حلول موضوع اختبار بكالوريا 2010 في مادة الرياضيات

شعبة : تقني رياضي

من اعداد: الأستاذ ج حنيفي

مفتش التربية الوطنية لمادة الرياضيات

الموضوع الأوّل:

التمرين الأوّل:

1: حل المعادلة $(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$:

لدينا: $(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$ يعني $z=3-2i$ او $z^2+6z+10=0$

لنحل المعادلة: $z^2+6z+10=0$.

لدينا: $\Delta'=(3)^2-(1)(10)=-1=i^2$

فتقبل المعادلة حليم مركبين مترافقين، هما: $z_1=-3+i$ و $z_2=-3-i$

و منه المعادلة $(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$ تقبل ثلاثة حلول في $\mathbb{C}$ هي: $z_0=3-2i$، $z_1=-3+i$ و $z_2=-3-i$.

2: تعليم النقط A، C، D وI:

3: أ ــ اثبات انّ $\dfrac{z-3+2i}{z-1}=i$:

لدينا: $\begin{cases}\arg(z-3+2i)=\arg(z-1)+\dfrac{\pi}{2}\\ |z-3+2i|=|z-1|\end{cases}$ ، فيكون: $\begin{cases}\arg(z-3+2i)-\arg(z-1)=\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{|z-3+2i|}{|z-1|}=1\end{cases}$

و يكون: $\begin{cases}\arg\left(\dfrac{z-3+2i}{z-1}\right)=\dfrac{\pi}{2}\\ \left|\dfrac{z-3+2i}{z-1}\right|=1\end{cases}$

و نعلم انّ العدد المركب الذي طويلته 1 و $\dfrac{\pi}{2}$ عمدة له ، هو العدد: i.

اذن: $\dfrac{z-3+2i}{z-1}=i$

تعيين قيمة العدد z :

لدينا: $\dfrac{z-3+2i}{z-1}=i$ ، فيكون: $z-3+2i=i(z-1)$

و يكون: $z-3+2i=iz-i$

و منه : $z-iz=-i+3-2i$

و يكون: $(1-i)z=3-3i$

اذن: $z=\dfrac{3-3i}{1-i}=\dfrac{3(1-i)}{1-i}=3$

ب ـــ التحقق من انّ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$:

لدينا: $z_B-z_A=3-(3-2i)=2i$ و $z_C-z_D=(-3+i)-(-3-i)=2i$

نلاحظ انّ: $z_B-z_A=z_C-z_D$ ، و منه: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

طبيعة الرباعي $ABCD$:

بما انّ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ، فانّ $ABCD$ متوازي اضلاع.

جـــ ـــ كتابة العدد Z على الشكل الأسي:

لدينا: $Z=\dfrac{z_A-z_I}{z_B-z_J}=\dfrac{(3-2i)-1}{3-(1-2i)}=\dfrac{2-2i}{2+2i}=\dfrac{1-i}{1+i}$

و يكون: $Z=\dfrac{z_A-z_I}{z_B-z_J}=\dfrac{(1-i)^2}{2}=\dfrac{-2i}{2}=-i$

و نعلم انّ: $\begin{cases}\arg(-i)=-\dfrac{\pi}{2}\\ |-i|=1\end{cases}$ ، فيكون: $Z=e^{-\frac{\pi}{2}i}$

التحقق من انّ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JI}$:

لدينا: $z_B-z_A=2i$

و لدينا: $z_I-z_J=1-(1-2i)=2i$

نلاحظ انّ: $z_B-z_A=z_I-z_J$ ، و منه: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JI}$

طبيعة الرباعي $ABIJ$:

بما انّ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JI}$ ، فانّ $ABIJ$ متوازي اضلاع.

و لدينا: $\begin{cases}\arg\left(\dfrac{z_A-z_I}{z_B-z_J}\right)=-\dfrac{\pi}{2}\\ \left|\dfrac{z_A-z_I}{z_B-z_J}\right|=1\end{cases}$ ، فيكون: $\begin{cases}\left(\overrightarrow{JB};\overrightarrow{JA}\right)=-\dfrac{\pi}{2}\\ JA=JB\end{cases}$

اذن الرباعي $ABIJ$ مربع.

التمرين الثاني:

1: تعيين احداثيات النقطة G مرجح الجملة $\{(A;3);(B;1)\}$:

لدينا: $\begin{cases}x_G=\dfrac{3x_A+x_B}{4}\\ y_G=\dfrac{3y_A+y_B}{4}\\ z_G=\dfrac{3z_A+z_B}{4}\end{cases}$ ، و يكون: $\begin{cases}x_G=\dfrac{9+1}{4}\\ y_G=\dfrac{-3+2}{4}\\ z_G=\dfrac{6+1}{4}\end{cases}$ ، و منه: $\begin{cases}x_G=\dfrac{5}{2}\\ y_G=\dfrac{-1}{4}\\ z_G=\dfrac{7}{4}\end{cases}$ ، اذن: $G\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{1}{4};\dfrac{7}{4}\right)$

2: طبيعة و عناصر المجموعة (Γ) :

لدينا: $\left\|3\vec{MA}+\vec{MB}\right\|=4$ ، فيكون: $\left\|3\left(\vec{MG}+\vec{DG}\right)+\left(\vec{MG}+\vec{GB}\right)\right\|=4$

و يكون: $\left\|4\vec{MD}+\left(\underbrace{3\vec{GA}+\vec{DB}}_{\vec{0}}\right)\right\|=4$ ، و منه: $\left\|4\vec{MG}\right\|=4$

اذن: $MG=1$.

و منه المجموعة (Γ) سطح كرة مركزها النقطة G و نصف قطرها $R=1$.

3: أ ــ التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) :

انّ (Δ) يشمل النقطة $G\left(\frac{5}{2};-\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$ و يعامد المستوي $(P):x-2y+3z-7=0$.

اذن:الشعاع الناظمي $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ لــ (P) هو شعاع توجيه لــ (Δ).

فيكون تمثيله الوسيطي: $\begin{cases}x=\frac{5}{2}+t\\ y=-\frac{1}{4}-2t\ ;\ t\in\mathbb{R}\\ z=\frac{7}{4}+3t\end{cases}$

ب: تعيين احداثيات النقطة H، نقطة تقاطع (P)و (Δ):

بالتعويض بالتمثيل الوسيطي لــ (Δ) في معادلة (P)، نجد: $\left(\frac{5}{2}+t\right)-2\left(-\frac{1}{4}-2t\right)+3\left(\frac{7}{4}+3t\right)-7=0$

فيكون: $\frac{5}{2}+t+\frac{1}{2}+4t+\frac{21}{4}+9t-7=0$ ، و يكون: $14t+\frac{5}{4}=0$، و منه: $t=-\frac{5}{4\times14}=-\frac{5}{56}$

و عندئذ: $\begin{cases}x=\frac{5}{2}-\frac{5}{56}\\ y=-\frac{1}{4}-2\left(-\frac{5}{56}\right)\\ z=\frac{7}{4}+3\left(-\frac{5}{56}\right)\end{cases}$ ، و يكون: $H\left(\frac{135}{56};-\frac{1}{14};\frac{83}{56}\right)$

جــ ــ حساب المسافة بين النقطة G و المستوي (P):

انّ المسافة بين G و (P)، هي: $d=\frac{\left|\frac{5}{2}-2\left(-\frac{1}{4}\right)+3\left(\frac{7}{4}\right)-7\right|}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{\left|\frac{5}{2}+\frac{1}{2}+\frac{21}{4}-7\right|}{\sqrt{14}}=\frac{\frac{5}{4}}{\sqrt{14}}$

و يكون: $d=\frac{5}{4\sqrt{14}}=\frac{5\sqrt{14}}{56}$

4: اثبات انّ المستويين (P) و (P') متقاطعان:

لدينا: $(P): x-2y+3z-7=0$ و $(P'):\begin{cases} x=1+t \\ y=t+2\lambda \\ z=2-3t+2\lambda \end{cases} ; t\in\mathbb{R},\ \lambda\in\mathbb{R}$

انّ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$، شعاع ناظمي للمستوي (P).

و انّ الشعاعين $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ ، شعاعا توجيه للمستوي (P').

لنفرض $\vec{m}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاعا ناظميا لــ (P')، فيكون: $\begin{cases}\vec{u}.\vec{m}=0\\ \vec{v}.\vec{m}=0\end{cases}$.

و يكون:: $\begin{cases}a+b-c=0\\ 2b-2c=0\end{cases}$ ، و منه: $\begin{cases}a+b-c=0\\ b-c=0\end{cases}$ و عند اخذ $b=1$ يكون $c=1$ و $a=0$ ، و منه: $\vec{m}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

لاحظ انّ الشعاعين $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ و $\vec{m}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطيا ، و منه (P) و (P') متقاطعان.

تعيين مستقيم تقاطع المستويين (P) و (P'):

بالتعويض بالتمثيل الوسيطي للمستوي (P') في معادلة (P)، نجد: $(1+t)-2(t+2\lambda)+3(2-3t+2\lambda)-7=0$

و يكون: $1+t-2t-4\lambda+6-9t+6\lambda-7=0$

و منه: $2\lambda-10t=0$

اذن: $\lambda=5t$

لنعوض عن λ بـــ $5t$ في التمثيل الوسيطي للمستوي (P')، فيكون: $\begin{cases} x=1+t \\ y=t+2(5t) \\ z=2-3t+2(5t) \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$

و يكون: $\begin{cases} x=1+t \\ y=11t \\ z=2+7t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$ ، و هو التمثيل الوسيطي لمستقيم تقاطع المستويين (P) و (P').

التمرين الثالث:

لدينا: $f(x)=\dfrac{3xe^x-3x-4}{3(e^x-1)}$

1: تعيين العددين a و b :

لدينا: $f(x)=\dfrac{3xe^x-3x-4}{3(e^x-1)}=\dfrac{3x(e^x-1)-4}{3(e^x-1)}=\dfrac{3x(e^x-1)}{3(e^x-1)}+\dfrac{-4}{3(e^x-1)}$

و منه: $f(x)=x-\dfrac{4}{3(e^x-1)}$

2: حساب النهايات:

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\underset{\underset{-\infty}{\downarrow}}{\boxed{x}}-\dfrac{4}{3\left(\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\boxed{e^x}}-1\right)}\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\underset{\underset{+\infty}{\downarrow}}{\boxed{x}}-\dfrac{4}{3\left(\underset{\underset{+\infty}{\downarrow}}{\boxed{e^x}}-1\right)}\right]=+\infty$

و: $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\left[\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\boxed{x}}-\dfrac{4}{3\left(\underset{\underset{0^+}{\downarrow}}{\boxed{e^x-1}}\right)}\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}0}\left[\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\boxed{x}}-\dfrac{4}{3\left(\underset{\underset{0^-}{\downarrow}}{\boxed{e^x-1}}\right)}\right]=+\infty$

3: اثبات انّ الدالة f متزايدة تماما:

من اجل كلّ x من $\mathbb{R}^*$ ، لدينا: $f'(x)=1-4\dfrac{-3e^x}{\left[3\left(e^x-1\right)\right]^2}=1+\dfrac{12e^x}{9\left(e^x-1\right)^2}$

و منه: $f'(x)=1+\dfrac{4e^x}{3\left(e^x-1\right)^2}$

لاحظ انّ من اجل كلّ x من $\mathbb{R}^*$ ، يكون: $f'(x)\succ 0$

(و منه المطلوب)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4: أ ــ اثبات انّ المستقيمين (D) و (D') مقتربان للمنحني (C_f):

لدينا: $(D): y=x$

و لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{4}{3\left(\underset{\underset{+\infty}{\downarrow}}{\boxed{e^x}}-1\right)}\right]=0$

اذن : $(D): y=x$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$.

لدينا: $(D'): y=x+\dfrac{4}{3}$

و لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(x+\dfrac{4}{3}\right)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\dfrac{4}{3\left(\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\boxed{e^x}}-1\right)}-\dfrac{4}{3}\right]=\dfrac{4}{3}-\dfrac{4}{3}=0$

اذن : $(D): y=x+\dfrac{4}{3}$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

وضعية (C_f) بالنسبة الى المستقيم (D) و الى المستقيم (D'):

لدينا: $f(x)-x=-\dfrac{4}{3(e^x-1)}=\dfrac{4}{3(1-e^x)}$

و منه: من اجل $x\in]-\infty;0[$ يكون (C_f) واقعا اعلى من (D).

و من اجل $x\in]1;\alpha[$ يكون (C_f) واقعا اسفل من (D).

و لدينا: $f(x)-\left(x+\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{4}{3(e^x-1)}-\dfrac{4}{3}=\dfrac{-4-4(e^x-1)}{3(e^x-1)}=\dfrac{-4e^x}{3(e^x-1)}=\dfrac{4e^x}{3(1-e^x)}$

و منه: من اجل $x\in]-\infty;0[$ يكون (C_f) واقعا اعلى من (D').

و من اجل $x\in]1;\alpha[$ يكون (C_f) واقعا اسفل من (D').

ب: اثبات ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_0 و x_1 ، حيث $0,9\prec x_0\prec 0,91$ و $-1,66\prec x_1\prec -1,65$:

من جدول تغيراتها نلاحظ انّ الدالة f مستمرة و رتيبة تماما في المجال: $]0,9;0,91[$

و يمكن التحقق بالحساب انّ : $f(0,9)\times f(0,91)\prec 0$.

و نلاحظ كذلك انّ f مستمرة و رتيبة تماما في المجال: $]-1,66;-1,65[$

و يمكن التحقق ايضا بالحساب انّ : $f(-1,66)\times f(-1,65)\prec 0$.

(و منه المطلوب)

جـــ حساب $f(x)+f(-x)$:

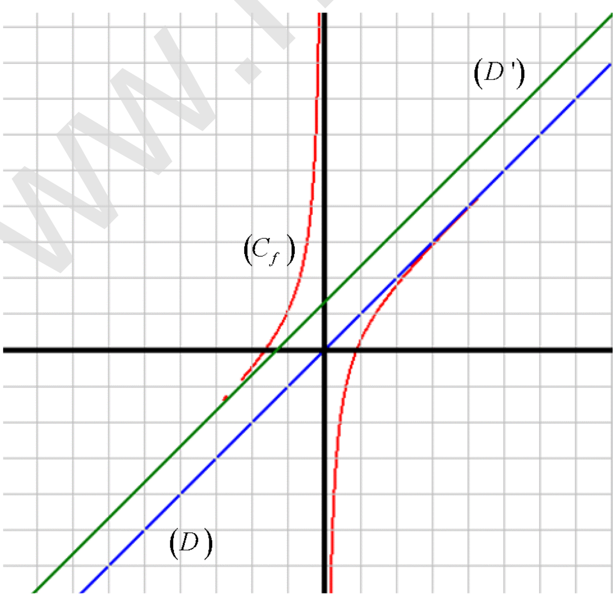
لدينا: $f(x)+f(-x)=\left[x-\dfrac{4}{3(e^x-1)}\right]+\left[-x-\dfrac{4}{3(e^{-x}-1)}\right]$

و يكون: $f(x)+f(-x)=-\dfrac{4}{3(e^x-1)}-\dfrac{4}{3(e^{-x}-1)}$

و منه: $f(x)+f(-x)=-\dfrac{4}{3(e^x-1)}-\dfrac{4e^x}{3(1-e^x)}=-\dfrac{4}{3(e^x-1)}+\dfrac{4e^x}{3(e^x-1)}$

و يكون: $f(x)+f(-x)=\dfrac{4e^x-4}{3(e^x-1)}=\dfrac{4(e^x-1)}{3(e^x-1)}$

اذن: $f(x)+f(-x)=\dfrac{4}{3}$



التفسير الهندسي:

المنحني (C_f) يقبل مركز تناظر هو النقطة $\omega\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$.

هـــ: مناقشة عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$

ندرس اذن تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات

الموازية لـــ (D).

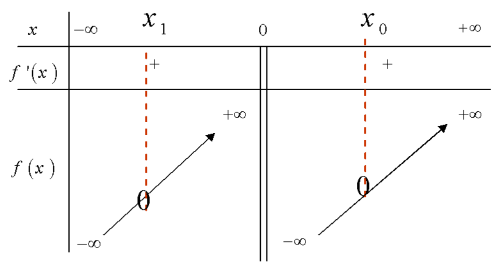
و من الشكل ينتج: اذا كان $m\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$ يكون للمعادلة حل وحيد

اذا كان $m\in\left[0;\frac{4}{3}\right]$ لا يكون للمعادلة حل.

5: دراسة تغيرات الدالة g :

لدينا: $g(x)=\left[f(x)\right]^2$

من اجل كلّ x من $\left]0;+\infty\right[$ ، يكون: $g'(x)=\left[f(x)\right]^2=2f(x)\times f'(x)$



لدينا : من اجل كلّ x من $\mathbb{R}^*$ ، يكون: $f'(x)\succ 0$

و منه : اشارة $g'(x)$ من اشارة $f(x)$

و من جدول تغيرات f تلاحظ:

من اجل $x\in\left]0;x_0\right[$ يكون $f(x)\prec 0$

من اجل $x\in\left]x_0;+\infty\right[$ يكون $f(x)\succ 0$

اذن: الدالة متناقصة تماما على المجال $\left]0;x_0\right]$ و متزايدة تماما على المجال $\left[x_0;+\infty\right[$.

التمرين الرابع:

1: تعيين α بحيث يقبل n القسمة على 3:

لدينا: $n=\overline{11\alpha 00}^7$

و منه: $n\equiv 7^2\alpha+7^3+7^4[3]$

و يكون: $n\equiv\alpha+1+1[3]$

و يكون: $n\equiv\alpha+2[3]$

يقبل n القسمة على 3 اذا وفقط اذا كان: $\alpha+2\equiv 0[3]$

و منه: $\alpha\equiv -2[3]$

و يكون: $\alpha\equiv 1[3]$

اذن: $\alpha\equiv 3k+1\ ;\ k\in\mathbb{N}$ مع $\alpha\prec 7$ ، و منه: $\alpha\in\{1\ ;\ 4\}$

2: تعيين α بحيث يقبل n القسمة على 5:

لدينا: $n\equiv 7^2\alpha+7^3+7^4[5]$

و يكون: $n\equiv 7^2\left(\alpha+7+7^2\right)[5]$

و يكون: $n\equiv 4(\alpha+2+4)[5]$

و منه: $n\equiv 4(\alpha+1)[5]$

يقبل n القسمة على 3 اذا وفقط اذا كان: $\alpha+1\equiv 0[5]$

و منه: $\alpha\equiv -1[5]$

و يكون: $\alpha\equiv 4[5]$

اذن: $\alpha\equiv 5k+4\ ;\ k\in\mathbb{N}$ مع $\alpha\prec 7$ ، و منه: $\alpha=4$

استنتاج قيمة α بحيث يقبل n القسمة على 15:

يقبل n القسمة على 15 اذا وفقط اذا كان يقبل القسمة على 3 و على 5.

اذن يقبل n القسمة على 15 من اجل $\alpha = 4$.

3: كتابة n في النظام العشري كم اجل $\alpha = 4$:

لدينا: $n = 7^2\alpha + 7^3 + 7^4$.

فيكون: $n = 7^2 \times 4 + 7^3 + 7^4$

و يكون: $n = 7^2\left(4+7+7^2\right) = 49\left(11+49\right) = 49 \times 60$

اذن: $n = 2940$

حلول موضوع اختبار بكالوريا 2010 في مادة الرياضيات

شعبة : تقني رياضي

من اعداد: الأستاذ ج حنيفي

مفتش التربية الوطنية لمادة الرياضيات

الموضوع الثاني:

التمرين الأوّل:

1: أ ــ كتابة العدد a على الشكل الأسي:

لدينا: $a = -2+2i\sqrt{3} = 2\left(-1+i\sqrt{3}\right)$

و يكون: $|a| = 2\left|-1+i\sqrt{3}\right| = 4$

و : $\arg(a) = \arg\left(-1+i\sqrt{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$

اذن: $a = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

ب ــ حل المعادلة $z^2 = -2+2i\sqrt{3}$:

انّ هذه المعادلة تقبل حلين متناظرين ، هما الجذران التربيعيان للعدد a.

لدينا: $a = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$

اذن حلي المعادلة هما: $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1+i\sqrt{3}$ و $z_1 = -2e^{i\frac{\pi}{3}} = -1-i\sqrt{3}$

أ ــ حساب طويلة و عمدة العدد المركب: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$:

لدينا: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)+2}{\left(-1-i\sqrt{3}\right)+2} = \frac{3+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

و يكون: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{3+i3\sqrt{3}+i\sqrt{3}-3}{4}$

و منه: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4\sqrt{3}i}{4} = \sqrt{3}i$

اذن: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \sqrt{3}i$

و منه : $\begin{cases} \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \sqrt{3} \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

ب ــ طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $\begin{cases} \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \sqrt{3} \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ يعني: $\begin{cases} AC = \sqrt{3}AB \\ \left(\vec{AB};\vec{AC}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ، و منه ABC قائم في A .

3:أ ــ التحقق انّ $B \in (E)$:

انّ (E) هي مجموعة النقط M ذات اللاحقة z ، بحيث: $\arg\left(\overline{z}+2\right) = \frac{\pi}{3}$.

و لدينا: $\overline{z_B}+2 = \left(-1+\sqrt{3}i\right)+2 = 1+\sqrt{3}i$

و يكون: $\arg\left(\overline{z_B}+2\right) = \frac{\pi}{3}$

اذن: $B \in (E)$.

ب ــ تعيين المجموعة (E):

لتكن M نقطة من (E) لاحقتها z و لنفرض M' نظيرة M بالنسبة لمحور الفواصل.

اذن لاحقة M' هي $\overline{z}$

و نعلم انّ $z_A = -2$.

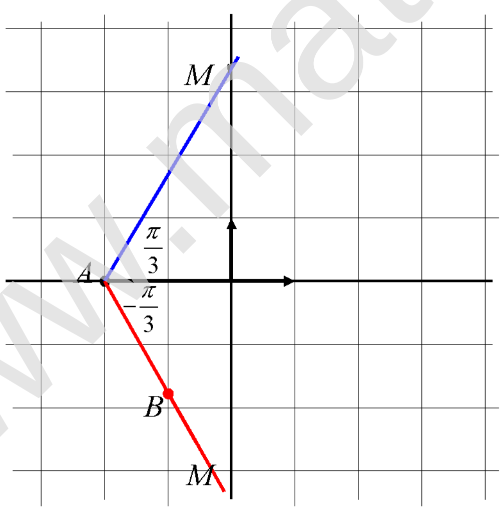
اذن: $\arg\left(\overline{z}+2\right) = \arg\left(z_{M'} - z_A\right) = \left(\vec{i};\vec{AM'}\right)$

و بما انّ $\arg\left(\overline{z}+2\right) = \frac{\pi}{3}$ ، فانّ: $\left(\vec{i};\vec{AM'}\right) = \frac{\pi}{3}$

اذن: $\left(\vec{i};\vec{AM}\right) = -\frac{\pi}{3}$

اذن المجموعة (E) هي:

نصف المستقيم $[AB)$ باستثناء النقطة A .



التمرين الثاني:

1: تعيين بواقي قسمة 10^n على 13 :

لدينا: $10^0 \equiv 1[13]$ ، $10^1 \equiv 10[13]$ ، $10^2 \equiv 9[13]$ ، $10^3 \equiv 12[13]$ ، $10^4 \equiv 3[13]$ ، $10^5 \equiv 4[13]$ و $10^6 \equiv 1[13]$.

و منه : من اجل $n = 6\alpha\ ;\ \alpha \in \mathbb{N}$ يكون: $10^n \equiv 1[13]$

من اجل $n = 6\alpha + 1\ ;\ \alpha \in \mathbb{N}$ يكون: $10^n \equiv 10[13]$

من اجل $n = 6\alpha + 2\ ;\ \alpha \in \mathbb{N}$ يكون: $10^n \equiv 9[13]$

من اجل $n = 6\alpha + 3\ ;\ \alpha \in \mathbb{N}$ يكون: $10^n \equiv 12[13]$

من اجل $n = 6\alpha + 4\ ;\ \alpha \in \mathbb{N}$ يكون: $10^n \equiv 3[13]$

من اجل $n = 6\alpha + 5\ ;\ \alpha \in \mathbb{N}$ يكون: $10^n \equiv 4[13]$

2: التحقق من انّ $\left(10^{2008}\right)^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0[13]$

لدينا: $2008 = 6 \times 334 + 4$

اذن: $10^{2008} \equiv 3[13]$

و منه: $\left(10^{2008}\right)^2 \equiv 9[13]$

و يكون: $\left(10^{2008}\right)^2 + 10^{2008} \equiv 12[13]$

اذن: $\left(10^{2008}\right)^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0[13]$

3: تعيين n بحيث $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0[13]$

لدينا: $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0[13]$ يعني $\left(10^n\right)^2 + 10^n \equiv 12[13]$

و لدينا : من اجل $n = 6\alpha\ ;\ \alpha \in \mathbb{N}$ يكون: $\left(10^n\right)^2 + 10^n \equiv 2[13]$

من اجل $n = 6\alpha + 1\ ;\ \alpha \in \mathbb{N}$ يكون: $\left(10^n\right)^2 + 10^n \equiv 110[13]$ ، اي: $\left(10^n\right)^2 + 10^n \equiv 6[13]$

من اجل $n = 6\alpha + 2\ ;\ \alpha \in \mathbb{N}$ يكون: $\left(10^n\right)^2 + 10^n \equiv 90[13]$ ، اي: $\left(10^n\right)^2 + 10^n \equiv 12[13]$

من اجل $n = 6\alpha + 3\ ;\ \alpha \in \mathbb{N}$ يكون: $\left(10^n\right)^2 + 10^n \equiv 156[13]$ ، اي: $\left(10^n\right)^2 + 10^n \equiv 0[13]$

من اجل $n = 6\alpha + 4\ ;\ \alpha \in \mathbb{N}$ يكون: $\left(10^n\right)^2 + 10^n \equiv 12[13]$

من اجل $n = 6\alpha + 5\ ;\ \alpha \in \mathbb{N}$ يكون: $10^n \equiv 20[13]$

و منه قيم n بحيث يكون $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0[13]$، هي: $n = 6\alpha + 2\ ;\ \alpha \in \mathbb{N}$ ، $n = 6\alpha + 4\ ;\ \alpha \in \mathbb{N}$

التمرين الثالث:

1: معادلة المستوي (P_1) :

انّ (P_1) يشمل $A(3;-2;2)$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي له.

فتكون معادلته: $(x-3)-(z-2)=0$.

و يكون: $x - z - 1 = 0$

2:أ ــ تبيان انّ $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P_2):

انّ (P_2) يحوي (AB) و يعامد (P_1) ، فيجب ان يكون $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ متعامدا مع $\vec{AB}$ و مع $\vec{u}$.

لدينا: $\vec{AB}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$ ، فيكون: $\vec{v}.\vec{AB}=-3+6-3=0$ (اذن $\vec{v}$ يعامد $\vec{AB}$)

و لدينا: $\vec{v}.\vec{u}=1+0-1=0$ (اذن $\vec{v}$ يعامد $\vec{u}$)

(و هو المطلوب)

ب ــ معادلة (P_2):

انّ (P_2) يشمل $A(3;-2;2)$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي له.

فتكون معادلته: $(x-3)+(y+2)+(z-2)=0$.

و يكون: $x+y+z-3=0$

3:أ ــ اثبات انّ المثلث ACD قائم في A:

لدينا: $\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$

و لدينا $\vec{CD}\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix}$، فاذا فرضنا $D(x;y;z)$ ، يكون: $\begin{cases}x-6=0\\y-1=-3\\z-5=-6\end{cases}$ و يكون : $\begin{cases}x=6\\y=-2\\z=-1\end{cases}$ ، اذن: $D(6;-2;-1)$

و منه: $\vec{AD}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$

فيكون: $\vec{AC}.\vec{AD}=9-9=0$ (اذن $\vec{AC}$ يعامد $\vec{AD}$)

اذن: المثلث ACD قائم في A .

مساحة المثلث ACD :

بما انّ ACD قائم في A ، فانّ مساحته هي: $S=\frac{AC\times AD}{2}=\frac{\sqrt{27}\times\sqrt{18}}{2}=\frac{3\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}}{2}=\frac{18}{2}=9$

ب ــ اثبات انّ (AB) يعامد (ACD) :

تحقق انّ: $\vec{AB}.\vec{AC}=0$ و $\vec{AB}.\vec{AD}=0$

و بالتالي (AB) يعامد مستقيمين غير متوازيين من المستوي (ACD) ، هما المستقيمان (AC) و (AD).

اذن المستقيم (AB) يعامد المستوي (ACD).

جــ ــ حجم رباعي الوجوه $ACBD$:

ليكن h ارتفاع $ACBD$ ، اذن $h = AB$.

و منه: $h = \sqrt{9+36+9} = \sqrt{9+36+9} = 3\sqrt{6}$

و يكون حجم $ACBD$ ، هو: $V = \dfrac{S \times h}{3} = \dfrac{9 \times 3\sqrt{6}}{3} = 9\sqrt{6}$

التمرين الرابع:

لدينا: $f(x) = x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

1: أ ــ اثبات انّ f فردية:

الدالة f معرفة على مجال متناظر بالنسبة الى الصفر ، و لدينا: $f(-x) = -x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = -f(x)$

و هو المطلوب ...

ب ــ اثبات انّ $f'(x) = 1+\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

لدينا: $f(x) = x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

فيكون: $f'(x) = 1+\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}x}{x^2+1} = 1+\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$

و يكون: $f'(x) = 1+\dfrac{\dfrac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = 1+\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

جــ ــ تغيرات f:

من اجل كلّ عدد حقيقي x ، يكون: $f'(x) \succ 0$.

و لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \underset{+\infty}{\boxed{x}}\left(1+\underset{0}{\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}}\right) = +\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

و بما انّ f فردية و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، فانّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2: أ ــ معادلة المماس (T) في النقطة ذات الفاصلة 0 :

لدينا: $y = f'(0).x + f(0)$

و يكون: $y = 2x$

ب ــ وضعية (C_f) بالنسبة الى (T):

لدينا: $f(x) - 2x = x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) - 2x = x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$

بما انّ $0 \succ x\sqrt{x^2+1} = f(x)-2x$ ، فانّ $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \succ 1$ ، و منه : $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1 \succ 0$

اذن: اشارة " $f(x)-2x$" من اشارة " x"

و منه من اجل $x \in]-\infty;0]$ ، يكون (C_f) واقعا اسفل من (T).

و منه من اجل $x \in [0;+\infty[$ ، يكون (C_f) واقعا اعلى من (T).

الإستنتــــــــــــــــاج:

المنحني (C_f) يغير وضعيته بالنسبة الى مماسه في نقطة التماس، فهذه النقطة هي نقطة انعطاف لــ (C_f).

جــ ــ اثبات انّ $(d): y = x+1$ مستقيم مقارب بجوار $+\infty$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)-(x+1)\right]$

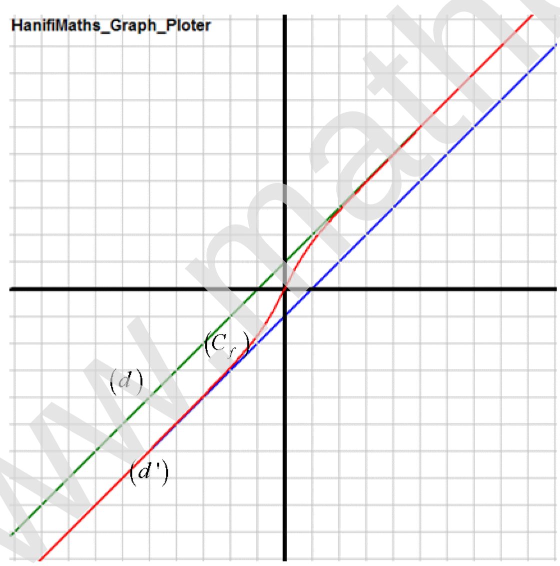
و يكون: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\boxed{\frac{x}{x\sqrt{1+\underbrace{\boxed{\frac{1}{x}}}_{0}}}}}_{1}-1\right) = 0$ (و منه المطلوب)

استنتاج معادلة المستقيم المقارب الاخر (d'):

الدالة f فردية ، فالمنحني (C_f) متناظر بالنسبة للمبدأ ، و منه فهو يقبل مستقيم مقارب آخر (d') بجوار $-\infty$ هو نظير المستقيم (d') بالنسبة الى المبدأ O .

و بما انّ: $(d): y = x+1$.

فإنّ: $(d'): -y = -x+1$ ، و منه: $(d'): y = x-1$



3: أ ــ اثبات انّ g زوجية:

لدينا: $g(x) = |x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

و يكون : $g(-x) = |-x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}}\right) = g(x)$

اذن g زوجية ،

ب: انشاء (C_g):

لاحظ انّ من اجل $x \in [0;+\infty[$ يكون $g(x) = f(x)$

و منه (C_g) ينطبق على (C_f) من اجل $x \in [0;+\infty[$ و هو متناظر بالنسبة لمحور التراتيب لان g زوجية .

مع تحيات الأستاذ ج حنيفي

ملاحظة: ارجو تنبيهي الى كلّ خطأ يمكن ان اكون قد وقعت فيه ، فجلّ من لا يخطأ .