e^{-x}$ ومنه الدالة H دالة أصلية للدالة $x\mapsto(x+1)^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

ب- لتكن A المساحة المطلوبة محسوبة بوحدة المساحة عندئذ :

$$A=\int_{-1}^{0}(x-f(x))dx=\int_{-1}^{0}(x+1)^2e^{-x}dx=\left[H(x)\right]_{-1}^{0}=H(0)-H(-1)=\boxed{-5+2e}$$

وعليه مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$ محسوبة بالسنتيمتر المربع هي $\boxed{4(2e-5)=8e-20cm^2}$ أي بالتقريب $\boxed{\simeq 1.75cm^2}$

$III-1$.لدينا $u_0=\alpha$ ومنه $-1\le u_0\le\alpha$ أي أن الخاصية محققة من أجل $n=0$.

نفرض ان $-1\le u_n\le\alpha$ لكل عدد طبيعي n ونبين أن $-1\le u_{n+1}\le\alpha$.

لدينا $-1\le u_n\le\alpha$ ولكون الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-1;\alpha]$ فإن $f(-1)\le f(u_n)\le f(\alpha)$ $(*)$
و لدينا $f(-1)=-1$ و من السؤال $II-1$.جـ وجدنا أن $f(x)-x\le 0$ من اجل كل عدد حقيقي x فإن $f(\alpha)-\alpha\le 0$ أي $f(\alpha)\le\alpha$ ومنه : $(*)$ تكافيء $-1\le u_{n+1}\le\alpha$ أي أن الخاصية محققة من أجل $n+1$ وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1\le u_n\le\alpha$.

2. لدينا $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n\le 0$ (لأن $f(x)-x\le 0$ من اجل كل عدد حقيقي x) ومنه المتتالية (u_n) متناقصة .

3. المتتالية (u_n) محدودة ورتيبة (متناقصة) فهي إذن متقاربة . لتكن ℓ نهايتها عندئذ $\lim u_{n+1}=\lim u_n=\ell$ أي $\lim f(u_n)=\lim u_n=\ell$ ومنه $\ell-(\ell+1)^2e^{-\ell}=\ell$ أي أن $(\ell+1)^2e^{-\ell}=0$ ومنه $\boxed{\lim u_n=\ell=-1}$