# حل الموضوع الأول في مادة الرياضيات بكالوريا 2011 شعبة رياضيات

## حل التمرين الأول:

1) كتابة كل من الأعداد المركبة $Z_A$، $Z_B$ و $Z_C$ على الشكل الأسي:

**الشكل الأسي $Z_A$:**

لدينا $Z_A = 1 - i$ ومنه $|Z_A| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\left(Arg(Z_A)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(Arg(Z_A)\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}; \quad Arg(Z_A) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

ومنه $Z_A = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

**الشكل الأسي $Z_B$:**

لدينا $Z_B = -1 + i$ ومنه $|Z_B| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\left(Arg(Z_B)\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(Arg(Z_B)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}; \quad Arg(Z_B) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

ومنه $Z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

**الشكل الأسي $Z_C$:**

لدينا $Z_C = \sqrt{3} + \sqrt{3}i$ ومنه $|Z_C| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{6}$

$$\begin{cases} \cos\left(Arg(Z_C)\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(Arg(Z_C)\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}; \quad Arg(Z_C) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

ومنه $Z_C = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) أ) حساب طويلة وعمدة العدد المركب $\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}$

نلاحظ أن $Z_B = i(i+1); Z_A = -i(i+1)$ ومنه $\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A} = \frac{i(i+1)+i(i+1)}{\sqrt{3}(i+1)+i(i+1)} = \frac{2i(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه $\left|\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}\right| = 1$ و $\text{Arg}\left(\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}\right) = \frac{\pi}{3}$

التفسير الهندسي $AB = AC;\ (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

ب) طبيعة المثلث ABC: من التفسير الهندسي السابق نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3) **إيجاد لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي ACBD معينا.**

حتي يكون الرباعي ACBD يجب أن يكون $AC = BC$ ( وجدناها سابقا المثلث ABC متقايس الأضلاع)

و $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$ أي $Z_C - Z_A = Z_B - Z_D$ ومنه $Z_D = Z_A + Z_B - Z_C$.

ومنه $Z_D = 1 - i - 1 + i - (\sqrt{3}(1+i) = -\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

ومنه $Z_D = -\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

4) **أ) طبيعة التحويل T**

لدينا $Z' = (-1+i)Z + 1 - 3i$ ( العبارة المركبة للتحويل)

بما أن $|-1+i| = |Z_B| = \sqrt{2} \neq 1$ فإن T تشابه نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\text{Arg}(Z_B) = \frac{3\pi}{4}$ ومركزه لاحقة العدد $\frac{1-3i}{2+i}$

ومنه: T تشابه مركزه A ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$

ب) **استنتاج طبيعة التحويل ToT**

ToT تشابه مركزه A ونسبته $\sqrt{2}^2$ وزاويته $2.\frac{3\pi}{4}$

ومنه: ToT تشابه مركزه تشابه مركزه A ونسبته 2 وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

## التمرين الثاني:

**1)** أ) **إثبات أن النقط A، B و C تعين مستوي**

لدينا: $\overrightarrow{AB}(0;1;2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;1;-1)$ نلاحظ أن $\frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}} \neq \frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{A}}}$ ومنه النقط A، B و C ليست على استقامة واحدة وبالتالي تعين مستوي.

ب) **إثبات أن الشعاع $\vec{n}(3;4;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$:**

بما أن $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$ فإن $\vec{n}(3;4;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$.

استنتاج المعادلة الديكارتية للمستوي $(ABC)$

لتكن $M(x;y;z) \in (ABC)$ بحيث $\vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0$

$\vec{n}(3;4;-2).\overrightarrow{AM}(x-1;y;z-2) = 0$

ومنه $(ABC): 3x + 4y - 2z + 1 = 0$

**2)** أ) **إثبات أن المستويان $(P_1)$ و $(P_2)$ متعامدان:**

ليكن $\overrightarrow{n_1}(3;4;-2)$ الشعاع الناظمي لـــــ $(P_1)$ و $\overrightarrow{n_2}(1;-2;-1)$ الشعاع الناظمي لـــــ $(P_1)$

بما أن $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0$ فإن المستويان $(P_1)$ و $(P_2)$ متعامدان

ب) **إيجاد التمثيل الوسيطي للمستقيم $(\Delta)$:**

$(\Delta)$

ومنه
$$\begin{cases} 3x + 4t - 2z + 1 = 0 \dots (1) \\ 2x - 2t - z - 1 = 0 \dots (2) \\ y = t \end{cases}$$

$(1)$

بالتعويض في $(2)$ نجد $2(8t+3) - 2t - z - 1 = 0; z = 14t + 5$

ومنه
$$(\Delta): \begin{cases} x = 8t + 3 \\ y = t \qquad t \in R \\ z = 14t + 5 \end{cases}$$

ج) التحقق أن $O$ لا تنتمي إلى $(\Delta)$: بما أن $O$ لا تنتمي إلى $(P_1)$ و $(P_2)$ فإن $O$ لاتنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$.

د) <u>**حساب المسافتين $\mathbf{d(O;(P_2))}$ و $\mathbf{d(O;(P_1))}$:**</u>

$d(O$

$d(O$

**استنتاج المسافة $\mathbf{d(O;(\Delta))}$:** $\mathbf{d(O;(\Delta))} = \sqrt{d^2((O;(P_1)) + d^2(O;(P_2))} = \sqrt{\frac{1}{29}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{38}{261}}$

ومنه: $d(O;(P_1)) = \frac{\sqrt{29}}{29}$، $d(O;(P_2)) = \frac{1}{3}$، $\mathbf{d(O;(\Delta))} = \sqrt{\frac{38}{261}}$

<u>**التمرين الثالث:**</u>

**1) <u>إيجاد الحدين $u_3$ و $u_5$</u>**

بما أن $d$ القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين $u_3$ و $u_5$ فإن $d$ يقسم المجموع $u_5 + u_3 = 2u_4 = 30$ ومنه $d$ من قواسم العدد $30$.

من جهة أخر $d$ يقسم المضاعف المشترك الأصغر $m$ ومنه فإن $d$ يقسم المجموع $d + m = 42$ أي $d$من قواسم العدد $42$:

وهذا يعني أن d من قوسم المشتركة للعدين30 و 40 أي:

$d \in \{1;2;3;6\}$ وعليه قيم $m = 42 - d$، $m \in \{41;40;39;36\}$

$(m;d) \in \{(41;1);(40;2);(39;3);(36;6)\}$

لدينا العلاقة التالية $u_3.u_5 = m.d$ و لدينا أيضا $u_3 + u_5 = 30$ ومنه الحدين $u_3$ و $u_5$ حلا المعادلة التالية:

$$x^2 - 30x + m.d = 0;\ \sqrt{\Delta} = \sqrt{(-30)^2 - 4(m.d)}$$

ولكي تقبل المعادلة السابقة حلولا في مجموعة الأعداد الطبيعية يجب أن $\sqrt{\Delta}$ طبيعيا والثنائية الوحيدة التي تحقق ذلك هي$(m;d) = (36;6)$ ومنه حلا المعادلة من أجل هذه الثنائية هي : $x_1 = 12;\ x_2 = 18$ وبما أن $(u_n)$ متتالية حسابية متزايدة فإن $u_3 = 12$ و $u_5 = 18$

استنتاج $u_0$: $u_0 = u_3 - 3r = 12 - 3(3) = 3$ $(r = u_4 - u_3 = 15 - 12 = 3)$

ومنه: $u_0 = 32$ و $u_5 = 15$ ، $u_3 = 12$

2) **<u>كتابة $u_n$ بدلالة</u> n:** $u_n = 3 + 3n$

**<u>اثبات أن 2010 حد من حدود $(u_n)$</u>**

نقوم بحل المعادلة $u_n = 2010 = 3 + 3n; n = 669 \in N$ ومنه الحد 2010 حد من حدود **<u>$(u_n)$</u>** ورتبته 670.

3) **<u>إيجاد الحد الذي ابتداءا منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة مساوي 10080</u>**

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + u_{p+4=10080}$$

$$\frac{5}{2}(3 + 3p + 3 + 3p + 12) = 10080$$

$$6p + 18 = 4032$$

$$p = 669$$

ومنه الحد هو الحد $u_{669} = 2010$

4) أ) حساب المجموع S:

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2n} = \frac{2n+1}{2}(3 + 3 + 6n) = (2n+1)(3+3n)$$

ب) استنتاج بدلالة n المجموعين $S_1$ و $S_2$

نلاحظ أن $S = S_1 + S_2$ و $S_2 = (u_0 + 3) + (u_2 + 3) + \cdots + (u_{2n-2} + 3) = S_1 + 3n - u_{2n}$

ومنه $2S_1 = S - 3n + u_{2n};\ S_1 = \frac{S+u_{2n}-3n}{2} = \frac{(2n+1)(3n+3)+3+6n-3n}{2} = \frac{(2n+1)(3n+3)+3n+3}{2}$

$$= \frac{3(n+1)(2n+2)}{2} = 3(n+1)^2$$

ومنه $S_2 = S_1 + 3n - u_{2n} = 3(n+1)^2 + 3n - 3 - 6n = 3(n+1)^2 - 3n - 3 = 3n(n+1)$

ومنه: $S_2 = 3n(n+1)$ ، $S_1 = 3(n+1)^2$ ، $S = (2n+1)(3+3n)$ ،

**<u>التمرين الرابع:</u>** $(x) = (3x+4)e^x\ ; D_f = ]-\infty; +\infty[$

1) أ) حساب $f'$ ، $''$

$$'(x) = 3e^x + (3x+4)e^x = (3x+7)e^x$$

$$''(x) = 3e^x + (3x+7) = (3x+10)e^x$$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^{x}$

بداية التراجع: من أجل n=1 محققة (حسبت سابقا)

نفرض صحة الخاصية من أجل n أي: $^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^{x}$ ونبرهن صحتها من أجل n+1 أي $^{(n+1)}(x) = (3x + 3n + 7)e^{x}$

لدينا $^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left((3x + 3n + 4)e^{x}\right)' = 3e^{x} + e^{x}(3x + 3n + 4)$

$= (3x + 3n + 7)\, e^{x}$ ( ومنه محققة من أجل n+1 )

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع:

$f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^{x}$، حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

ب) **استنتاج حل المعادلة التفاضلية:** $y'' = (3x + 16)e^{x}$

نلاحظ $y'' = {}^{(4)}(x)$ ومنه $^{(2)}(x)$ هو حل خاص لهذه المعادلة ومنه نستنتج حلول المعادلة التفاضلية

حل المعادلة التفاضلية: $y = (3x + 10)e^{x} + ax + b; (a; b) \in R^{2}$

2) أ) $\lim_{x\to-\infty} (x) = \lim_{x\to-\infty} (3x + 4)e^{x} = \lim_{x\to-\infty} 3xe^{x} + 4e^{x} = 0; (\lim_{x\to-\infty} xe^{x} = 0)$

تفسير النتيجة هندسيا: المنحنى $(C_f)$ يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$.

ب) **دراسة اتجاه تغيرات الدالة f:**

**النهايات:** $\lim_{x\to+\infty}(x) = \lim_{x\to+\infty} (3x + 4)e^{x} = +\infty$

**المشتق وإشارته:** من أجل $x \in R$ لدينا: $'(x) = (3x + 7)e^{x}$

**إشارته:**

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{7}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

ومنه متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty; -\frac{7}{3}\right]$ ومتزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{7}{3}; +\infty\right[$

**جدول التغيرات**

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{7}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f\left(-\frac{7}{3}\right)$ | ↗ | $+\infty$ |

3) أ) كتابة معادلة المماس $(\Delta)$ عند النقطة التي فاصلتها $-\frac{10}{3}$

$$(\Delta): \mathbf{y = f'\left(-\frac{10}{3}\right)\left(x+\frac{10}{3}\right) + f\left(-\frac{10}{3}\right); f'\left(-\frac{10}{3}\right) = -3e^{\left(-\frac{10}{3}\right)}; f\left(-\frac{10}{3}\right) = -7e^{-\frac{10}{3}}}$$

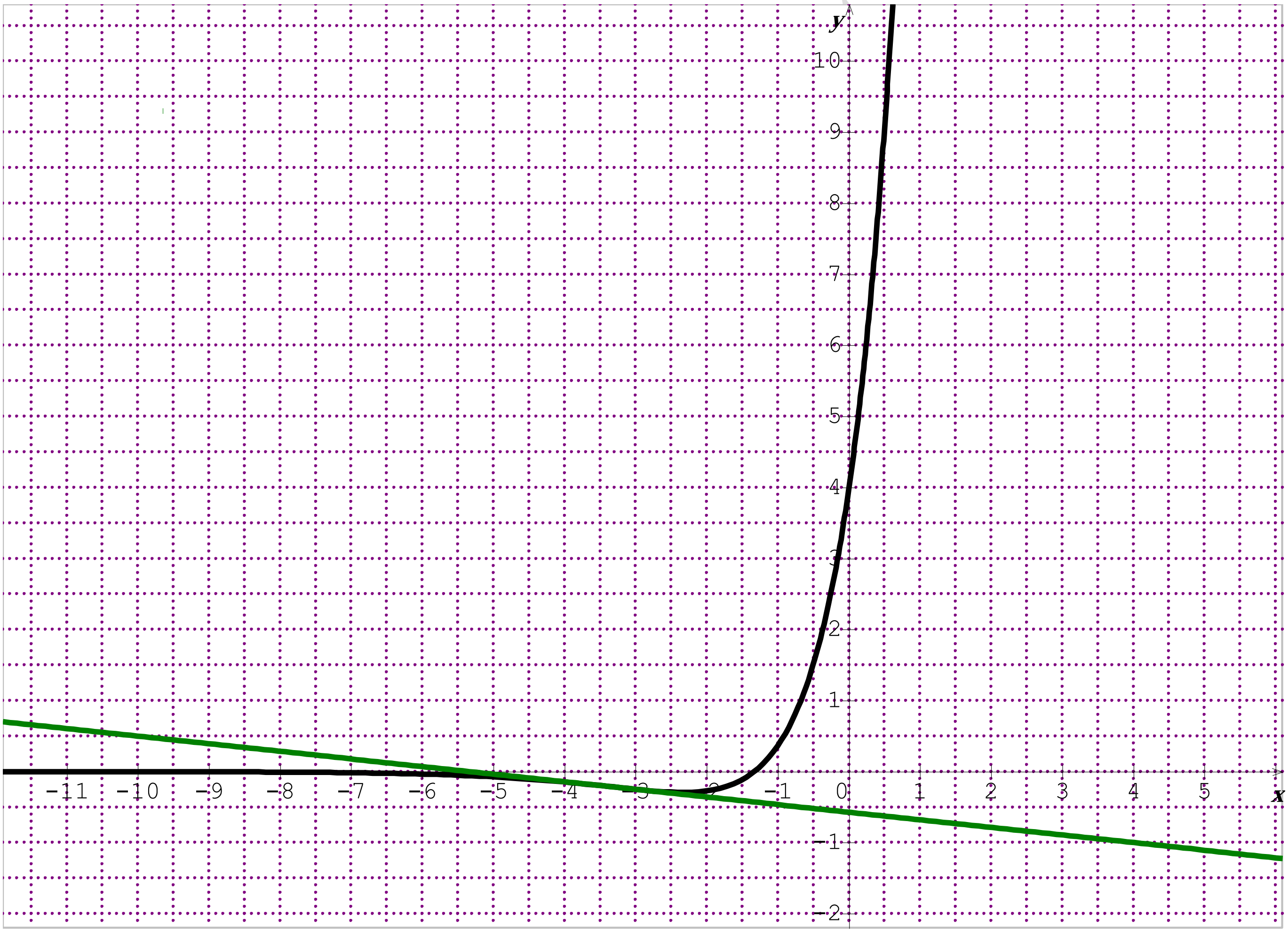
**معادلة المماس $(\Delta)$:** $(\Delta): \mathbf{y = -3e^{\left(-\frac{10}{3}\right)}x - 16e^{\left(-\frac{10}{3}\right)}}$

**ب) إثبات أن $\omega$ هي نقطة إنعطاف لـــــ $(C_f)$:**

لدينا: $''(x) = (3x+10)e^{x}$ المشتق الثاني ينعدم ويغير إشارته من أجل فاصلة $\omega$ ومنه $\omega$ هي نقطة إنعطاف لـــــ $(C_f)$

ج) رسم $(\Delta)$ و $(C_f)$ على المجال $]-\infty; 0]$

لدينا $(0) = 4$ و $(C_f) \cap (xx') = \left\{\left(-\frac{4}{3}; o\right)\right\}$




4) أ) إيجاد $\int_{-1}^{x} te^{t}dt$

نضع $\begin{cases} u(t) = t; u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{t}; v(t) = e^{t} \end{cases}$ ومنه:

$\int_{-1}^{x}$

إستنتاج الدالة الأصلية للدالة :

لدينا: $(x) = 3xe^{x} + 4e^{x}$ ومنه $F(x) = 3(x-1)e^{x} + 4e^{x} + c$

ومنه $F(x) = (3x+1)e^{x} + c$

ب) حساب بدلالة $\alpha$ المساحة $A(\alpha)$: المنحنى أسفل محور الفواصل

$\mathbf{A}($

ج) حساب النهاية