الموضوع الأول

التمرين الأول :(06نقط)

1-أ) التعبير عن v_n بدلالة n.

لدينا : $v_n=v_0.q^n$ ومنه $v_n=2.3^n$.

ب)حساب الفرق $v_{n+1}-v_n$ بدلالة n

لدينا: $v_{n+1}-v_n=v_n.q-v_n=v_n(q-1)$

$=2.3^n(3-1)=4.3^n$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (v_n)

من الجواب السابق لدينا: $v_{n+1}-v_n=4.3^n\succ 0$

وعليه المتتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

2- أ) حساب المجموع S_n بدلالة n.

لدينا: $S_n=v_0+v_1+......+v_{n-1}=v_0\left[\frac{q^n-1}{q-1}\right]$

$=2\left[\frac{(3)^n-1}{3-1}\right]=3^n-1$

ب)تعيّن قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n=80$

$S_n=80$ معناه $3^n-1=80$.

معناه $3^n=81$ ومنه : $n=4$ لأن $3^4=81$

جـ)أثبات بالتراجع أن العدد 3^n-1 يقبل القسمة على2

*التحقق من صحة $P(0)$

لدينا: $3^0-1=0$ محققة لأن 0 يقبل القسمة على 2

نفرض أن $P(n)$ صحيحة : $3^n-1=2k$

ونبرهن صحة $P(n+1)$: $3^{n+1}-1=2k'$

لدينا: $3^n-1=2k$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

ومنه: $3^{n+1}-1=3^n.3-1=3^n(2+1)-1$

$=2k+2.3^n=2(k+3^n)=2k'$

التمرين الثاني : (06نقط)

1)دراسة توافق العددان 2013 و718 بترديد7

لدينا: $2013=7\times287+4$ و $718=7\times102+4$

ومنه العددان 2013 و718 متوافقان بترديد7 لأن لهما نفس باقي القسمة الأقليدية على 7 وهو 4

طريقة2: $2013-718=1295=7\times185$

ومنه العددان 2013 و718 متوافقان بترديد7 لأن الفرق بينهما مضاعف للعدد 7 .

2-أ) تعيين باقي قسمة 4^6 على7

لدينا: $4^6=4096\equiv1[7]$.

ب)استنتاج أنه : $4^{6n}-1\equiv0[7]$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

لدينا: $4^6\equiv1[7]$ ومنه $4^{6n}\equiv1[7]$

أي $4^{6n}-1\equiv0[7]$

3-أ)تعيين باقي قسمة لـ 2013 و718 على7

من الجواب 1 لدينا :

$2013=7\times287+4$ معناه $2013\equiv4[7]$

$718=7\times102+4$ معناه $718\equiv4[7]$

ب)تبيان أن $3\times718^{6n}+2013$ يقبل القسمة على7

نبين أن العدد $3\times718^{6n}+2013\equiv0[7]$

لدينا: $3\times718^{6n}+2013\equiv3\times4^{6n}+4[7]$

ومنه: $3\times718^{6n}+2013\equiv3\times1+4[7]$

وعليه $3\times718^{6n}+2013\equiv0[7]$

4-أ)التحقق أن $1434\equiv-1[7]$

لدينا $1434\equiv6[7]$ لأن $1434=7\times204+6$

$1434\equiv6[7]$ تكافئ $1434\equiv6-7[7]$ أي $1434\equiv-1[7]$

ب)تعيين الأعداد n الأصغرمن 25 و $1434^{2n}+n\equiv0[7]$

$1434\equiv-1[7]$ ومنه $1434^{2n}\equiv(-1)^{2n}[7]\equiv1[7]$

ومنه $1434^{2n}+n\equiv0[7]$ تكافئ $1+n\equiv0[7]$

ومنه $n\equiv-1[7]$ أي $n\equiv6[7]$

وأخيرا $n=7k+6$ حيث k عدد طبيعي.

التمرين الثالث (08نقط)

I1) تعيين عدد نقط تقاطع (C) ومحور الفواصل بيانيا

من البيان (C) يقطع محور الفواصل في نقطتين

2) تعيين إشارة العبارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

من البيان لدينا:

$f(x) \prec 0$ من أجل كل $x \in]-\infty;0[$

$f(x) \geq 0$ من أجل كل $x \in [0;+\infty[$

II-1 – أ) حساب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$

لدينا: $f(x)=x^3-4x^2+4x$

ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$

ب) حساب $f'(x)$ ودراسة اشارته

$f(x)=x^3-4x^2+4x$ ومنه $f'(x)=3x^2-8x+4$

$f'(x)=0$ معناه $3x^2-8x+4=0$ معناه $x=2$ أو $x=\frac{2}{3}$

$f'(x)\prec 0$ معناه $2/3 \prec x \prec 2$

و $f'(x)\succ 0$ معناه $x\succ 2$ أو $x \prec 2/3$

جـ) تشكيل جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		2/2		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(2/3)$	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

ملاحظة: $f(2/3)=32/27$ و $f(2)=0$

2-أ) اثبات ان : $f(x)=x(x-2)^2$

لدينا: $x^3-4x^2+4x=x(x^2-4x+4)=x(x-2)^2$

طريقة2: $x(x-2)^2=x(x^2-4x+4)=x^3-4x^2+4x$

ب) تعيين نقط تقاطع (C) مع محور الفواصل

تقاطع (C) ومحور الفواصل معناه $f(x)=0$

$f(x)=0$ معناه $x(x-2)^2=0$ معناه $x=0$ أو $x=2$

ومنه (C) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين

اللتين احداثياهما $(0;0)$ و $(2;0)$

3-أ) تبيان أن $g(x)=4x$

لدينا: $g(x)=4x$ معناه $y=g(x)$ وهي معادلة المماس

(Δ) للمنحنى (C) عند المبدأ

ومنه: $y=g(x)=f'(0)(x-0)+f(0)=4(x-0)+0=4x$

ب) تعيين فواصل نقط تقاطع (C) و (Δ)

فواصل نقط تقاطع (C) و (Δ) هي حلول

المعادلة $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ معناه $x(x-2)^2=4x$

معناه $x(x-2)^2-4x=0$

معناه $x((x-2)^2-4)=0$

معناه $x((x-2)-2)((x-2)+2)=0$

معناه $x^2(x-4)=0$ ومنه $x=0$ أو $x=4$.

4) تبيان ان (C) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $\frac{4}{3}$

نبين أن المشتق الثاني ينعدم عند $\frac{4}{3}$ ويغير إشارته

لدينا: $f'(x)=3x^2-8x+4$ ومنه $f''(x)=6x-8$

$f''(x)=0$ معناه $6x-8=0$ أي $x=\frac{4}{3}$

$f''(x)\prec 0$ معناه $6x-8\prec 0$ أي $x\prec\frac{4}{3}$

$f''(x)\succ 0$ معناه $6x-8\succ 0$ أي $x\succ\frac{4}{3}$

5) تعيين مجموعة قيم m

لدينا: المعادلة $f(x)=m$ تقبل ثلاثة حلول متمايزة

معناه (C) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=m$ ويوازي

حامل محور الفواصل في ثلاث نقط مختلفة

من البيان نجد: $0\prec m\prec f(\frac{2}{3})$ أي $0\prec m\prec\frac{32}{27}$

الموضوع الثاني

التمرين الأول :(06نقط)

1)حساب u_0

لدينا: $r=5$ و $u_0+u_1+u_2+u_3=34.....(1)$

لدينا: $u_1=u_0+r$ و $u_2=u_0+2r$ و $u_3=u_0+3r$

ومنه: (1) تكافئ $4u_0+6r=34$

تكافئ $u_0=\dfrac{34-6r}{4}=\dfrac{34-30}{4}=1$

2)إثبات أن $u_n=5n+1$

لدينا: $u_n=u_0+nr$ ولدينا: $u_0=1$ و $r=5$

ومنه: $u_n=5n+1$

3)تعيّن العدد الطبيعي n

بحيث: $u_{n+1}+u_n-8n=4033$

لدينا: $u_{n+1}+u_n-8n=5(n+1)+1+5n+1-8n=4033$

ومنه: $2n+7=4033$ أي $2n=4026$ إذن: $n=2013$

4)حساب المجموع S

لدينا: $S=u_0+u_1+....+u_{2013}=\dfrac{2013+1}{2}\left(u_0+u_{2013}\right)$

ولدينا: $u_0=1$ و $u_{2013}=5(2013)+1=10066$

ومنه: $S=\dfrac{2014}{2}\left(1+10066\right)=10137469$

5- أ)دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n)

لدينا: $v_n=2u_n+1$ لدراسة اتجاه تغير (v_n)

ندرس إشارة الفرق $v_{n+1}-v_n$

لدينا:
$$v_{n+1}-v_n=2u_{n+1}+1-2u_n-1$$
$$=2(u_{n+1}-u_n)=2r=10$$

وعليه المتتالية (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب) حساب المجموع S'

لدينا: $S'=v_0+v_1+....+v_{2013}$

ولدينا: $v_n=2u_n+1$

ومنه: $S'=(2u_0+1)+(2u_1+1)+....+(2u_{2013}+1)$

$S'=2S+2014=20276952$

التمرين الثاني (06نقط)

I-1)تعيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $3a+b$ على 7

لدينا: $a\equiv2[7]$ ومنه $3a\equiv6[7]...(1)$

ولدينا: $b\equiv6[7]....(2)$

بجمع (1) و(2)نجد: $3a+b\equiv6+6[7]$

ومنه: $3a+b\equiv5[7]$ لأن $12\equiv5[7]$

2)تعيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد a^2+3b^2 على 7

لدينا: $a\equiv2[7]$ ومنه $a^2\equiv2^2[7]$ أي $a^2\equiv4[7]....(1)$

لدينا: $b\equiv6[7]$ ومنه $3b^2\equiv3\times6^2[7]$ أي $3b^2\equiv3[7]...(2)$

بجمع (1) و(2)نجد: $a^2+3b^2\equiv4+3[7]$

ومنه: $a^2+3b^2\equiv0[7]$ لأن $7\equiv0[7]$

3-أ)التحقق أن: $b\equiv-1[7]$

لدينا: $b\equiv6[7]$ ومنه $b\equiv6-7[7]$ أي $b\equiv-1[7]$

ب)استنتاج باقي قسمة كلا من b^{2013} و b^{1434} على7

*لدينا: $b\equiv-1[7]$ ومنه $b^{2013}\equiv(-1)^{2013}[7]$

ومنه : $b^{2013}\equiv(-1)\ [7]$ أي $b^{2013}\equiv6[7]$

ومنه باقي قسمة b^{2013} على 7 هو 6

*لدينا: $b\equiv-1[7]$ ومنه $b^{1434}\equiv(-1)^{1434}[7]$

ومنه : $b^{1434}\equiv(1)\ [7]$

ومنه باقي قسمة b^{1434} على 7 هو 1

4)تعيّن الأعداد الطبيعية n

بحيث: $(a+b)^n+n\equiv0[7]$

لدينا: $a\equiv2[7]$ و $b\equiv-1[7]$ ومنه $a+b\equiv1[7]$

$(a+b)^n+n\equiv0[7]$ تكافئ $(1)^n+n\equiv0[7]$

تكافئ $1+n\equiv0[7]$

تكافئ $n\equiv6[7]$

تكافئ $n=7k+6$ و $k\in\mathbb{N}$

التمرين الثالث (08نقط)

1)تبيان أن $f(x)=1+\frac{3}{2x-4}$ **من أجل كل** $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$

لدينا: $f(x)=1+\frac{3}{2x-4}=\frac{2x-4+3}{2x-4}=\frac{2x-1}{2x-4}$

2)هل النقطة A **تنتمي للمنحنى** (C) **؟**

$f(1)=-\frac{1}{2}$ معناه $A(1;-\frac{1}{2})\in(C)$

لدينا: $f(1)=\frac{2(1)-1}{2(1)-4}=-\frac{1}{2}$ ومنه $A\in(C)$

3-أ(حساب نهاية الدالة f عند أطراف مجالي التعريف

لدينا: f معرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x}=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{2x}=1$

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2}f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2}\frac{3}{2x-4}=-\infty$

و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2}f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2}\frac{3}{2x-4}=+\infty$

ب)استنتاج أن (C) **يقبل مستقيمين مقاربين**

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=1$ معناه (C) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=1$

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\pm\infty$ معناه (C) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=2$

4) حساب $f'(x)$ **وتشكيل جدول تغيرات الدالة f**

لدينا: $f'(x)=\frac{2(2x-4)-2(2x-1)}{(2x-4)^2}=\frac{-6}{(2x-4)^2}$

$f'(x)<0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}-\{2\}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	‖	-
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$

5)جد فواصل نقط (C) **التي يكون ميل المماس هو** $-\frac{3}{2}$

ميل المماس لـ (C) يساوي $-\frac{3}{2}$ معناه $f'(a)=-\frac{3}{2}$

$f'(a)=-\frac{3}{2}$ معناه $\frac{-6}{(2a-4)^2}=-\frac{3}{2}$

معناه $(2a-4)^2=4$

معناه $a=1$ أو $a=3$

6)تعيّن إحداثيات نقط تقاطع (C) **مع محوري الإحداثيات**

مع محور الفواصل

نحل المعادلة $f(x)=0$

$f(x)=0$ معناه $2x-1=0$ ومنه $x=\frac{1}{2}$

مع محور التراتيب

نحسب $f(0)$: $f(0)=\frac{2(0)-1}{2(0)-4}=\frac{1}{4}$

)تعيين المنحنى (C) **من بين** (C_1) ،(C_2) ،(C_3)

المنحنى (C) هو (C_2) لأنه يشمل النقطة A