لأن $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ $\left(-1 < q = \frac{2}{3} < 1\right)$

حل التمرين الثاني:

1) أ) التحقق أن النقط A ،B و C تعين مستو

لدينا $A(2;-1;1)$ ، $B(-1;2;1)$ ، $C(1;-1;2)$ ومنه $\overrightarrow{AB}(-3;3;0)$ ، $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$ وعليه فإنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ ومنه النقط A ،B و C تعين مستو.

ب) تبيين أن $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC):

بما أن $\vec{n}(1;1;1).\overrightarrow{\mathrm{AC}}(-1;0;1) = 0$ و $\vec{n}(1;1;1).\overrightarrow{\mathrm{AB}}(-3;3;0) = 0$ فإن $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

ج) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC):

بما أن $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) فإن معادلة (ABC) من الشكل $x+y+z+d=0$ وبما أن $C \in (ABC)$ فإن $d=-2$

$$(ABC): x+y+z-2=0$$

2) أ) حساب احداثيات النقطة G:

بما أن G مرجح الجملة $\{(A;1);(B;2);(C;-1)\}$ فإن
$G\left(\frac{1\times2+2\times(-1)-1\times1}{2};\frac{1\times(-1)+2\times2-1\times(-1)}{2};\frac{1\times1+2\times1-1\times2}{2}\right)$ أي $G\left(\frac{-1}{2};2;\frac{1}{2}\right)$

ت) تبيين أن (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة $[GD]$:

بما أن G مرجح الجملة $\{(A;1);(B;2);(C;-1)\}$ فإن $\|\overrightarrow{\mathrm{MA}}+2\overrightarrow{\mathrm{MB}}-\overrightarrow{\mathrm{MC}}\| = 2\|\overrightarrow{\mathrm{MD}}\|$ تكافئ:
$\|2\overrightarrow{\mathrm{M}G}\| = 2\|\overrightarrow{\mathrm{MD}}\|$ أي $\mathrm{MD} = \mathrm{M}G$ ومنه (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة $[GD]$.

ج) إثبات أن $6x-4y+2z+3=0$ معادلة ديكارتية لـ (Γ):

بما أن (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة $[GD]$ فإن $\overrightarrow{\mathrm{GD}}\left(\frac{3}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$ شعاع ناظمي له و يشمل النقطة G. ومنه $6x-4y+2z+3=0$ معادلة ديكارتية لـ (Γ) لأن $\overrightarrow{\mathrm{GD}}$ مرتبط خطيا مع الشعاع الذي مركباته $(6;-4;2)$ وإحداثيات منتصف $[GD]$: $\left(\frac{1}{4};\frac{3}{2};\frac{3}{4}\right)$ تحقق المعادلة $6x-4y+2z+3=0$.

3) تبيين أن المستويين (ABC) و (Γ) متقاطعين في مستقيم (Δ) وتعيين تمثيل وسيطي له

$$(ABC)\cap(\Gamma): \begin{cases} x+y+z-2=0 \ldots\ldots\ldots e_1 \\ 6x-4y+2z+3=0 \ldots\ldots e_2 \end{cases}; -2e_1+e_2: 4x-6y+7=0 \ldots\ e_3$$

من e_3 وبوضع $x=3t$ ونجد $y=2t+\frac{7}{6}$ ومن e_1 نجد $z=-5t+\frac{5}{6}$

ومنه المستويان (ABC) و (Γ) متقاطعان في مستقيم (Δ) حيث $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t + \frac{7}{6} \\ z = -5t + \frac{5}{6} \end{cases}$ تمثيل وسيطي له مع $t \in \mathbb{R}$

حل التمرين الثالث:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$:

$$\Delta = -2 \times 36 = \left(6i\sqrt{2}\right)^2 ; S = \left\{3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} ; 3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}\right\}$$

2) أ) كتابة z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسي:

$z_A = 3\sqrt{2}(1+i) = 3 \times 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 6e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$; $\boldsymbol{z_A = 6e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}}$

$z_B = \overline{z_A} = 6e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$; $\boldsymbol{z_B = 6e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}$

$(1+i)z_A = 6\sqrt{2}i = 6\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$; $\boldsymbol{(1+i)z_A = 6\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}}$

ب) حساب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$

$\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014} = \left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{2014} = e^{i(1007\pi)} = e^{i(\pi)} = -1$; $\boldsymbol{\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014} = -1}$

جـ) تبيين أن النقط O ، A، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D وتحديد نصف قطرها:

$$\mathrm{DO} = |z_O - z_D| = \left|-3\sqrt{2}\right| = 3\sqrt{2}\,.$$
$$\mathrm{DA} = |z_A - z_D| = \left|3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\right| = 3\sqrt{2}$$
$$\mathrm{DB} = |z_A - z_D| = \left|3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\right| = 3\sqrt{2}$$
$$\mathrm{DA} = |z_A - z_D| = \left|3\sqrt{2} - 6\sqrt{2}\right| = 3\sqrt{2}$$

بما أن $\mathrm{DO} = DA = DB = DC = 3\sqrt{2}$ فإن O ، A، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D وطول نصف قطرها يساوي $3\sqrt{2}$.

د) حساب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ وإيجاد قيس للزاوية $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$ وتحديد طبيعة الرباعي $OACB$:

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}}{-3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}} = \frac{i\left(3i\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\right)}{-3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}} = i ; (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = \arg\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{\pi}{2}$$

تحديد طبيعة الرباعي $OACB$

لدينا: $\begin{cases} \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i \\ z_{\overrightarrow{OA}} = z_{\overrightarrow{BC}} = 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} CB = CA \\ (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2} \\ \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} \end{cases}$ ومنه الرباعي $OACB$ مربع.

3) أ) كتابة العبارة المركبة للدوران R:

بما أن R دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ فإن عبارته المركبة هي: $\boldsymbol{z' = iz}$

ب) تعيين لاحقة النقطة C' صورة النقطة C بالدوران R والتحقق أن النقط C، A و C' في استقامية

بما أن C' صورة C بالدوران R فإن $z_{C'} = iz_C = 6i\sqrt{2}$ ، $\boldsymbol{z_{C'} = 6i\sqrt{2}}$

بما أن:

$$\frac{z_{C'} - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-6\sqrt{2}+6i\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}} = \frac{2\left(-3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}\right)}{-3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}} = 2 \in \mathbb{R}$$

فإن النقط C، A و C' في استقامية.

تعيين لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالدوران R ثم تحديد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R:

بما أن A' صورة A بالدوران R فإن $z_{A'} = iz_A = -3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$ ، $\boldsymbol{z_{A'} = -3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}}$

تحديد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R

لدينا A' صورة A بالدوران R، C' صورة C بالدوران R والنقطة O نقطة صامدة أما A فصورة B بالدوران R (لأن الرباعي $OACB$ مربع) ومنه صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R هو الرباعي $\boldsymbol{OA'C'A}$.

حل التمرين الرابع:

$$f(x) = 1 + \frac{2\ln x}{x} \quad D_f =]0; +\infty[$$

1) أ) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ وتفسير النتيجتين هندسيا:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} 1 + \frac{2\ln x}{x} = -\infty$ لأن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x = 0^+$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{2\ln x}{x} = 1$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ نهايات التزايد المقارن.

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ لأنها دالة ناتجة عن عمليات على دوال قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ حيث:

$$f'(x) = 2\frac{1 - \ln x}{x^2}$$

إشارة المشتق من إشارة $1 - \ln x$ لأن $\frac{2}{x^2} > 0$ من أجل $x \in]0; +\infty[$.

$1 - \ln x \geq 0$ من أجل $x \in]0; e]$ أي $f'(x) \geq 0$ من أجل $x \in]0; e]$ ومنه الدالة متزايدة تماما على المجال $]0; e]$.

$1 - \ln x \leq 0$ من أجل $x \in [e; +\infty[$ أي $f'(x) \leq 0$ من أجل $x \in [e; +\infty[$ ومنه الدالة متزايدة تماما على المجال $[e; +\infty[$. $f'(e) = 0$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1+\frac{2}{e}$	$\searrow$	1

2) أ) دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-1$

لدينا $f(x)-1=2\frac{\ln x}{x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ لأن $\frac{2}{x}>0$ من أجل $x\in]0;+\infty[$.

$\ln x<0$ من أجل $x\in]0;1[$ أي $f(x)-1<0$ من أجل $x\in]0;1]$ ومنه المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) في المجال $]0;1[$

$\ln x>0$ من أجل $x\in]1;+\infty[$ أي $f(x)-1>0$ من أجل $x\in]1;+\infty[$ ومنه المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) في المجال$]1;+\infty[$.

$\ln x=0$ من أجل $x=1$ أي $f(x)-1=0$ من أجل $x=1$ ومنه المنحني (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة ذات الإحداثيات $(1;1)$.

ب) معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

$$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)\,;\begin{cases}f'(1)=2\\ f(1)=1\end{cases}$$

$$\boldsymbol{(T): y=2x-1}$$

جـ) تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0;1[$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;1[$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)\times f(0)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0;1[$.

وبما أن $]e^{-0,4};e^{0,3}[\subset]0;1[$ و $f(e^{-0,4})\times f(e^{-0,3})<0$ (لأن $f(e^{-0,3})\simeq 0.19$;$f(e^{-0,4})\simeq -0.19$)

3) إنشاء (T) و (C_f): (الإنشاء في نهاية حل التمرين)

4) $h(x)=\;\; D_h=\mathbb{R}^*$

أ) تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$

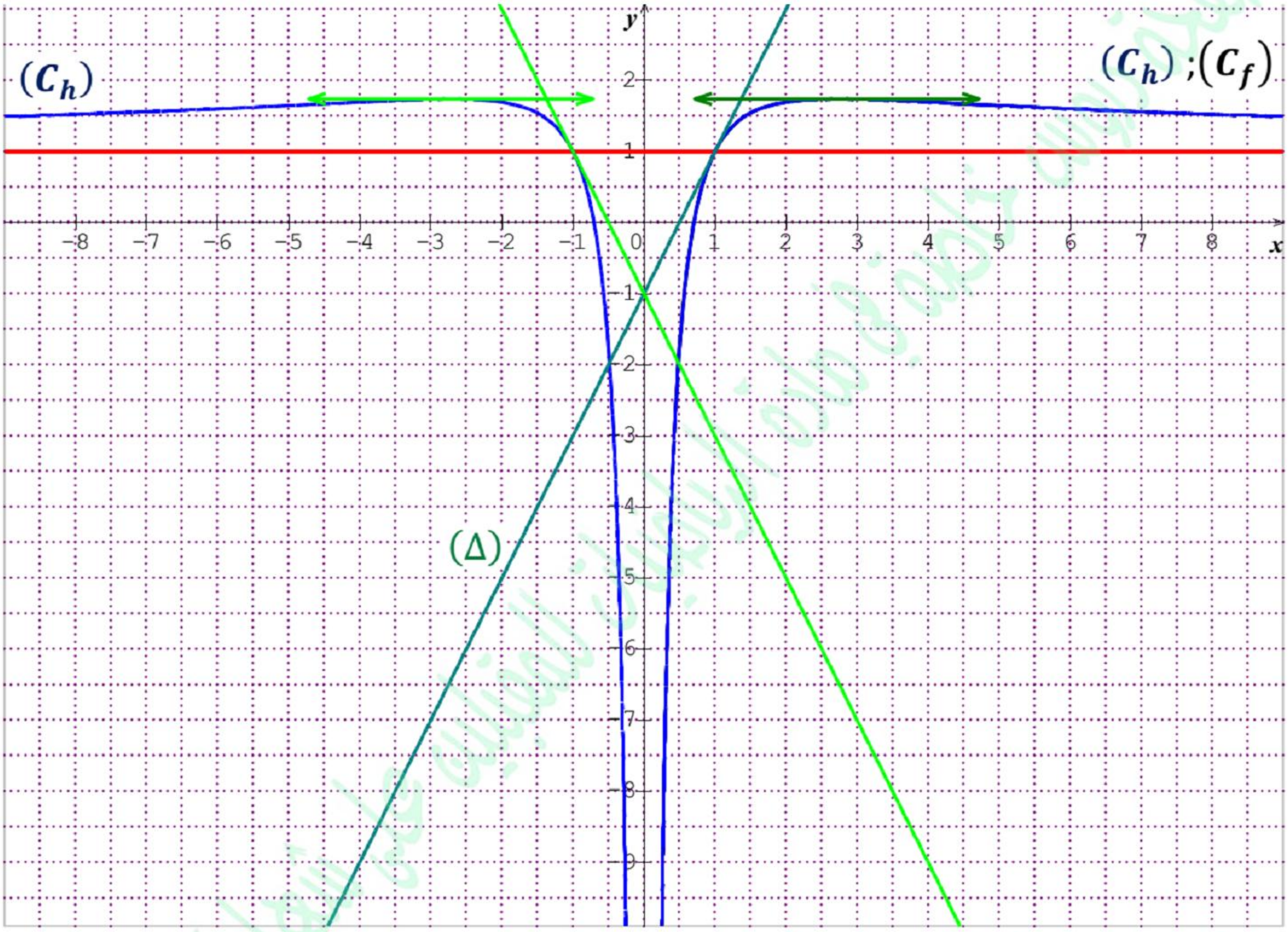
$$h(x)-h(-x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}-1-\frac{2\ln|-x|}{|-x|}=\frac{2\ln|x|}{|x|}-\frac{2\ln|x|}{|x|}=0$$

الاستنتاج:

بما أنه من أجل كل $x \in D_h$ يكون $-x \in D_h$ و $h(x) - h(-x) = 0$ فإن الدالة h دالة زوجية

ب) إنشاء المنحني (C_h)

لدينا من أجل $x \in]0; +\infty[$ يكون $h(x) = f(x)$ ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) في هذا المجال ويناظر هذا الجزء بالنسبة لمحور التراتيب لأن الدالة h دالة زوجية.



ج) مناقشة حلول المعادلة $\ln x^2 = (m-1)|x|$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $\ln x^2 = (m-1)|x|$ ومنه $2ln|x| = (m-1)|x|$ أي $\frac{2ln|x|}{|x|} = m - 1$ ومنه المعادلة $\ln x^2 = (m-1)|x|$ تكافئ $h(x) = m$ وبالتالي حلولها هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) و المستقيم المتحرك الأفقي (Δ_m) حيث $y = m$ معادلة له.

وعليه: من أجل $m \in]-\infty; 1]$ المعادلة تقبل حلين متمايزين .من أجل $m \in \left]1; 1 + \frac{2}{e}\right[$ المعادلة تقبل أربع حلول متمايزة.من أجل $m = 1 + \frac{2}{e}$ المعادلة تقبل حلين مضاعفين. من أجل $m \in \left]1 + \frac{2}{e}; +\infty\right[$ المعادلة لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$.

حل الموضوع الثاني

حل التمرين الأول:

I. $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}\ ; n \in \mathbb{N}$

1) تبيين أن (u_n) متتالية هندسية وتعيين أساسها وحدها الأول:

لدينا $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$ ومنه:

$$u_{n+1} = e^{\frac{1}{2}-(n+1)} = e^{\frac{1}{2}-n-1} = e^{-1} \times e^{\frac{1}{2}-n} = \frac{1}{e}u_n$$

ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{e}$ وحدها الأول $u_0 = \sqrt{e}$ $\quad \left(u_0 = e^{\frac{1}{2}-0} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}\right)$.

2) حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{2}-n} = 0\ ;\ \boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

الاستنتاج: بما أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ فإن (u_n) متتالية متقاربة.

3) حساب بدلالة n المجموع S_n:

بما أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\left(q = \frac{1}{e}\right)$ وحدها الأول $\left(u_0 = \sqrt{e}\right)$ فإن:

$$S_n = \sqrt{e}\,\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{e\sqrt{e}}{e-1}\left(1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right)\ ;\ \boldsymbol{S_n = \frac{e\sqrt{e}}{e-1}\left(1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right)}$$

II. $v_n = \ln u_n\ \ ; n \in \mathbb{N}$

1) التعبير عن v_n بدلالة n واستنتاج طبيعة (v_n)

لدينا $v_n = \ln u_n$ ومنه:

$$v_n = \ln e^{\frac{1}{2}-n} = \frac{1}{2} - n\ ;\ \boldsymbol{v_n = \frac{1}{2} - n}$$

استنتاج طبيعة (v_n)

بما أن $v_n = \frac{1}{2} - n$ فإن $v_{n+1} - v_n = -1$ ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -1$ و $v_0 = \frac{1}{2}$

2)

أ) حساب بدلالة n العدد P_n

لدينا $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n)$ وبما أن حدود المتتالية (u_n) موجبة فإن:

$$P_n = \ln u_0 + \ln u_1 + \cdots + \ln u_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

و بما أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\left(r = \frac{1}{e}\right)$ وحدها الأول $\left(v_0 = \frac{1}{2}\right)$ فإن:

$$P_n = \frac{(n+1)}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - n\right) = \frac{-n^2+1}{2}\ \ ;\ \boldsymbol{P_n = \frac{-n^2+1}{2}}$$

ب) تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n + 4n > 0$

$P_n + 4n > 0$ معناه $-n^2 + 4n + 1 > 0$ بحساب المميز ودراسة إشارة $-n^2 + 8n + 1$ نجد أن قيم العدد الطبيعي n التي تحقق المتراجحة السابقة هي القيم التي تنتمي إلى المجال $\left]4-\sqrt{17}; 4+\sqrt{17}\right[$ أي:

$\boldsymbol{n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}}$

حل التمرين الثاني:

1)

أ) البرهان أن A ، B و C ليست في استقامية:

لدينا $A(1;-1;-2)$ ، $B(1;-2;-3)$ ، $C(2;0;0)$ ومنه $\overrightarrow{AB}(0;-1;-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(1;1;2)$ وعليه فإنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ ومنه النقط A ،B و C ليست في استقامية.

ب) كتابة تمثيل وسيطي للمستوي (ABC):

بما أن النقط A ،B و C ليست في استقامية فإن $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$ أساس للمستوي (ABC) فإن

$$\begin{cases} x = \beta + 2 \\ y = -\alpha + \beta \\ z = -\alpha + 2\beta \end{cases} ; (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$$

تمثيل وسيطي للمستوي (ABC)

جـ) التحقق أن $x + y - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

بما أن $(\beta + 2) + (-\alpha + \beta) - (-\alpha + 2\beta) + 2 = 0$ فإن $x + y - z - 2 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2) البرهان أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ):

$$(\Delta): \begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \text{ ، } (P): x - y - 2z + 5 = 0 \text{ ، } (Q): 3x + 2y - z + 10 = 0$$

بما أن: $(t-3) - (-t) - 2(t+1) + 5 = 0$ و $3(t-3) + 2(-t) - (t+1) + 10 = 0$ والمستويان (P) و (Q) غير متطابقان فإن: $(P) \cap (Q) = (\Delta)$. (التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) يحقق المعادلة الديكارتية لكل من (P) و (Q)).

3) تعيين تقاطع المستويات (ABC) ، (P) و (Q):

$$(P)\cap(Q)\cap(ABC)=(\Delta)\cap(ABC):\begin{cases}\begin{cases}x=t-3\\ y=-t\\ z=t+1\end{cases}\\ x+y-z-2=0\end{cases};t-4=0;t=4\ (x;y;z)=(-7;4;-3)$$

$$\boldsymbol{(P)\cap(Q)\cap(ABC)=\{I(-7;4;-3)\}}$$

4) تعيين مجموعة النقط (Γ)

$\sqrt{6}d\big(M;(P)\big)=\sqrt{14}\big(M;(Q)\big)$ معناه: $|x-y-2z+5|=|3x+2y-z+10|$ وهذا يعني:

$$\begin{cases}x-y-2z+5=3x+2y-z+10\\ \text{أو}\\ x-y-2z+5=-3x-2y+z-10\end{cases}\text{ بالتبسيط نجد }\begin{cases}-2x-3y-z-5=0\\ \text{أو}\\ 4x+y-3z+15=0\end{cases}$$

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي اتحاد المستويين المعرفين بالمعادلتين الديكارتيتين: $-2x-3y-z-5=0$ و $4x+y-3z+15=0$

حل التمرين الثالث:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(z-i)(z^2-2z+5)=0$:

$(z-i)(z^2-2z+5)=0$ معناه

$$\begin{cases}z-i=0;\ z_0=i\\ \text{أو}\\ z^2-2z+5=0\ ;\ \Delta=-16=(4i)^2;z_1=1+2i;z_2=1+2i\end{cases}$$

$$\boldsymbol{S=\{3\sqrt{2}+3i\sqrt{2};3\sqrt{2}-3i\sqrt{2}\}}$$

2)

أ) الإنشاء (بسيط)

ب) إيجاد z_H لاحقة H:

بما أن H هي المسقط العمودي للنقطة A ذات اللاحقة $z_A=i$ على المستقيم (BC) العمودي ذي المعادلة $x=1$ لأنه يشمل نقطتين لاحقتيهما مترافقين جزؤهما الحقيقي يساوي 1 فإن $Re\ (z_H)=1$ و $Im\ (z_H)=Im\ (z_A)=1$ أي:
$\boldsymbol{z_H=1+i}$

ج) حساب مساحة المثلث ABC

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times BC\times AH+\frac{1}{2}\times|z_C-z_B|\times|z_H-z_A|=\frac{1}{2}\times4\times1=2\ ;\ \boldsymbol{S_{ABC}=2cm^2}$$

(3

أ) **<u>كتابة العبارة المركبة للتشابه المباشر S:</u>**

بما أن S تشابه مباشر مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ زاويته $\frac{\pi}{2}$ فإن: $(z' - z_A) = \frac{1}{2}i(z - z_A)$

ومنه عبارته المركبة هي: $z' = \frac{1}{2}iz + \frac{1}{2} + i$.

ب) **<u>تبيين أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه المباشر S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$</u>**

بما أن مساحة المثلث ABC تساوي $2cm^2$ فإن مساحة صورته بالتشابه المباشر S الذي نسبته $\frac{1}{2}$ تساوي $\frac{1}{2}cm^2$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2 = \frac{1}{2}$$

4) **<u>تعيين مجموعة النقط M</u>**

$$|z| = |iz + 1 + 2i| \; ; \; |z| = \left|i\big(z - (i - 2)\big)\right| \; ; \; |z| = |i||z - (i - 2)| \; ; \; |z| = |z - z_D|$$

حيث z_D لاحقة النقطة D ومنه $|z| = |iz + 1 + 2i|$ تعني $OM = DM$ أي مجموعة النقط M هي المستقيم المحوري للقطعة $[OD]$.

طريقة: يمكن ايجاد معادلة ديكارتية للمجموعة بوضع $z = x + iy$ ومنها نستنتج طبيعة المجموعة M.

من الممكن أن يكون واضع التمرين يقصد $|z| = |iz + 2 - i|$ وليس $|z| = |iz + 1 + 2i|$ حتى نجد مجموعة النقط هي المستقيم المحوري للقطعة $[OB]$ باعتبار B مذكورة في التمرين بالعكس بالنسبة لـ D قمنا بإضافتها لعدم وجود نقطة ذات اللاحقة $(i - 2)$.

<u>حل التمرين الرابع:</u>

<u>I.</u> $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4; \; D_g = \mathbb{R}$

1) أ) حساب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$:

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g على$\mathbb{R}$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثير حدود حيث:

$$g'(x) = 6x^2 - 8x + 7 \; ; \; \Delta < 0 \; ; \; g'(x) > 0$$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $\mathbb{R}$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2)

أ) تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α على المجال حيث $0,7 < \alpha < 0,8$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وبصفة خاصة على المجال $]0,7;0,8[$ و لدينا $g(0,7) \times g(0,8) < 0$ (لأن $g(0,8) \simeq 1.73$;$g(0,7) \simeq -0.71$). ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha \in]0,7;0,8[$.

ب) إشارة الدالة g

بما أن الدالة g ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α فإن:

$g(x) < 0$ من أجل $x \in]-\infty;\alpha[$ ، $g(x) > 0$ من أجل $x \in]\alpha;+\infty[$ و $g(\alpha) = 0$

II. $f(x) = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$; $D_f = \mathbb{R}$

1) حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$$

2).

أ) تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x

$$\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}=\frac{2x^3-2x^2+x+2x^2-2x+1+1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$
$$=\frac{2(x^2-2x+1)}{2(2x^2-2x+1)}=f(x)$$

ب) استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) وتحديد معادلة له:

بما أن $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$ و $\lim_{|x|\to+\infty}\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}=0$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) حيث $y=\frac{1}{2}(x+1)$ معادلة له.

جـ) دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) و (Δ):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-\frac{1}{2}(x+1)$ أي إشارة $\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

إشارة $\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$ من إشارة $1-3x$ لأن $2(2x^2-2x+1)>0$ من أجل كل عدد حقيقي x (لأن مميزه سالب وإشارته من إشارة معامل x^2).

ومنه المنحني (C_f) يقع فوق (Δ) في المجال $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$ و تحته في المجال $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$ ويقطعه في النقطة التي احداثياتها $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

3).

أ) تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\frac{x\mathrm{g}(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث

$$f'(x)=\frac{(3x^2-2)(2x^2-2x+1)-(4x-2)(x^3-2x+1)}{(2x^2-2x-1)^2}$$
$$=\frac{6x^4-6x^3+3x^2-4x^2+4x-2-4x^4+8x^2-4x+2x^3-4x+2}{(2x^2-2x-1)^2}$$
$$=\frac{2x^4-4x^3+7x^2-4x}{(2x^2-2x-1)^2}=\frac{x(2x^3-4x^2+7x-4)}{(2x^2-2x-1)^2}=\frac{x\mathrm{g}(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

ب) إستنتاج إشارة $f'(x)$ حسب قيم عدد حقيقي x وتشكيل جدول تعيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $xg(x)$ لأن $(2x^2-2x+1)^2>0$ من أجل كل عدد حقيقي x

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) حساب $f(1)$ وحل المعادلة $f(x)=0$

لدينا $f(1)=0$ ومنه بتحليل البسط نجد $f(x)=\frac{(x-1)(x^2+x-1)}{2x^2-2x+1}$ ومنه حل المعادلة $f(x)=0$ تكافئ

$(x-1)(x^2+x-1)=0$ ومنه $\begin{cases} x-1=0 \\ \text{أو} \\ x^2+x-1=0 \end{cases}$ حلا المعادلة $x^2+x-1=0$ باستعمال المميز هما

$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاث حلول هي $\left\{1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

5) <u>الانشاء في نهاية حل التمرين</u>

6) $h(x) = \frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1};\ D_h = \mathbb{R}$

أ) <u>التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x:</u> $\boldsymbol{h(x) = f(x) - 2}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x:

$$f(x) - 2 = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} - 2 = \frac{x^3 - 2x + 1 - 4x^2 + 4x - 2}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1} = h(x)$$

<u>الاستنتاج:</u>

(C_h) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0;-2)$

إنشاء (Δ)، (C_f) و (C_h)