

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.
 (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B و C نقط المستوي التي لاحتقاتها

على الترتيب: $z_A = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ، $z_B = \bar{z}_A$ و $z_C = z_A + z_B$

أ- اكتب على الشكل الأسّي الأعداد المركبة: z_A ، z_B و $\frac{z_A}{z_B}$.

- ب- عيّن لاحقة كل من A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

ج- بيّن أن الرباعي $OA'CB'$ مربع.

- (3) نسمي (Δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|z - z_A| = |z - z_B|$.
 أ- بيّن أن (Δ) هو محور الفواصل.

ب- بيّن أن حلي المعادلة: $\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right)^2 = i$ عدنان حقيقيان. (لا يطلب حساب الحلين)

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- (1) نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية: (1) $2011x - 1432y = 31$.
 أ- أثبت أن العدد 2011 أولي.

ب- باستعمال خوارزمية إقليدس، عيّن حلا خاصا $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1)، ثم حل المعادلة (1).

- (2) أ- عيّن، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7، ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7.

ب- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $0 \equiv [7] 2010^n + 2011^n + 1432^n$.

- (3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث: α, β, γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و $(\beta; \gamma)$ حل للمعادلة (1).
 عيّن α ، β و γ ، ثم اكتب N في النظام العشري.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقط $A(3;0;0)$ ، $B(0;4;0)$ و $C(2;2;2)$.
- 1) بيّن أن النقط A, B, C ليست في استقامة وأن الشعاع $\vec{n}(4;3;-1)$ عمودي على كل من الشعاعين: \vec{AB} و \vec{AC} .
 - 2) اكتب معادلة ديكرتية للمستوي (P) الذي يشمل النقط A, B, C .
 - 3) أ- بيّن أن: $6x - 8y + 7 = 0$ معادلة ديكرتية للمستوي (P') مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء حيث: $AM = BM$.
 - ب- بيّن أن: $2x - 4y - 4z + 3 = 0$ معادلة ديكرتية للمستوي (P'') مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء حيث: $AM = CM$.
 - ج- بيّن أن (P') و (P'') يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.
 - 4) احسب إحداثيات النقطة ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

التمرين الرابع: (08 نقاط)

- I) g هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = 2 - xe^x$.
- 1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
 - 2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على \mathbb{R} ، ثم تحقق أن: $0,8 < \alpha < 0,9$.
 - 3) عيّن، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.
- II) f هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{2x+2}{e^x+2}$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (وحدة الطول $2cm$).
- 1) بيّن أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.
 - 2) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - ب- بيّن أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .
 - 3) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ') و (Δ) ، حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$.
 - 4) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .
 - ب- بيّن أن: $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- 5- ارسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) .
- 6- ناقش، بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$.
- III) (U_n) هي المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $U_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$.
- 1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq U_n < \alpha$.
 - 2) باستعمال (Δ) و (C_f) مثل على محور الفواصل الحدود: U_0 ، U_1 و U_2 ، ثم خمن اتجاه تغير (U_n) .
 - 3) برهن أن المتتالية (U_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z^2 + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$.

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B, C و D التي لواحقتها على الترتيب: $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -2i$ و $z_D = \overline{z_C}$.

- بيّن أن النقط A, B, C و D تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها، ثم أنشئ النقط A, B, C و D .

3) نرمز بـ z_E إلى لاحقة النقطة E نظيرة النقطة B بالنسبة إلى المبدأ O .

$$\text{أ- بيّن أن: } \frac{z_A - z_C}{z_E - z_C} = e^{i(-\frac{\pi}{3})}$$

ب- بيّن أن النقطة A هي صورة النقطة E بدوران R مركزه C يطلب تعيين زاويته.

ج- استنتج طبيعة المثلث AEC .

د- H هو التحاكي الذي مركزه O ونسبته 2.

- عيّن طبيعة التحويل $R \circ H$ وعناصره المميزة، ثم استنتج صورة الدائرة (γ) بالتحويل $R \circ H$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقط $A(1;1;1)$ ، $B(1;-1;0)$ و $C(2;0;1)$.

1) بيّن أن النقط A, B و C تعين مستويا (P_1) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

2) (P_2) المستوي الذي: $x - 2y - 2z + 6 = 0$ معادلة ديكارتية له.

- بيّن أن (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

3) بيّن أن النقطة O هي مرجح الجملة: $\{(A;1), (B;1), (C;-1)\}$.

4) أ- عيّن (S) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق: $\|\overline{MA} + \overline{MB} - \overline{MC}\| = 2\sqrt{3}$.

ب- احسب إحداثيات D و E نقطتي تقاطع (S) و (Δ) .

ج- ما هي طبيعة المثلث ODE ؟ ثم استنتج المسافة بين O و (Δ) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $u_0 = 16$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 6u_n - 9$.

(1) أ- احسب بواقي قسمة كل من الحدود u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 على 7.

ب- خمن قيمة للعدد a وقيمة للعدد b بحيث: $u_{2k} \equiv a[7]$ و $u_{2k+1} \equiv b[7]$.

(2) أ- برهن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2} \equiv u_n[7]$.

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k} \equiv 2[7]$ ، ثم استنتج أن: $u_{2k+1} \equiv 3[7]$.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \frac{9}{5}$.

أ- بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- احسب، بدلالة n ، كلا من u_n و S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

(I) g هي الدالة المعرفة على المجال $]-1; 3[$ كما يلي: $g(x) = 2 \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$.

(1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) بيّن أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α يحقق: $-0,8 < \alpha < -0,7$.

(3) عيّن، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

(4) h هي الدالة المعرفة على المجال $]-1; 3[$ بـ: $h(x) = [g(x)]^2$.

أ- احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$.

ب- عيّن إشارة $h'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة h .

(II) f هي الدالة المعرفة على المجال $]-1; 3[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2}{\ln(x+1)}$; $x \neq 0$
 $f(0) = 0$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند الصفر، ثم اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

(2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $]-1; 0[\cup]0; 3[$ ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب- بيّن أن: $f(\alpha) = 2\alpha(\alpha+1)$ ، ثم عيّن حصرًا لـ $f(\alpha)$.

ج- احسب $f(3)$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أ- بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-1; 3[$ فإن: $x - \ln(x+1) \geq 0$.

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (T) .

(4) عيّن معادلة للمستقيم (T') الموازي للمماس (T) والذي يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3.

(5) ارسم (T) ، (T') و (C_f) .

(6) ناقش بيانها، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$.