الإجابة النموذجية لشعبة : تسيير وإقتصاد في مادة الرياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول :(03 نقاط)

1. الإجابة الصحيحة .أ. لأن المجموعة المرجعية هي $\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[$ ولدينا $\ln(-3x+2)\le\ln 3$ تكافئ $-3x+2\le 3$

ومنه $-3x\le 1$ ومنه $x\ge-\frac{1}{3}$ إذن $S=\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[\cap\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$ أي $S=\left[-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right[$.

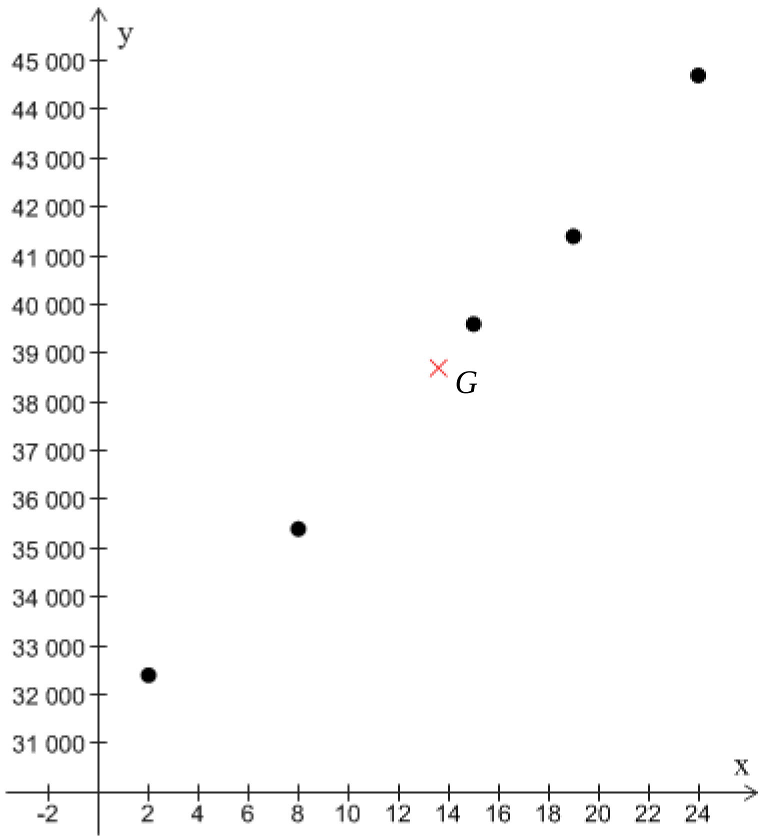
2. الإجابة الصحيحة .ب. لأن لدينا $F(x)=\ln x+k$ مع $k\in\mathbb{R}$

ومنه $F(e)=0$ يكافئ $1+k=0$ ومنه $k=-1$ أي $F(x)=-1+\ln x$.

3. الإجابة الصحيحة هي جـ . لأن $m=\frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}g(x)dx$ ومنه $m=\frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{12}\right]_{-2}^{2}$ ومنه $m=\frac{1}{3}$.

التمرين الثاني: (04.5 نقطة)

1. أ .التمثيل :



ب. يمكن إجراء تعديل خطي لهذه السحابة لأن لها شكل متطاول .

2. أ. لدينا $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i}{5}=13,6$ و $\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{5}y_i}{5}=38700$ ومنه $G(16,6;38700)$.

ب. لدينا $a=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}$ ومنه $a=\frac{2801400-2631600}{1230-924,8}$ ومنه $a=\frac{169800}{305,2}$ أي $a\simeq 556,35648$

ومنه مدوّر a إلى 10^{-3} هو $556,356$.

لدينا $y_G = ax_G + b$ ومنه $b = 38700 - 556,356\times 13,6$ ومنه مدوّر b إلى 10^{-3} هو $31133,558$.

---

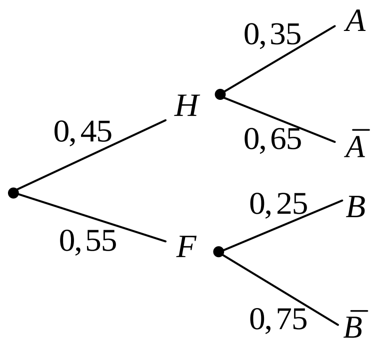
3. أ. لدينا $y = 556,356\times 30 + 31133,558$ ومنه $y = 47824,238$

أي أجرة موظف له 30 سنة أقدمية هي $47824,238$ دينار .

ب. لدينا $556,356x + 31133,558 \geq 50000$ ومنه $x \geq 33,9107$ وبالتالي بعد 34 سنة أقدمية .

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

1. الشجرة المثقلة :



2. أ.احتمال أن يكون رجلا يتحدث لغة أجنبية هو: $0,45\times 0,35$ أي $0,1575$.

ب.احتمال أن تكون امرأة لا تتحدث لغة أجنبية هو: $0,55\times 0,75$ أي $0,4125$.

جـ . احتمال أن يكون شخصا يتحدث لغة أجنبية هو: $0,45\times 0,35 + 0,55\times 0,25$ أي $0,295$.

3. لدينا $P_G(F) = \dfrac{P(F\cap G)}{P(G)}$ ومنه $P_G(F) = \dfrac{0,1375}{0.295}$ أي $P_G(F) = 0,466$.

التمرين الرابع: (08نقاط)

1. أ . .بماأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x-2) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

لدينا $f(x) = e^{2x}\left(1 - \dfrac{1}{e^x} - \dfrac{x}{e^{2x}} - \dfrac{2}{e^{2x}}\right)$

ومنه .بماأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{2x}} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x}} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^{2x}} = 0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

ب.الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع دوال تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$:

لدينا $f'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1$ ولدينا $(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2e^{2x} + e^x - 2e^x - 1 = 2e^{2x} - e^x - 1$

وبالتالي $f'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$

جـ . .بماأن $2e^x + 1 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $e^x - 1$.

لدينا $f'(x) = 0$ تكافئ $e^x - 1 = 0$ ومنه $x = 0$ ولدينا $f'(x) < 0$ تكافئ $e^x - 1 < 0$ ومنه $x < 0$.

$f'(x) > 0$ تكافئ $e^x - 1 > 0$ ومنه $x > 0$.

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$.

جدول تغيرات f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-2	↗ $+\infty$

2. أ. لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x-2)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-e^{x}\right)=0$

ومنه المستقيم (d) الذي معادلته $y=-x-2$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-x-2)$

لدينا $f(x)-(-x-2)=e^{2x}-e^{x}$ ومنه $f(x)-(-x-2)=e^{x}\left(e^{x}-1\right)$ ومنه المنحنى (C) فوق المستقيم (d) على المجال $]0;1[$ وتحته على المجال $]-\infty;0[$.

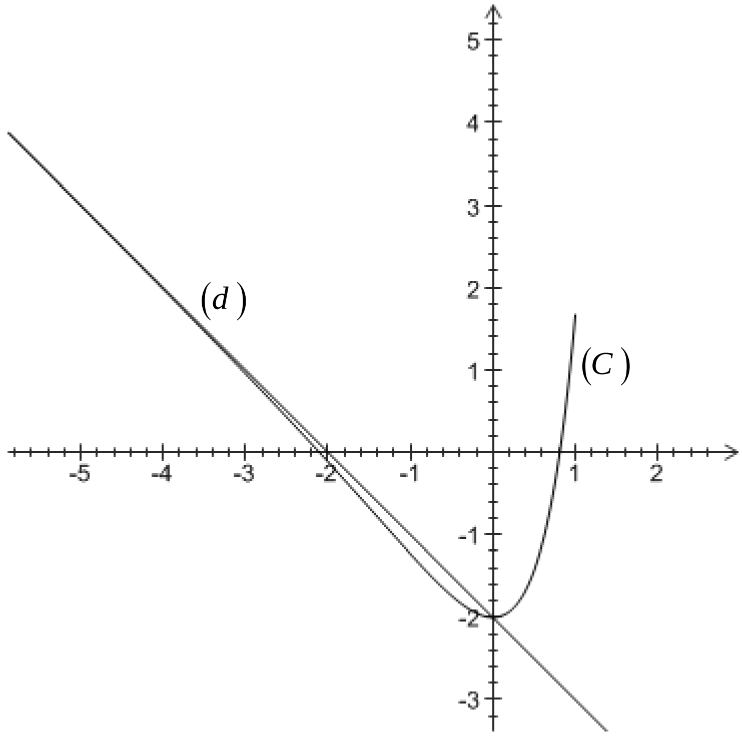
ب. لدينا $f(-2{,}11)\approx 0{,}003$ و $f(-2{,}10)\approx -0{,}007$ وبماأن f مستمرة ومتناقصة على المجال $]-2{,}11;-2{,}10[$

فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-2{,}11;-2{,}10[$.

لدينا $f(0{,}81)\approx -0{,}004$ و $f(0{,}82)\approx 0{,}06$ وبماأن f مستمرة ومتزايدة على المجال $]0{,}81;0{,}82[$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]-2{,}11;-2{,}10[$.

التفسير: المنحنى (C) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين $(\alpha;0)$ و $(\beta;0)$.

جـ .الرسم:



3. بماأن f مستمرة على المجال $]-\infty;1[$ فهي تقبل دوالا أصلية من الشكل :

$$F(x)=\frac{e^{2x}}{2}-e^{x}-\frac{x^{2}}{2}-2x+k \quad \text{مع} \quad k\in\mathbb{R} .$$

الموضوع الثاني:

التمرين الأول :(03 نقاط)

1. احتمال أن يكون التلميذ خارجيا هو $P(A)=\frac{600}{900}$ أي $P(A)=\frac{2}{3}$.
2. احتمال أن يكون التلميذ من السنة الأولى هو $P(B)=\frac{350}{900}$ أي $P(B)=\frac{7}{18}$.
3. احتمال أن يكون التلميذ من السنة الأولى وخارجيا $P(A\cap B)=\frac{250}{900}$ أي $P(A\cap B)=\frac{5}{18}$.
4. احتمال أن يكون التلميذ من السنة الأولى علما أنه خارجي هو $P_A(B)=\frac{250}{600}$ أي $P_A(B)=\frac{5}{12}$.

5. لدينا. $P(A)\times P(B)=\frac{7}{27}$ و $P(A\cap B)=\frac{5}{18}$

بماأن $P(A)\times P(B)\neq P(A\cap B)$ فإن الحادثتان غير مستقلتين .

التمرين الثاني: (05.5 نقاط)

1. لدينا $u_1=\frac{2}{5}u_0+\frac{1}{5}$ ومنه $u_1=\frac{2}{5}$ و $u_2=\frac{2}{5}u_1+\frac{1}{5}$ ومنه $u_2=\frac{9}{25}$.

2. من أجل $n=0$ لدينا $u_0=\frac{1}{2}$ ومنه $u_0>\frac{1}{3}$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي $u_n>\frac{1}{3}$ ونثبت صحتها من أجل $n+1$ أي $u_{n+1}>\frac{1}{3}$.

لدينا $u_n>\frac{1}{3}$ ومنه $\frac{2}{5}u_n>\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}$ ومنه $\frac{2}{5}u_n+\frac{1}{5}>\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$ أي $u_{n+1}>\frac{1}{3}$ وبالتالي الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>\frac{1}{3}$

3. من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{5}u_n+\frac{1}{5}-u_n$ ومنه $u_{n+1}-u_n=\frac{-3u_n+1}{5}$

ومنه $u_{n+1}-u_n=\frac{3}{5}\times\frac{\left(\frac{1}{3}-u_n\right)}{5}$ وبماأن $\frac{1}{3}-u_n<0$ فإن $u_{n+1}-u_n<0$ وبالتالي (u_n) متناقصة تماما .

بماأن المتتالية (u_n) متناقصة وهي محدودة من الأسفل فهي متقاربة .

4. لتكن المتتالية العددية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n-\frac{1}{3}$.

أ. من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{1}{3}$ و منه $v_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}$ ومنه $v_{n+1}=\frac{2}{5}u_n-\frac{2}{15}$

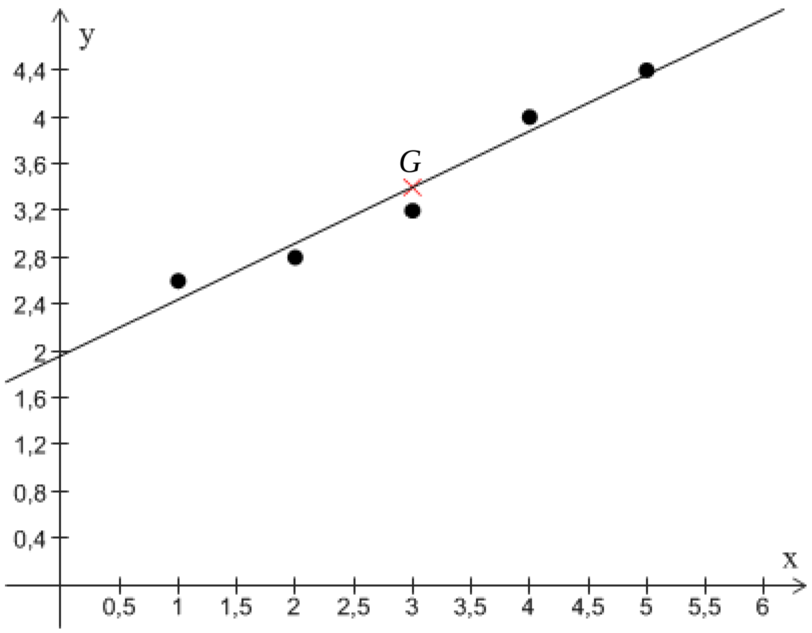
ومنه $v_{n+1}=\frac{2}{5}\left(u_n-\frac{1}{3}\right)$ أي $v_{n+1}=\frac{2}{5}v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ وحدها الأول $v_0=\frac{1}{6}$.

ب. من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $v_n=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$ و $u_n=v_n+\frac{1}{3}$ ومنه $u_n=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n+\frac{1}{3}$.

جـ. بماأن $-1<\frac{2}{5}<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}v_n=0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{3}$.

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

1. التمثيل :



2. لدينا $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i}{5}=3$ و $\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{5}y_i}{5}=3,4$ ومنه $G(3;3,4)$.

3. أ. لدينا $a=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i y_i-5\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}$ ومنه $a=\frac{55,8-51}{55-45}$ ومنه $a=\frac{4,8}{10}$ أي $a=0,48$

لدينا $y_G=ax_G+b$ ومنه $b=3,4-0,48\times 3$ ومنه $b=1,96$.

وبالتالي معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي $y=0,48x+1,96$.

4. لدينا رتبة سنة 2015 هي 10 ومنه $y=0,48\times 10+1,96$ ومنه $y=6,76$.

كمية الإنتاج المتوقعة سنة 2015 هي 6,76 طن .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1. من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+1}=1-\frac{x}{x^2+1}$.

2. بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

وبالتالي (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=1$ بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$.

3. ندرس إشارة الفرق $f(x)-1$:

لدينا $f(x)-1=-\frac{x}{x^2+1}$ وبما أن $x^2+1>0$ فإن إشارة $f(x)-1$ من نفس إشارة $-x$

وبالتالي (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty;0[$ ويقع تحته على المجال $]0;+\infty[$.

4. الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومشتقتها هي: $f'(x)=-\frac{(x^2+1)-x\times 2x}{(x^2+1)^2}$ ومنه $f'(x)=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$.

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة x^2-1 ومنه جدول إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-1[$ و $]1;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-1;1[$.

جدول تغيرات f :

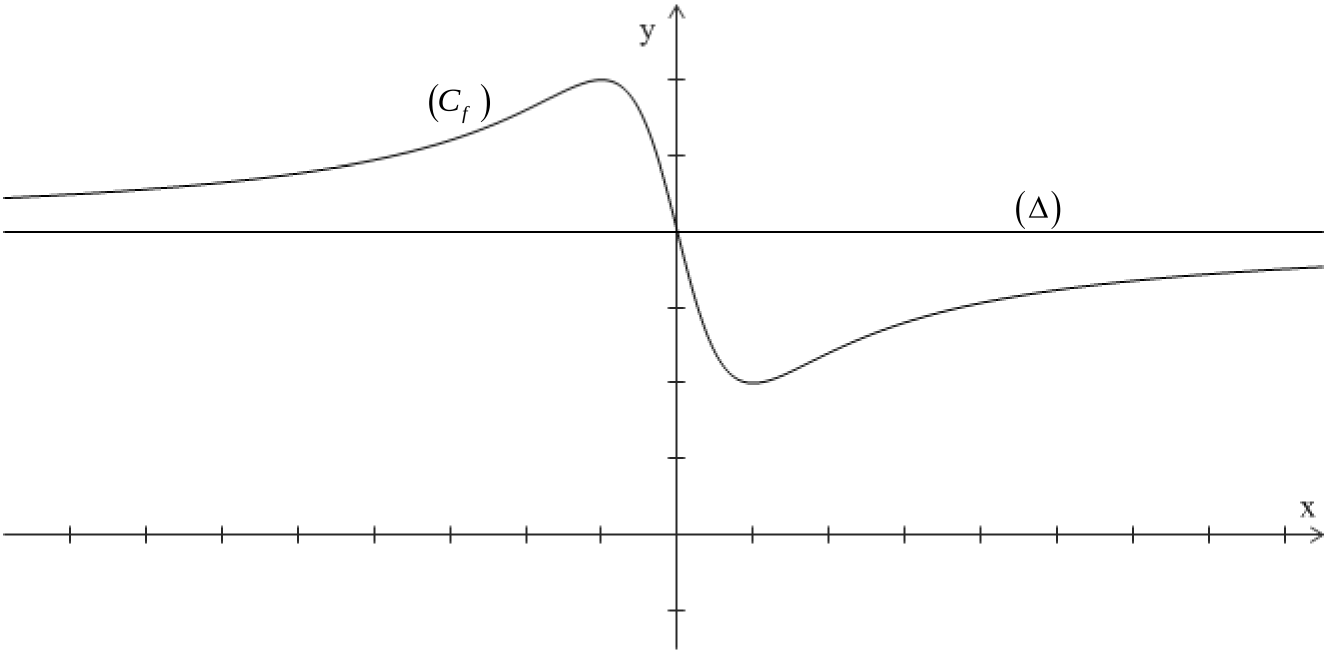
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

5. من أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x)=1-\frac{-x}{(-x)^2+1}=1+\frac{x}{x^2+1}$.

ولدينا $2-f(x)=2-1+\frac{x}{x^2+1}=1+\frac{x}{x^2+1}$ ومنه $f(-x)=2-f(x)$.

وبالتالي (C_f) يقبل النقطة $\Omega(0;1)$ مركز تناظر .

6. .



7. أ. لدينا $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1$ ومنه $\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{\ln 2}{2}$.

ت.احسب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز من المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$.

لدينا $A=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(1-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$ ومنه $A=\int_0^1 1dx-\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx$ ومنه $A=\left(1-\frac{\ln 2}{2}\right)\times 4cm^2$

وبالتالي $A=(4-2\ln 2)cm^2$.