الموضوع الأوّل

التّمرين الأوّل:

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

لدينا: $(P):\ 2x+y-z+1=0$ وَ $(P'):\ x-2y+z-2=0$

1) إثبات أنّ (P) وَ(P') متقاطعان:

(P) وَ(P') متقاطعان يعني أنَّ $\overrightarrow{n_{(P)}}$ وَ $\overrightarrow{n_{(P')}}$ غير مرتبطان خطيّا.

لدينا: $\overrightarrow{n_{(P)}}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ وَ $\overrightarrow{n_{(P')}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ نلاحظ أنَّ: $\dfrac{-1}{1}\neq\dfrac{1}{-2}\neq\dfrac{2}{1}$ و منه: $\overrightarrow{n_{(P)}}$ وَ $\overrightarrow{n_{(P')}}$ غير مرتبطان خطيّا.

نستنتج أنَّ: **(P) وَ(P') متقاطعان.**

2) لدينا: (Γ) **مجموعة النقط** $M(x;y;z)$ حيث: $d\left(M,(P)\right)=d\left(M,(P')\right)$

- تعيين طبيعة المجموعة (Γ) :

$$d\left(M,(P)\right)=\frac{|2x+y-z+1|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-1)^2}}\qquad d\left(M,(P')\right)=\frac{|x-2y+z-2|}{\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(1)^2}}$$

$$d\left(M,(P)\right)=\frac{|2x+y-z+1|}{\sqrt{6}}\qquad d\left(M,(P')\right)=\frac{|x-2y+z-2|}{\sqrt{6}}$$

$$d\left(M,(P)\right)=d\left(M,(P')\right)\Leftrightarrow \frac{|2x+y-z+1|}{\sqrt{6}}=\frac{|x-2y+z-2|}{\sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow |2x+y-z+1|=|x-2y+z-2|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2x+y-z+1)=(x-2y+z-2)\\ \vee \\ (2x+y-z+1)=-(x-2y+z-2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+y-z+1-x+2y-z+2=0\\ \vee \\ 2x+y-z+1+x-2y+z-2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+3y-2z+3=0\\ \vee \\ 3x-y-1=0\end{cases}$$

إذن: المجموعة (Γ) هي إتحاد المستويين (Q) وَ (Q')

حيث: $(Q): x+3y-2z+3=0$ وَ $(Q'): 3x-y-1=0$.

3) التحقق أنَّ $A(1;2;0)$ تنتمي إلى المجموعة (Γ) :

$$A\in(\Gamma)\Leftrightarrow A\in(Q)\vee A\in(Q')$$

بعد تعويض إحداثيات A في معادلة (Q) وَ (Q') نجد أنَّ : $A\in(Q')$

و منه: $A(1;2;0)$ تنتمي إلى المجموعة (Γ)

4) لدينا: H وَ H' المسقطان العموديان للنقطة A على (P) وَ (P') على الترتيب.

أ- إيجاد التمثيل الوسيطي للمستقيمين (AH) وَ (AH') :

H المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) يعني أنَّ $\overrightarrow{n_{(P)}}$ وَ $\overrightarrow{AH}$ مرتبطان خطيا.

أي: $\overrightarrow{n_{(P)}}$ هو شعاع توجيه المستقيم (AH). وَ $A\in(AH)$

و منه: $(t\in\mathbb{R})$ $\quad (AH):\begin{cases}x=x_A+2t\\ y=y_A+t\\ z=z_A-t\end{cases}$. أي: $(AH):\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+t\\ z=-t\end{cases}$ .....; $(t\in\mathbb{R})$

’H المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P') يعني أنّ $\overrightarrow{n_{(P')}}$ وَ $\overrightarrow{AH'}$ مرتبطان خطيا.

أي: $\overrightarrow{n_{(P')}}$ هو شعاع توجيه المستقيم (AH'). وَ $A\in(AH')$

و منه: $(t'\in\mathbb{R})$ $\quad (AH'):\begin{cases}x=x_A+2t'\\ y=y_A+t'\\ z=z_A-t'\end{cases}$. أي: $(AH'):\begin{cases}x=1+t'\\ y=2-2t'\\ z=t'\end{cases}$ .....; $(t'\in\mathbb{R})$

ب-إحداثيات H وَ ’H :

H المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) يعني أنّ $\begin{cases}H\in(P)\\ H\in(AH)\end{cases}$ أي: $(AH)\cap(P)=\{H\}$

لإيجاد إحداثيات H

- ✓ نعوض $x\,;y\,;z$ الموجودة في التمثيل الوسيطي لِـ: (AH) في معادلة (P) .
- ✓ نبحث عن قيمة t .
- ✓ نعوض عن قيمة t المُحصَّل عليها سابقا في التمثيل الوسيطي للمستقيم (AH) .

$$\begin{aligned}(AH)\cap(P)=\{H\} &\Leftrightarrow 2(1+2t)+(2+t)-(-t)+1=0\\ &\Leftrightarrow 2+4t+2+t+t+1=0\\ &\Leftrightarrow 6t+5=0\\ &\Leftrightarrow t=-\frac{5}{6}\end{aligned}$$

نعوض $t=-\frac{5}{6}$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم (AH).

$$\begin{cases} x_H = 1+2\left(-\frac{5}{6}\right) \\ y_H = 2+\left(-\frac{5}{6}\right) \\ z_H = -\left(-\frac{5}{6}\right) \end{cases}$$ بالتبسيط نجد : $$\begin{cases} x_H = 1-\frac{10}{6} = \frac{6-10}{6} \\ y_H = 2-\frac{5}{6} = \frac{12-5}{6} \\ z_H = \frac{5}{6} \end{cases}$$ و منه: $H\left(\frac{-2}{3};\frac{7}{6};\frac{5}{6}\right)$

’H المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P') يعني أنَّ $\begin{cases} H \in (P') \\ H \in (AH') \end{cases}$ أي: $(AH')\cap(P')=\{H'\}$

لإيجاد إحداثيات ’H

- ✓نعوض $x\,;y\,;z$ الموجودة في التمثيل الوسيطي لـِ: (AH') في معادلة (P') .
- ✓نبحث عن قيمة t'.
- ✓نعوض عن قيمة t' المُحصَّل عليها سابقا في التمثيل الوسيطي للمستقيم (AH') .

$$\begin{aligned}(AH')\cap(P')=\{H'\} &\Leftrightarrow (1+t')-2(2-2t')+(t')-2=0 \\ &\Leftrightarrow 1+t'-4+4t'+t'-2=0 \\ &\Leftrightarrow 6t'-5=0 \\ &\Leftrightarrow t'=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

نعوض $t=\frac{5}{6}$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم (AH').

$$\begin{cases} x_{H'} = 1 + \left(\frac{5}{6}\right) \\ y_{H'} = 2 - 2\left(\frac{5}{6}\right) \\ z_{H'} = \left(\frac{5}{6}\right) \end{cases}$$ بالتبسيط نجد : $$\begin{cases} x_{H'} = 1 + \frac{5}{6} = \frac{6+5}{6} \\ y_{H'} = 2 - \frac{10}{6} = \frac{12-10}{6} \\ z_{H'} = \frac{5}{6} \end{cases}$$ و منه: $H'\left(\frac{11}{6};\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right)$

للتحقق:

بما أنّ $A \in (\Gamma)$ فإنَّ: $d\left(A,(P)\right) = d\left(A,(P')\right)$

$$\begin{aligned} d\left(M,(P)\right) &= AH \\ &= \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{7}{6} - 2\right)^2 + \left(\frac{5}{6} - 0\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-5}{3}\right)^2 + \left(\frac{-5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{25}{36} + \frac{25}{36}} \\ &= \sqrt{\frac{150}{36}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

$$d\left(M,(P')\right)=AH'$$
$$=\sqrt{\left(x_{H'}-x_A\right)^2+\left(y_{H'}-y_A\right)^2+\left(z_{H'}-z_A\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{11}{6}-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}-2\right)^2+\left(\frac{5}{6}-0\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{-5}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{25}{36}+\frac{25}{9}+\frac{25}{36}}$$
$$=\sqrt{\frac{150}{36}}=\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

و منه : $d\left(A,(P)\right)=d\left(A,(P')\right)$

5) إحداثيات I منتصف القطعة $[HH']$

$$x_I=\frac{x_H+x_{H'}}{2}\qquad y_I=\frac{y_H+y_{H'}}{2}\qquad z_I=\frac{z_H+z_{H'}}{2}$$

ت-ع

$$x_I=\frac{\frac{-2}{3}+\frac{11}{6}}{2}=\frac{7}{12}$$
$$y_I=\frac{\frac{7}{6}+\frac{1}{3}}{2}=\frac{9}{12}$$
$$z_I=\frac{\frac{5}{6}+\frac{5}{6}}{2}=\frac{10}{12}$$

ومنه $I\left(\frac{7}{12};\frac{3}{4};\frac{5}{6}\right)$

مساحة المثلث AHH' :

بما أنَّ :

1- $AH=AH'$ فإنَّ المثلث AHH' متساوي الساقين.

2- I منتصف $[HH']$ فإنَّ AI هو إرتفاع المثلث AHH' .

إذن : مساحة المثلث AHH' تُعطى كما يلي : $S=\dfrac{HH'\times AI}{2}$

$$\begin{aligned}HH' &= \sqrt{(x_{H'}-x_H)^2+(y_{H'}-y_H)^2+(z_{H'}-z_H)^2}\\ &= \sqrt{\left(\frac{11}{6}+\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}-\frac{5}{6}\right)^2}\\ &= \sqrt{\left(\frac{15}{6}\right)^2+\left(-\frac{5}{6}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{125}{18}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AI &= \sqrt{(x_A-x_I)^2+(y_A-y_I)^2+(z_A-z_I)^2}\\ &= \sqrt{\left(1-\frac{7}{12}\right)^2+\left(2-\frac{3}{4}\right)^2+\left(0-\frac{5}{6}\right)^2}\\ &= \sqrt{\left(\frac{5}{12}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{25}{144}+\frac{25}{16}+\frac{25}{36}}\\ &= \sqrt{\frac{350}{144}}=\sqrt{\frac{175}{72}}\end{aligned}$$

$$S = \frac{HH' \times AI}{2}$$

و منه

$$S = \frac{\sqrt{\frac{125}{18}} \times \sqrt{\frac{175}{72}}}{2}$$

$$S = \frac{\sqrt{\frac{21875}{1296}}}{2} \approx 2.05 \ (ua)$$

التّمرين الثّاني:

I) لدينا: $f(x) = \sqrt{2x+8}$ وَ $D_f = [0; +\infty[$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1

أ- حساب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{2x+8} = +\infty$.

ب-إتجاه تغيّر الدالة f

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+8}} = \frac{1}{\sqrt{2x+8}}$$

f' موجبة على المجال $[0; +\infty[$ و هذا يعني أنَّ : f متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.

جدول التغيرات:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\sqrt{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

2) إحداثيات نقطة تقاطع (C) مع المستقيم $(\Delta): y = x$:

نحل المعادلة $f(x) = x$ أي $f(x) - x = 0$

$$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+8} - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{2x+8} - x\right)\left(\sqrt{2x+8} + x\right)}{\left(\sqrt{2x+8} + x\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x+8}^2 - x^2}{\left(\sqrt{2x+8} + x\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 2x + 8}{\left(\sqrt{2x+8} + x\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 8 = 0$$

نستعمل المميز Δ لحل المعادلة : $-x^2 + 2x + 8 = 0$

الموضوع الأوّل

$\Delta = 2^2 - 4(-1)(8) = 36$ و منه $\sqrt{\Delta} = 36$

المعادلة تقبل حلان: $x_1 = \frac{-2-6}{-2} = 4$ وَ $x_2 = \frac{-2+6}{-2} = -2 \notin [0; +\infty[$

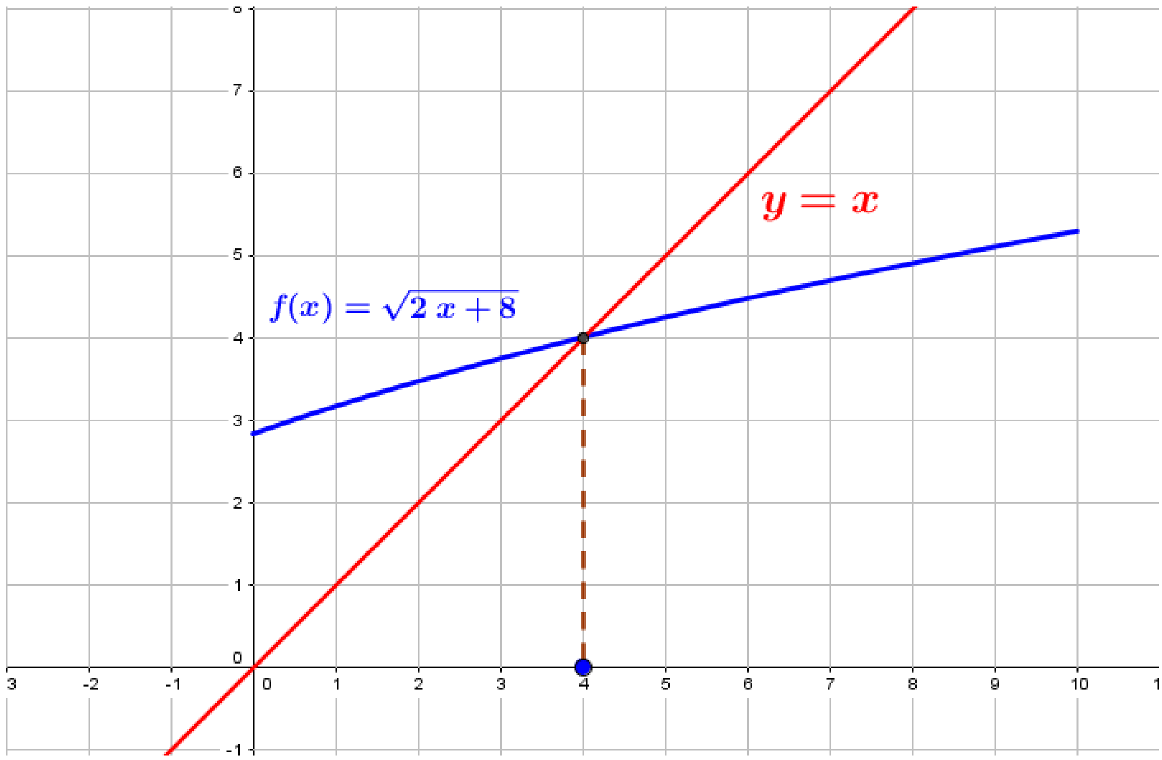
إذن: المعادلة : $-x^2 + 2x + 8 = 0$ تقبل حل وحيد على $[0; +\infty[$ هو $x = 4$

ومنه: المعادلة : $f(x) = x$ تقبل حل وحيد هو $x = 4$

و منه: $(\Delta) \cap (C) = \{4\}$

الرسم:

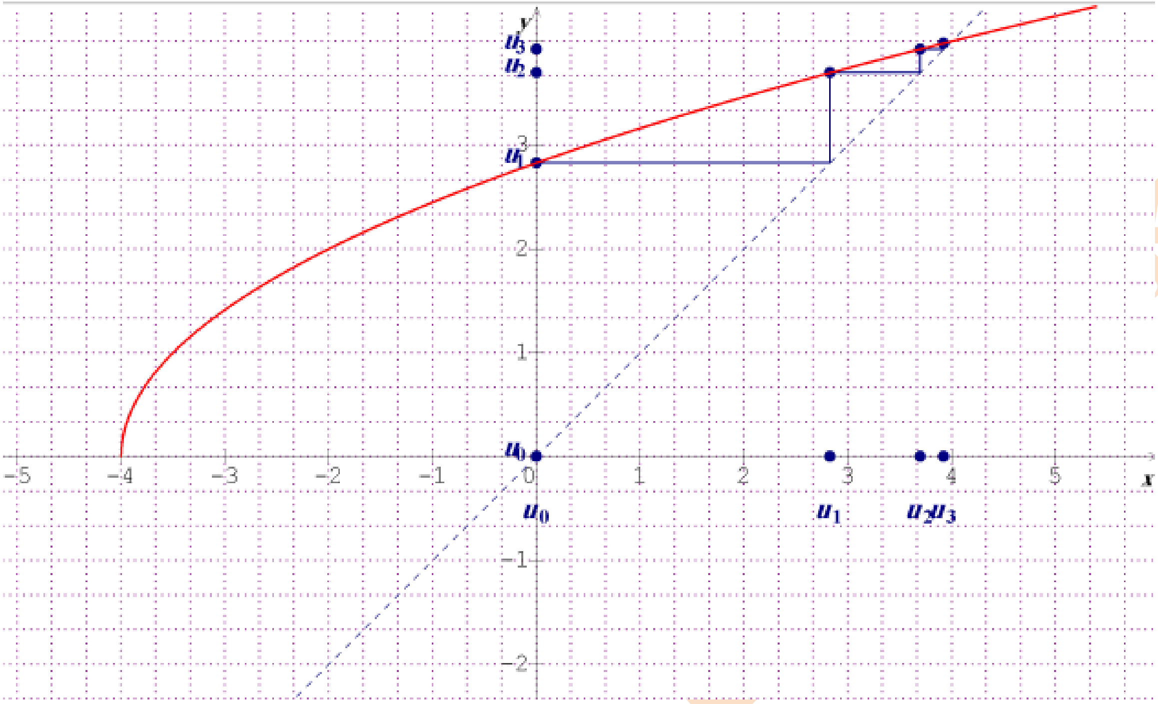
الموضوع الأوّل



II) لدينا : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ أي : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{2U_n + 8} \end{cases}$

1) تمثيل الحدود :

الموضوع الأوّل



2) التخمين: من الرسم نُخمّن أنّ (U_n) متزايدة .

3) .

أ- البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le U_n < 4$

1- التحقق : من أجل $n = 0$

لدينا : $0 \le U_0 = 0 < 4$ إذن الخاصية مُحققة

2- الفرضية : نفرض أنّ الخاصية صحيحة من اجل n أي: $0 \le U_n < 4$

و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي: $0 \le U_{n+1} < 4$

لدينا حسب الفرضية : $0 \le U_n < 4$

بالضرب في العدد 2 نجد: $0 \le 2U_n < 8$

نضيف العدد 8 نجد : $8 \le 2U_n + 8 < 16$

بما أنّ الدّالة " $\sqrt{\ }$ " متزايدة و $2U_n + 8 > 0$ فإنّ: $0 < \sqrt{8} \le \sqrt{2U_n + 8} < \sqrt{16}$

و منه : $0 \le U_{n+1} < 4$

3- نستنتج أنّ الخاصية صحيحة من اجل n أي: $0 \le U_n < 4$.

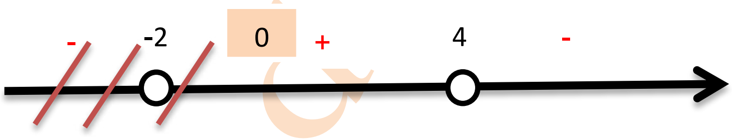
ب- دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (U_n)

ندرس إشارة الفرق : $U_{n+1}-U_n$.

لدينا :

$$U_{n+1}-U_n=\sqrt{2U_n+8}-U_n$$
$$=\frac{\left(\sqrt{2U_n+8}-U_n\right)\left(\sqrt{2U_n+8}+U_n\right)}{\left(\sqrt{2U_n+8}+U_n\right)}$$
$$=\frac{-U_n^{\ 2}+2U_n+8}{\left(\sqrt{2U_n+8}+U_n\right)}$$

المقام موجب , و البسط ينعدم من أجل القيمتين 2- وَ 4



بما أنَّ: $0\le U_n<4$ فإنَّ : $U_{n+1}-U_n\ge 0$ و منه (U_n) متزايدة.

ج- إثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\mathbf{4-U_{n+1}\le\frac{1}{2}\left(4-U_n\right)}$:

لدينا: (U_n) متزايدة يكافئ أنَّ: $U_{n+1}-U_n\ge 0$

وَ لدينا: $U_n<4$ و منه: $4-U_n>0$

إذن:

$$U_{n+1}-U_n\ge 0\Leftrightarrow U_{n+1}\ge U_n$$
$$\Leftrightarrow -U_{n+1}\le -U_n$$
$$\Leftrightarrow 4-U_{n+1}\le 4-U_n$$
$$\Leftrightarrow 4-U_{n+1}\le\frac{1}{2}\left(4-U_n\right)$$

لأنَّ: $\frac{1}{2}\left(4-U_n\right)\le\left(4-U_n\right)$

و منه: $\mathbf{4-U_{n+1}\le\frac{1}{2}\left(4-U_n\right)}$

- إستنتاج أنَّ: $4-U_n \leq \frac{1}{2^n}(4-U_0)$:

لدينا: $4-U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4-U_n)$

و منه:
$$\begin{cases} 4-\cancel{U_1} \leq \frac{1}{2}(4-U_0) \\ 4-U_2 \leq \frac{1}{2}(4-\cancel{U_1}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 4-\cancel{U_{n-1}} \leq \frac{1}{2}(4-\cancel{U_{n-2}}) \\ 4-U_n \leq \frac{1}{2}(4-\cancel{U_{n-1}}) \end{cases}$$

بإجراء عملية جداء أطراف المتباينة و بعد الإختزال نجد: $4-U_n \leq \frac{1}{2^n}(4-U_o)$

د- إستنتاج $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$:

لدينا : $4-U_n \leq \frac{1}{2^n}(4-U_o)$ وَ $U_o = 0$ إذن : $4-U_n \leq \frac{4}{2^n}$

و لدينا أيضا: $4-U_n > 0$

و منه: $\lim\limits_{n\to+\infty}(4-U_n) \leq \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{2^n}$

و بما $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{2^n} = 0$ وَ $4-U_n > 0$ فـــإنَّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}(4-U_n) = 0$

و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 4$.

التّمرين الثّالث:

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. من أجل كل نقطة M من المستوي لاحقتها العدد المركب z حيث $(z \neq 1)$ نرفق النقطة M' لاحقتها العدد المركب z' حيث : $z' = \frac{z-2}{z-1}$

1) حل المعادلة $z' = z$ في مجموعة الأعداد المركبة:

$$z' = z \Leftrightarrow \frac{z-2}{z-1} = z$$
$$\Leftrightarrow (z-2) = z(z-1)$$
$$\Leftrightarrow z-2 = z^2 - z$$
$$\Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$$

نحل المعادلة: (ζ) ......$z^2 - 2z + 2 = 0,$

$\Delta = -4$ إذن للمعادلة (ζ) حلاَّن مركبين مترافقين هما:

$$\begin{cases} z' = \dfrac{2-i\sqrt{|-4|}}{2} = 1-i \\ z'' = \dfrac{2+i\sqrt{|-4|}}{2} = 1+i \end{cases}$$

2) لدينا: $z_1 = z_A = 1-i$ وَ $z_2 = z_B = 1+i$.

أ- كتابة $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسي:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$= \frac{1+i+i-1}{2}$$
$$= i$$

و مـــنه:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = 1 \\ arg\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, avec : k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

نستنتج أنَّ: $\frac{z_2}{z_1} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

ب-إثبات أنَّ النقطة B صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ .

لدينا: $\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_B}{z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ و هذا يكافئ: $\frac{z_B-z_o}{z_A-z_o}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ حيث z_o هي لاحقة المبدأ " O ".

و هذا يكافئ: $(z_B-z_o)=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A-z_o)$

ومنه: النقطة B صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ و زاويته $\theta=\frac{\pi}{2}$

3) لدينا: $z_C=2$ وَ $z_D=1$

- تعيين (Γ) :

M' تنتمي الى محور التراتيب يعني أنَّ $(i^2=-1)$ $z'\in i\mathbb{R},$ (تخيلي صرف).

$$z'\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{z-2}{z-1}=i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow arg\left(\frac{z-2}{z-1}\right)=arg\,(i\mathbb{R})$$

$z_C=2$ وَ $z_D=1$ إذن:

$$arg\left(\frac{z-2}{z-1}\right)=arg\,(i\mathbb{R})\Leftrightarrow arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_D}\right)=arg\,(i\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{DM};\overrightarrow{CM}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

و منه: (Γ) هي الدائرة التي قطرها $[CD]$ ما عدا D وَ C

مركزها ω ذات اللاحقة

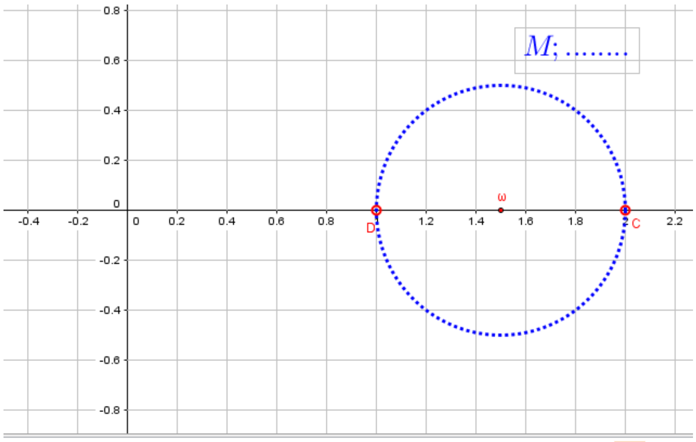
$$z_\omega=\frac{z_D+z_C}{2}$$
$$=\frac{1+2}{2}$$
$$z_\omega=\frac{3}{2}$$

و منه $\omega=\left(\frac{3}{2};0\right)$

و نصف قطرها :

$$r=\frac{|z_C-z_D|}{2}$$
$$=\frac{|2-1|}{2}=\frac{1}{2}$$

إنشاء (Γ):



4) h هو التحاكي الذي مركزه المبدأ و نسبته 2

أ- تعيين طبيعة التحويل $S = h \circ R$ و إعطاء عناصره المميزة:

$$S = h_{(O;2;0)} \circ R_{\left(O;1;\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$S = S_{\left(O;2\times1;0+\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

$$S = S_{\left(O;2;\frac{\pi}{2}\right)}$$

و منه : S تشابه مباشر مركزه المبدأ و نسبته 2 و زاويته $\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

ب-العبارة المركبة للتشابه S :

$\left(z' - z_O\right) = 2e^{\frac{\pi}{2}}\left(z - z_O\right)$ و منه : $z' = 2e^{\frac{\pi}{2}}z$

بما أنَّ: $2e^{\frac{\pi}{2}} = 2i$ فـــــــــــــــإنَّ: $z_{\omega'} = 2iz_{\omega}$

ج- تعيين (Γ') صورة (Γ) بالتشابه S :

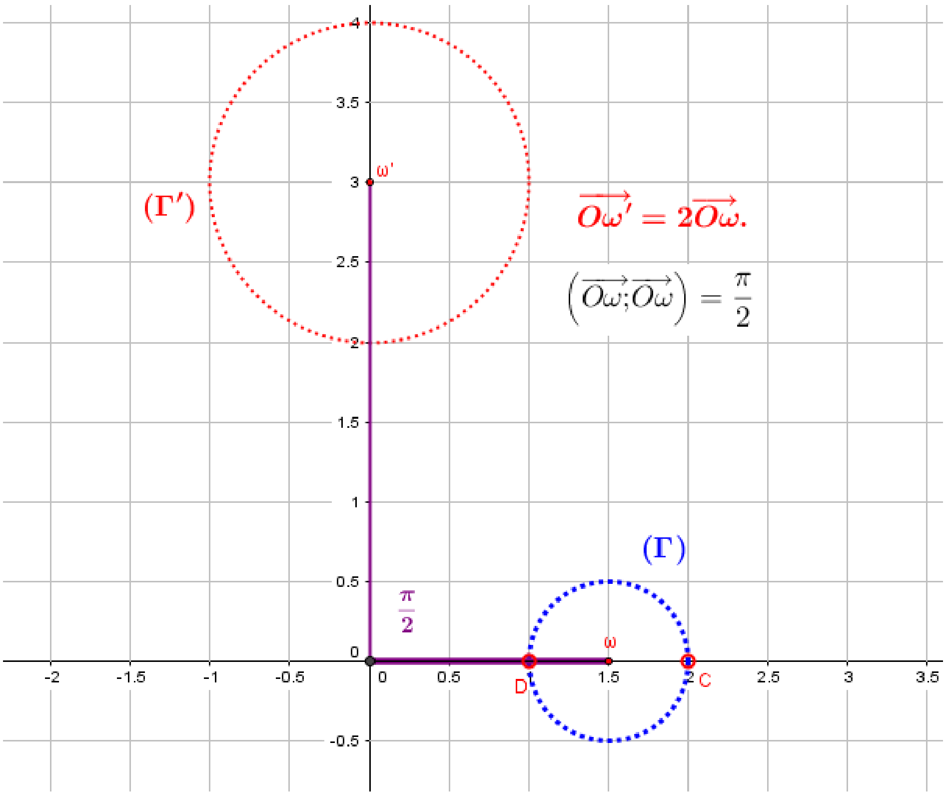
(Γ') صورة بالتشابه S (Γ) يكافئ ω' صورة ω بالتشابه S حيث ω' مركز الدائرة (Γ).

ω' صورة ω بالتشابه S يكافئ $z_{\omega'} = 2iz_{\omega}$ و منه : $z_{\omega'} = 2i\left(\frac{3}{2}\right)$
$= 3i$

إذن: (Γ') هي الدائرة ذات المركز $\omega'(0;3)$. و هي صورة الدائرة (Γ) ذات المركز $\omega = \left(\frac{3}{2};0\right)$

و نصف قطرها : $r' = 2r = 2\times\frac{1}{2} = 1$

إنشاء (Γ'):



التّمرين الرّابع:

I) لدينا : $g(x) = x^2 + 1 - ln(x)$ و : $D_g =]0;+\infty[$

الموضوع الأوّل

1) دراسة تغيرات الدالة g :

أ- النهايات

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 + 1 - \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 + 1 - \ln(x) = +\infty$$

ب-المشتقة: $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$

ج- إشارة المشتقة:

المقام : موجب تماما لأنَّ: $x \in]0; +\infty[$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	

2) حساب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2} - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 1.85$$

* $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$ وَ هي قيمة حدّية صغرى للدالة g. و منه $\forall x \in]0; +\infty[$ فإنَّ $g(x) > 0$

II) $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$ وَ $D_f =]0; +\infty[$.

1) النهايات

الموضوع الأوّل

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+x-1\right)=+\infty$$ لأنّ: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=0$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(\frac{\ln x}{x}+x-1\right)=-\infty$$ لأنّ: $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(\ln x\times\frac{1}{x}\right)=-\infty$.

(2

أ- إثبات أنّ: $\forall x\in\left]0;+\infty\right[$ فإنّ $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$:

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{\left(\frac{1}{x}\times x\right)-(1\times\ln x)}{x^2}+1\\ &=\frac{1-\ln x}{x^2}+1\\ &=\frac{x^2+1-\ln x}{x^2}\\ &=\frac{g(x)}{x^2}\end{aligned}$$

إشارة الدالة f' :

$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}>0$: لأنّ: $g(x)>0\wedge x^2>0$

ب- جدول تغيرات الدالة f :

x		$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

الموضوع الأوّل

3) معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 1:

$$y = f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$= 2x-2$$

لأنَّ $f(1)=0$ وَ $f'(1)=2$.

إذن: معادلة المماس المطلوبة هي: $(T): y = 2x-2$.

4)

أ- إثبات أنَّ $y = x-1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C):

$y = x-1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C) يعني: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-y\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$$

و منه: $(\Delta): y = x-1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C) في جوار $+\infty$

ب-الوضع النسبي لـ (C) وَ(Δ):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$.

لدينا : $f(x)-y = \dfrac{\ln x}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$		-	0	+	

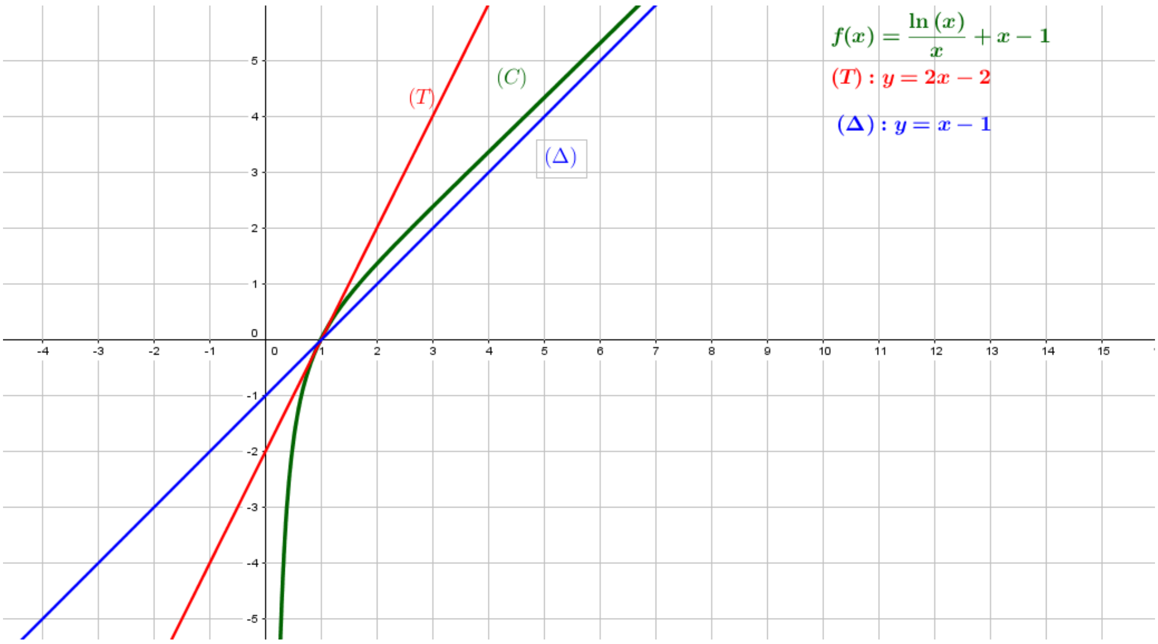
نستنتج أنَّ:

(C) تحت (Δ) لما: $x \in]0;1[$

(C) فوق (Δ) لما: $x \in]1;+\infty[$

(C) يقطع (Δ) لما: $x = 1$

5) إنشاء $(C),(\Delta)$ وَ (T)



6) لدينا: $(\Delta_m): y = mx - m$ وَ $m \in \mathbb{R}$:

أ- التحقق أنَّ $\forall m \in \mathbb{R}: A \in (\Delta_m)$:

لدينا: $A(1;0)$.

$$A \in (\Delta_m) \Leftrightarrow y_A = mx_A - m$$

$mx_A - m = m(1) - m = 0 = y_A$ و منه: $\forall m \in \mathbb{R}: A \in (\Delta_m)$.

ب-المناقشة البيانية $f(x) = mx - m$:

$f(x)=mx-m=m(x-1),......(\Pi)$

✓ لما $m=1$ تصبح المعادلة (Π) من الشكل: $f(x)=(x-1)$.
المعادلة: $f(x)=mx-m$ لها حل وحيد هو 1.

✓ لما $m=2$ تصبح المعادلة (Π) من الشكل: $f(x)=2(x-1)$.
المعادلة: $f(x)=mx-m$ لها حل وحيد هو 1.

✓ لما $m=0$ تصبح المعادلة (Π) من الشكل: $f(x)=0(x-1)$.
المعادلة: $f(x)=mx-m$ لها حل وحيد هو 1.

لما $m\in]-\infty;0[$ فإنَّ المعادلة: $f(x)=mx-m$ لها حل وحيد هو 1.
لما $m\in]0;1[$ فإنَّ المعادلة: $f(x)=mx-m$ لها حل وحيد هو 1.
لما $m\in]1;2[$ فإنَّ المعادلة: $f(x)=mx-m$ لها حلّان موجبان أحدها 1.
لما $m\in]2;+\infty[$ فإنَّ المعادلة: $f(x)=mx-m$ لها حلّان أحدها 1 و الآخر سالب.

7).

أ- إيجاد دالة أصلية للدالة: $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$.

$\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\times\ln x$ من الشكل $u'\times u$ حيث : $u(x)=\ln x$ وَ $u'(x)=\frac{1}{x}$.

إذن: دالة أصلية للدالة: $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ هي $x\mapsto\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

ب- حساب I_n مساحة الحيز المحدّد بالمنحنى (C), المستقيم (Δ) و $x=1$ وَ $x=n$ حيث $n>1$

نعلم أنَّ: (C) فوق (Δ) لما: $x\in]1;+\infty[$

و منه:

الموضوع الأوّل

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^n \left(f(x) - (x-1)\right)dx \\ &= \int_1^n \left(\frac{\ln x}{x}\right)dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^n \\ &= \frac{1}{2}(\ln n)^2 \quad ua \end{aligned}$$

ج- تعيين أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان: $n > n_0$ فإنَّ: $I_n > 2$:

$$\begin{aligned} I_n > 2 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\ln n)^2 > 2 \\ &\Leftrightarrow (\ln n)^2 > 4 \\ &\Leftrightarrow (\ln n)^2 - 4 > 0 \\ &\Leftrightarrow (\ln n - 2)(\ln n + 2) > 0 \end{aligned}$$

مرفوض لأنَّ

$n > 1$

نجد:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow n > e^2 \vee n < e^{-2} \\ &\Leftrightarrow n > 7.38 \end{aligned}$$

و منه: عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان: $n > n_0$ فإنَّ: $I_n > 2$:

هي: $n = 8$