التمرين الأول: (04 نقاط) : الجزء الأول :

(u_n) م.ع : $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$

1) ① إثبات أن (u_n) م.هـ: يكفي إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q : q \in \mathbb{R}^*$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{\frac{1}{2}-(n+1)}}{e^{\frac{1}{2}-n}} = e^{\frac{1}{2}-(n+1)-\left(\frac{1}{2}-n\right)}$$

$$= e^{\frac{1}{2}-n-1-\frac{1}{2}+n} = e^{-1}$$

ومنه: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1}$

إذن (u_n) م.هـ أساسها $q = e^{-1}$.

② حساب حدها الأول u_0 : $u_0 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

2) ① حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{2}-n} = 0$$

② الإستنتاج : نستنتج أن (u_n) متقاربة نحو الصفر .

3) حساب بدلالة n للمجموع S_n :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n$$

S_n هو مجموع $(n+1)$ حدا لـ م.هـ إذن :

$$S_n = u_0 \times \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = e^{\frac{1}{2}} \times \frac{\left(e^{-1}\right)^{n+1}-1}{e^{-1}-1}$$

$$= e^{\frac{1}{2}} \times \frac{e^{-n-1}-1}{\frac{1-e}{e}} = e^{\frac{1}{2}} \times \frac{e}{1-e}\left(e^{-n-1}-1\right)$$

ومنه : $\boxed{S_n = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{1-e}\left(e^{-n-1}-1\right)}$

الجزء الثاني: (v_n) م.ع : $v_n = \ln(u_n)$

1) ① التعبير عن v_n بدلالة n .

$$v_n = \ln(u_n) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}-n}\right) = \frac{1}{2}-n$$

② إستنتاج نوع المتتالية (v_n) :

طريقة أولى:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}-(n+1)-\frac{1}{2}+n = -1$$

طريقة ثانية:

$$v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$$

$$= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln q = \ln\left(e^{-1}\right) = -1$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -1$

حدها الأول : $v_0 = \frac{1}{2}$

2) أ) حساب بدلالة العدد n حيث P_n :

$$P_n = \ln\left(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots\dots \times u_n\right)$$

$$P_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \ln(u_2) + \dots\dots + \ln(u_n)$$

أي: $P_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots + v_n$

ومنه: هو مجموع $(n+1)$ حدا لـ م.ح. إذن :

$$P_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left(\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}\right)$$

$$=\frac{n+1}{2}\left(v_0+v_n\right)=\frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-n\right)$$

ومنه : $P_n=\frac{(1+n)(1-n)}{2}$

ب) تعيين مجموعة قيم n : $P_n+4n>0...(*)$

$$(*)\Leftrightarrow\frac{(1+n)(1-n)}{2}+4n>0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-n^2+8n}{2}>0\Leftrightarrow 1-n^2+8n>0$$

$$\Leftrightarrow n^2-8n-1<0.....(**)$$

$$\Delta=b^2-4ac=64-4(1)(-1)=68$$

بما أن $\Delta>0$ فإن لكثير الحدود :

$\left(n^2-8n-1\right)$ جذرين متمايزين هما :

$$n_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8-2\sqrt{17}}{2}=4-\sqrt{17}$$

$$n_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8+2\sqrt{17}}{2}=4+\sqrt{17}$$

ومنه : إشارة كثير الحدود السابق تعطى بـ :

n	$-\infty$		$4-\sqrt{17}$		$4+\sqrt{17}$		$+\infty$
n^2-8n-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$(**)\Leftrightarrow n\in\left]4-\sqrt{17}\ ;\ 4+\sqrt{17}\right[$$

وبما أن n عددا طبيعيا فإن :

$$n\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$$

ومنه مجموعة قيم n المطلوبة هي :

$$S=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$$

التمرين الثاني (05 نقاط) :

$$C(2;0;0);B(1;-2;-3);A(1;-1;-2)$$

1) أ) البرهان أن : $A;B;C$ ليست في إستقامية

$$\overrightarrow{AC}(1;1;2);\overrightarrow{AB}(0;-1;-1)$$

بما أن : $\frac{-1}{1}\neq\frac{0}{1}$ فإن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقط $A;B;C$ ليست في إستقامية.

ب) كتابة تمثيل وسيطي للمستوي (ABC) :

المستوي (ABC) يشمل النقطة C وشعاعي توجيهه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ومنه تمثيل وسيطي للمستوي (ABC) يعطى بـ :

$$(ABC):\begin{cases}x=x_C+\alpha(0)+\beta(1)\\y=y_C+\alpha(-1)+\beta(1)\\z=z_C+\alpha(-1)+\beta(2)\end{cases}$$

أي :

$$(ABC):\begin{cases}x=2+\beta\\y=-\alpha+\beta\\z=-\alpha+2\beta\end{cases}\quad:(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$$

جـ) التحقق من أن : $x+y-z-2=0$ هي معادلة للمستوي (ABC).

طريقة ① : يكفي التحقق من النقط $A;B;C$ تحقق معادلة المستوي (ABC).

$$x_A+y_A-z_A-2=2-2=0$$
$$x_B+y_B-z_B-2=2-2=0$$
$$x_C+y_C-z_C-2=2-2=0$$

ومنه النقط $A;B;C$ تحقق معادلة المستوي (ABC).

طريقة ② : بإستعمال التمثيل الوسيطي للمستوي (ABC). يكفي التحقق من أن :

$$x+y-z-2=2+\beta-\alpha+\beta+\alpha-2\beta-2=0$$

ومنه النقطة $M(x;y;z)$ تحقق معادلة المستوي (ABC).

طريقة ③ : إيجاد علاقة مستقلة عن α و β تربط بين المتغيرات $x\ ;\ y\ ;\ z$.

من أجل ذالك نحل الجملة :

$$\begin{cases} x = 2+\beta \\ y = -\alpha+\beta \\ z = -\alpha+2\beta \text{....③} \end{cases}$$

وذالك بحل أولا الجملة : $\begin{cases} x=2+\beta \\ y=-\alpha+\beta \end{cases} \text{....}(I)$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=x-2 \\ \alpha=\beta-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=x-2 \\ \alpha=x-2-y \end{cases}$$

بتعويض قيمتي α و β في المعادلة③ نجد :

$$③ \Leftrightarrow z = -x+2+y+2x-4$$

ومنه نجد : $x+y-z-2=0$

إذن : $(ABC): x+y-z-2=0$

2) $(P): x-y-2z+5=0$

$(Q): 3x+2y-z+10=0$

أ) إثبات أن : (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) :

$\overrightarrow{n_Q}(3;2;-1); \overrightarrow{n_P}(1;-1;-2)$ الشعاعان الناظميان لـ (P) و (Q) على الترتيب.

بما أن : $\frac{-1}{2} \neq \frac{1}{3}$ فإن $\overrightarrow{n_P}$; $\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي فإن (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) :

ب) التحقق من أن :

$$(\Delta): \begin{cases} x = t-3 \\ y = -t \\ z = t+1 \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

يكفي التحقق من أن :

$$(\Delta) \subset (P) \wedge (\Delta) \subset (Q)$$

بتعويض قيم x ; y ; z الموجودة في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) في معادلة المستوي (P) نجد :

$$t-3+t-2t-2+5=5-5=0$$

ومنه : $(\Delta) \subset (P)$

وبالمثل بتعويض قيم x ; y ; z الموجودة في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) في معادلة المستوي (Q) نجد :

$$3t-9-2t-t-1+10=-10+10=0$$

ومنه : $(\Delta) \subset (Q)$

الخلاصة :

$$(P) \cap (Q) = (\Delta): \begin{cases} x = t-3 \\ y = -t \\ z = t+1 \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

3) تعيين تقاطع المستويات : $(ABC);(P)$ و (Q)

يكفي دراسة تقاطع (Δ) مع المستوي (ABC) من أجل ذالك نعوض قيم x ; y ; z الموجودة في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) في معادلة المستوي (ABC) نجد :

$$t-3-t-t-1-2=0$$

أي : $-t-6=0$ ومنه $t=-6$

بما أن المعادلة ذات المجهول t تقبل حلا وحيد ا فإن :

$$(\Delta) \cap (ABC) = \{H(-9;6;-5)\}$$

الخلاصة :

$$(P) \cap (Q) \cap (ABC) = \{H\}$$

4) تعيين المجموعة (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$:

$$\sqrt{6} \times d(M;(P)) = \sqrt{14} \times d(M;(Q)) \text{....} \otimes$$

لدينا :

$$d(M;(P)) = \frac{|x-y-2z+5|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(-2)^2}}$$

ومنه :

$$d(M;(P))=\frac{|x-y-2z+5|}{\sqrt{6}}$$

وبطريقة مماثلة نجد :

$$d(M;(Q))=\frac{|3x+2y-z+10|}{\sqrt{14}}$$

إذن :

$$\otimes \Leftrightarrow |x-y-2z+5|=|3x+2y-z+10|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-2z+5=3x+2y-z+10 \\ x-y-2z+5=-3x-2y+z-10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3y+z+5=0 \\ \vee \\ 4x+y-3z+15=0 \end{cases}$$

ومنه مجموعة النقط هي إتحاد مستويين : أي :

حيث: $(\Gamma)=(P_1)\cup(P_2)$

$$(P_1): 2x+3y+z+5=0$$

$$(P_2): 4x+y-3z+15=0$$

التمرين الثالث (04 نقاط) :

1) الحل في $\mathbb{C}$ للمعادلة :

$$(z-i)(z^2-2z+5)=0....(*)$$

$$(*) \Leftrightarrow z-i=0 \vee z^2-2z+5=0$$

$$(*) \Leftrightarrow z=i \vee z^2-2z+5=0$$

حل المعادلة : $z^2-2z+5=0....(1)$

$$\Delta=b^2-4ac=4-20=-16$$

والمعادلة (1) تقبل حلين مركبين مترافقين هما

$$z'=\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\frac{2+4i}{2}=1+2i$$

$$z''=\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\frac{2-4i}{2}=1-2i$$

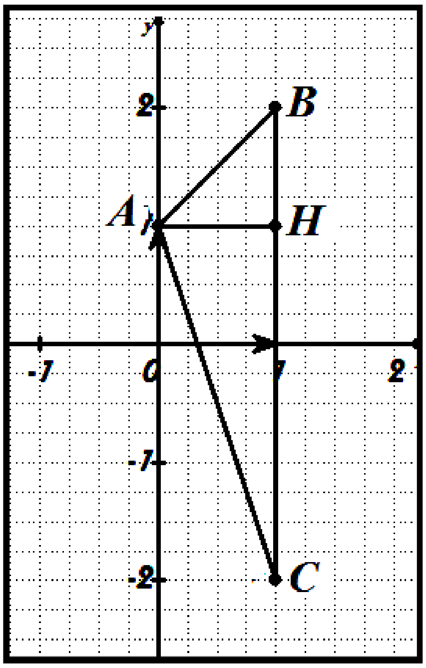
الخلاصة : مجموعة حلول المعادلة $(*)$ هي :

$$S=\{i;1+2i;1-2i\}$$

2) $z_A=i$ ، $z_B=1+2i$ ، $z_C=1-2i$

$$C(1;-2);B(1;2);A(0;1)$$

أ) إنشاء النقط $C;B;A$:



ب) إيجاد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة على المستقيم (BC).

نفرض أن: $H(x_H;y_H)$

لدينا : معادلة المستقيم (BC) هي: $x=1$

إذن $(BC): x=1$

$$H\in(BC)\Rightarrow x_H=1$$

ومن جهة ثانية لدينا : $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}1\\ y_H-1\end{pmatrix};\ \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\ -4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

$$\Leftrightarrow 1\times0+(y_H-1)(-4)=0$$

$$\Leftrightarrow y_H-1=0\Leftrightarrow y_H=1$$

ومنه: $H(1;1)$ وبالتالي: $\boxed{z_H=1+i}$

جـ) حساب مساحة المثلث ABC.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times BC\times AH \ldots\ldots \otimes$$

لدينا : $\overrightarrow{AH}(1;0)\,;\,\overrightarrow{BC}(0;-4)$

ومنه : $BC=\sqrt{0^2+(-4)^2}=4$

$$AH=\sqrt{1^2+0^2}=1$$

$$\otimes \Leftrightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}\times 4\times 1$$

ومنه : $\boxed{S_{ABC}=2\,cm^2}$

3) S التشابه الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$

وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) تعيين الكتابة المركبة للتشابه S :

$$S(M)=M':z'-z_A=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_A)$$

$$\Leftrightarrow z'=\frac{1}{2}i\,(z-z_A)+z_A$$

$$\Leftrightarrow z'=\frac{1}{2}i\,z-\frac{1}{2}i\,z_A+z_A$$

ومنه : العبارة المركبة للتشابه S :

$$\boxed{S(M)=M':z'=\frac{1}{2}i\,z+\frac{1}{2}+i}$$

ب) إثبات أن: مساحة صورة المثلث ABC

بالتشابه S تساوي : $\frac{1}{2}cm^2$

نعلم أن التشابه S ليس تقايسا في الحالة العامة . فصورة المثلث ABC بالتشابه S هي مثلث $A'B'C'$ لكن لايقايسه ولدينا :

$$S_{A'B'C'}=\kappa^2\times S_{ABC}=\frac{1}{4}\times 2\,cm^2$$

ومنه : $\boxed{S_{A'B'C'}=\frac{1}{2}cm^2}$

4) تعيين مجموعة النقط M :

$$|z|=|iz+1+2i|\ldots\ldots\odot$$

<u>طريقة أولى :</u>

$$\odot\Leftrightarrow|z|=|iz-i^2+2i|$$

$$\Leftrightarrow|z|=|i(z+2-i)|$$

$$\Leftrightarrow|z|=|i|\times|(z+2-i)|$$

$$\Leftrightarrow|z|=|(z+2-i)|$$

$$\Leftrightarrow|z|=|z-(-2+i)|$$

$$\Leftrightarrow|z_M-z_O|=|z_M-z_\omega|:z_\omega=-2+i$$

$$\Leftrightarrow OM=\omega M\;:\;\omega(-2;1)$$

ومنه مجموعة النقط M هي المستقيم (Δ) محور القطعة المستقيمة $[O\,\omega]$.

<u>طريقة ثانية :</u> بوضع :

$$z=x+iy:(x;y)\in\mathbb{R}^2$$

$$\odot\Leftrightarrow|z|^2=|iz+1+2i|^2$$

$$\Leftrightarrow|x+iy|^2=|i(x+iy)+1+2i|^2$$

$$\Leftrightarrow|x+iy|^2=|(1-y)+i(x+2)|^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=(1-y)^2+(x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 1-2y+4x+4=0$$

$$\Leftrightarrow 4x-2y+5=0$$

ومنه مجموعة النقط M هي المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $4x-2y+5=0$

<u>التمرين الرابع (07 نقاط): الجزء الأول :</u>

$$g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$$

$D=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty$

ب) ① دراسة إتجاه تغير الدالة g :

المشتقة: من أجل كل x من D :

$$g'(x)=6x^2-8x+7$$

إشارة المشتقة:

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-8x+7=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=-104$$

بما أن $\Delta<0$ فليس للمعادلة: $g'(x)=0$ حلا في D . وإشارة $g'(x)$ هي إشارة a .

إذن من أجل كل x من D : $g'(x)>0$

أي أن الدالة g متزايدة تماما على D .

② جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2) أ) إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,7<\alpha<0,8$

بتطبيق مبرهنة القيم المتوسطة على الدالة g في المجال I حيث $I=[0,7;0,8]$ نجد:

① g مستمرة على I

② $g(0,7)\times g(0,8)<0$

$g(0,8)\approx 0,06 \wedge g(0,7)\approx -0,37$

③ g رتيبة تماما (متزايدة تماما) على I

إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\alpha\in]0,7;0,8[$

ب) إستنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

الجزء الثاني : $f(x)=\dfrac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

1) ① $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2}x=-\infty$

② $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}x=+\infty$

2) إثبات أن :

$$f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}=$$

$$=\frac{(x+1)(2x^2-2x+1)+1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$=\frac{2x^3-2x^2+x+2x^2-2x+1+1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$=\frac{2x^3-4x+2}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$=\frac{2(x^3-2x+1)}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}=f(x)$$

إذن:

$$f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

ب) إستنتاج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) . لدينا :

$$f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

ومنه :

$$f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1-3x}{2\left(2x^2-2x+1\right)}$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\right]=$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{1-3x}{2\left(2x^2-2x+1\right)}$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{-3x}{4x^2}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{-3}{4x}=0$$

ومنه :

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\right]=0$$

إذن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته : $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

جـ) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ)

ندرس إشارة المقدار $A(x)$:

$$A(x)=\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\right]$$

أي : $A(x)=\dfrac{1-3x}{2\left(2x^2-2x+1\right)}$

$$A(x)=0\Leftrightarrow 1-3x=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

ومنه : $(C_f)\cap(\Delta)=\left\{A\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)\right\}$

وإشارة $A(x)$ هي إشارة البسط $(1-3x)$:

لأن : المقام مميزه سالب تماما فإشارته هي إشارة a وبالتالي فهو موجب تماما .

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$A(x)$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)

3) أ) إثبات أن :

$$f'(x)=\frac{x\,g(x)}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}$$

من أجل كل x من D :

$$f'(x)=\frac{\left(3x^2-2\right)\left(2x^2-2x+1\right)-\left(4x-2\right)\left(x^3-2x+1\right)}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}$$

بنشر وتبسيط البسط نجد :

$$f'(x)=\frac{2x^4-4x^3+7x^2-4x}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}$$

$$=\frac{x\left(2x^3-4x^2+7x-4\right)}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}$$

ومنه :

$$f'(x)=\frac{x\,g(x)}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}$$

ب) إستنتاج إشارة $f'(x)$:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x\,g(x)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0\vee g(x)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=\alpha$$

وإشارة $f'(x)$ هي إشارة $x\,g(x)$.

x	$-\infty$	0		α	$+\infty$
x	$-$	0	$+$		$+$
$g(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

جـ) جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

مع $f(\alpha)\approx-0,1$ (معطاة)

4) أ) حساب $f(1)$: $f(1)=0$

ب) الحل في $\mathbb{R}$ للمعادلة : $f(x)=0$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-2x+1=0 \dots \otimes$$

لنحلل كثير الحدود : $P(x)=x^3-2x+1$

نعلم أن : $P(1)=0$ ومنه :

$$P(x)=(x-1)Q(x)$$

إيجاد $Q(x)$:

x^3-2x+1 $-x^3+x^2$	$x-1$
x^2-2x+1 $-x^2+x$	x^2+x-1 $\uparrow$ $Q(x)$
$-x+1$ $+x-1$	
0	

ومنه : $P(x)=(x-1)\left(x^2+x-1\right)$

$$\otimes \Leftrightarrow P(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x^2+x-1=0$$

لنحل المعادلة : $x^2+x-1=0 \dots ①$

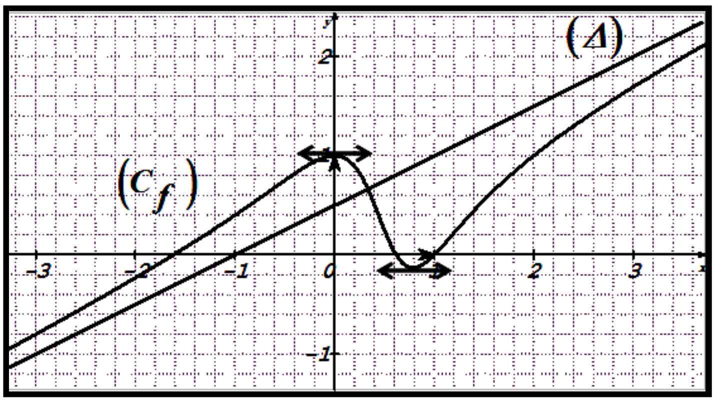
والمعادلة ① تقبل حلين متمايزين هما :

$$x'=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad ; \quad x''=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

الخلاصة: مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$ هي :

$$S=\left\{1;\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

5) إنشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).



6) $h(x)=\dfrac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$

$$D=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$$

أ) التحقق من أن : $h(x)=f(x)-2$

$$f(x)-2=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}-2$$

$$=\frac{x^3-2x+1-4x^2+4x-2}{2x^2-2x+1}$$

$$=\frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}=h(x)$$

ومنه : $h(x)=f(x)-2 \dots ⊙$

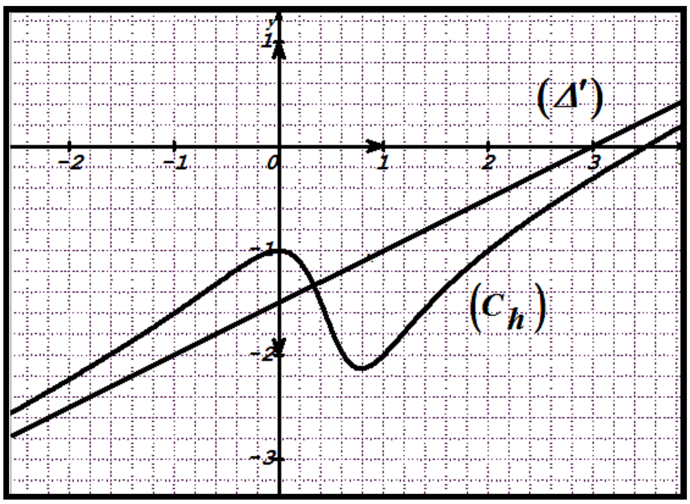
ب) ① إستنتاج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل بسيط

بوضع : $y=f(x)$ و $y'=h(x')$

فإن : $⊙ \Rightarrow \begin{cases} x'=x \\ y'=y-2 \end{cases}$

ومنه : (C_h) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ أي : $-2\vec{j}$

② رسم المنحنى (C_h) :



❀ إنتــــــــــــهى ❀

Vendredi 06/06/2014

التمرين الأول: (04 نقاط) : (u_n) م.ع :

$$u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3} \text{ و } u_0=1$$

و (v_n) م.ع : $v_n=u_n+4$

1) ① إثبات أن (v_n) م.هـ: يكفي إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}=q\times v_n$

$$v_{n+1}=u_{n+1}+4=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}+4$$

$$=\frac{2}{3}u_n+\frac{8}{3}=\frac{2}{3}(u_n+4)$$

ومنه : $v_{n+1}=\frac{2}{3}\times v_n$

إذن (v_n) م.هـ أساسها $q=\frac{2}{3}$.

② حساب حدها الأول v_0 :

$$v_0=u_0+4=1+4=5$$

2) ① كتابة v_n بدلالة n :

$$\boxed{v_n=v_0\times q^n=5\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

② كتابة u_n بدلالة n : لدينا :

$$u_n=v_n-4=5\times\left(\frac{2}{3}\right)^n-4$$

ومنه : $\boxed{u_n=5\times\left(\frac{2}{3}\right)^n-4}$

3) دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-u_n=5\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-4-\left(5\left(\frac{2}{3}\right)^n-4\right)$$

$$=5\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-5\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$=5\times\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}-1\right)$$

ومنه : $u_{n+1}-u_n=\frac{-5}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

وبالتالي : $u_{n+1}-u_n<0$

إذن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

4) $S_n=u_0+u_1+u_2+......+u_n$

① حساب S_n بدلالة n : S_n هو مجموع $(n+1)$ حدا لمتتالية عددية. لدينا :

$$u_n=v_n-4$$

ومنه :

$$u_0=v_0-4$$
$$u_1=v_1-4$$
$$u_2=v_2-4$$
....
$$u_n=v_n-4$$

بالجمع طرفا لطرف نجد :

$$S_n=v_0+v_1+v_2+....+v_n-\underbrace{(4+4+....+4)}_{(n+1)\text{ مرة}}$$

$$=v_0\times\frac{q^{n+1}-1}{q-1}-4(n+1)$$

$$=5\times\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1}{\frac{2}{3}-1}-4n-4$$

ومنه نجد :

$$S_n = 15\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)-4n-4$$

أي : $$\boxed{S_n = -15\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} -4n+11}$$

5) م.ع (w_n) : $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n+5}-1\right)$

أ) إثبات أن (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$:

يكفي إثبات أن : $w_{n+1}-w_n>0$

بالتعويض وتوحيد المقامات نجد :

$$w_{n+1}-w_n = -5\times\frac{v_{n+1}-v_n}{(v_{n+1}+5)(v_n+5)}$$

وبما أن : $v_n = u_n+4$ و $v_{n+1}=u_{n+1}+4$

فإن : $$w_{n+1}-w_n=-5\times\frac{u_{n+1}-u_n}{(v_{n+1}+5)(v_n+5)}$$

بما أن (u_n) متناقصة تماما فإن: $u_{n+1}-u_n<0$

وبما أن (v_n) موجبة تماما فإن:

$$(v_{n+1}+5)(v_n+5)>0$$

وبالتالي : $w_{n+1}-w_n>0$

إذن (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-w_n)$:

$$u_n - w_n = v_n - \frac{5}{v_n+5}+1$$

بما أن $\frac{2}{3}\in]-1;1[$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

وبالتالي فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-w_n)=0$

ملاحظة : نستنتج أن :المتتاليتين (u_n) و (w_n) متجاورتان.

التمرين الثاني (05 نقاط) : $A(2;-1;1)$

$B(-1;2;1);C(1;-1;2);D(1;1;1)$

1) أ) التحقق من أن $A ; B ; C$ تعين مستويا

$\overrightarrow{AC}(-1;0;1);\overrightarrow{AB}(-3;3;0)$

بما أن : $\frac{-3}{-1}\neq\frac{0}{1}$ فإن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقط $A ; B ; C$ تعين مستويا .

ب) إثبات أن : $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC). لدينا :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = -3+3=0$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = -1+1=0$$

بما أن $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ فإن :

$\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

جـ) كتابة معادلة للمستوي (ABC) :

$$(ABC): x+y+z+d=0$$
$$A\in(ABC)\Leftrightarrow d=-2$$

ومنه : $$\boxed{(ABC): x+y+z-2=0}$$

2) G مرجح الجملة :

$$\{(A;1);(B;2);(C;-1)\}$$

أ) حساب إحداثيات G :

$$x_G = \frac{x_A+2x_B-x_C}{1+2-1}=-\frac{1}{2}$$

$$y_G = \frac{y_A+2y_B-y_C}{1+2-1}=2$$

$$z_G = \frac{z_A+2z_B-z_C}{1+2-1}=\frac{1}{2}$$

ومنه : $G\left(-\frac{1}{2};2;\frac{1}{2}\right)$

ب) (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$$

إثبات أن (Γ) هي المستوي المحوري لـ : $[GD]$

$$M\in(\Gamma)\Leftrightarrow\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$$

$$\Leftrightarrow\left\|(1+2-1)\overrightarrow{MG}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$$

$$\Leftrightarrow 2\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|\Leftrightarrow MG=MD$$

ومنه (Γ) هي المستوي المحوري لـ : $[GD]$

جـ) إثبات أن معادلة (Γ) هي :

$$6x-4y+2z+3=0$$

__طريقة ①:__ نفرض $M(x;y;z)$ فيكون:

$$\overrightarrow{GM}\left(x+\frac{1}{2};y-2;z-\frac{1}{2}\right)$$

و $\overrightarrow{DM}(x-1;y-1;z-1)$

$$M\in(\Gamma)\Leftrightarrow MG=MD\Leftrightarrow MG^2=MD^2$$

$$\Leftrightarrow\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\right.$$

$$\left.=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow\left[x+\frac{1}{4}-4y+4-z+\frac{1}{4}=\right.$$

$$\left.=-2x+1-2y+1-2z+1\right]$$

$$\Leftrightarrow 3x-2y+z+\frac{3}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 6x-4y+2z+3=0$$

ومنه : $(\Gamma):6x-4y+2z+3=0$

__طريقة ②__ نعلم أن المستوي المحوري (Γ) للقطعة $[GD]$ يشمل النقطة I منتصف $[GD]$

وشعاعه الناظمي $\overrightarrow{GD}\left(\frac{3}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$

لدينا : $I\left(\frac{1}{4};\frac{3}{2};\frac{3}{4}\right)$ ومنه :

$$I\in(\Gamma)\Leftrightarrow\frac{3}{8}-\frac{3}{2}+\frac{3}{8}+d=0$$

$$\Leftrightarrow 3-12+3+8d=0\Leftrightarrow d=\frac{3}{4}$$

ومنه : $(\Gamma):\frac{3}{2}x-y+\frac{1}{2}z+\frac{3}{4}=0$

أي : $(\Gamma):6x-4y+2z+3=0$

3) ① إثبات أن المستويين (ABC) و (Γ) متقاطعان. لدينا : $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

و $\overrightarrow{n_{(\Gamma)}}(6;-4;2)$

بما أن : $\frac{6}{1}\neq\frac{-4}{1}$ فإن : $\vec{n}$ و $\vec{n}_{(\Gamma)}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي (ABC) و (Γ) غير متوازيين وبالتالي فهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ).

② تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

(Δ) معرف بالجملة :

$$(\Delta):\begin{cases}x+y+z-2=0\\6x-4y+2z+3=0\end{cases}\quad....(I)$$

بوضع : $z=t\ :t\in\mathbb{R}$ نجد :

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=-t+2....①\\6x-4y=-2t-3....②\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x+4y=-4t+8....③\\6x-4y=-2t-3....②\end{cases}$$

بالجمع طرفا لطرف نجد : $10x=-6t+5$

ومنه : $x=\frac{-6}{10}t+\frac{5}{10}$ أي :

$$\boxed{x=\frac{-3}{5}t+\frac{1}{2}}$$

بالتعويض ① في نجد :

$$y=-t+2+\frac{3}{5}t-\frac{1}{2}$$

أي : $\boxed{y=\frac{-2}{5}t+\frac{3}{2}}$

ومنه تمثيل وسيطي لـ (Δ) يعطى بـ :

$$(\Delta):\begin{cases} x=\frac{1}{2}-\frac{3}{5}t \\ y=\frac{3}{2}-\frac{2}{5}t \quad : t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

التمرين الثالث (05 نقاط) :

1) الحل في $\mathbb{C}$ للمعادلة :

$$z^2-6\sqrt{2}\,z+36=0.....(*)$$

$\Delta=-72$ والمعادلة $(*)$ تقبل حلين مركبين مترافقين هما :

$$z'=\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,i$$

$$z''=\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=3\sqrt{2}-3\sqrt{2}\,i$$

2) $z_A=3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B=\overline{z_A}$

$z_C=6\sqrt{2}$ ، $z_D=\frac{1}{2}z_C=3\sqrt{2}$

أ) كتابة كلا من z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسّي :

$$z_A=3\sqrt{2}\times\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}=6e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_B=\overline{z_A}=6e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$(1+i)z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times 6e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$=6\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

ومنه : $(1+i)z_A=6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

ب) حساب : $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$

$$\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2014}=e^{i\,2014\times\frac{\pi}{2}}$$

$$=e^{i\,1007\pi}=e^{i\pi}=-1$$

ومنه : $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}=-1$

جـ) إثبات أن النقط O ، A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D .

يكفي إثبات أن :

$$DO=DA=DB=DC=r$$

$$DO=OD=|z_D|=3\sqrt{2}$$

$$DA=|z_A-z_D|=|3\sqrt{2}\,i|=3\sqrt{2}$$

$$DB=|z_B-z_D|=|-3\sqrt{2}\,i|=3\sqrt{2}$$

$$DC=|z_C-z_D|=|3\sqrt{2}|=3\sqrt{2}$$

ومنه النقط O ، A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $r=3\sqrt{2}$.

د) ① حساب $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$:

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{-3\sqrt{2}-3\sqrt{2}\,i}{-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,i}$$

$$=\frac{-3\sqrt{2}(1+i)}{-3\sqrt{2}(1-i)}=\frac{1+i}{1-i}=i$$

ومنه: $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

② إيجاد قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$:

$$\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right) = \arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right) + 2k\pi : k\in\mathbb{Z}$$

$$= \arg(i) + 2k\pi = \frac{\pi}{2}+2k\pi$$

ومنه:

$$\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{2}+2k\pi : k\in\mathbb{Z}$$

③ طبيعة الرباعي $OACB$:

(أنظر الرسم في نهاية التمرين)

طريقة ① الرباعي $OACB$ مربع لأن: قطراه $[AB]$ و $[OC]$ متناصفان ومتقايسان ومتعامدان (لأنهما قطرا الدائرة (C) التي مركزها D و متناظرتان بالنسبة إلى محور الفواصل .)

طريقة ② أولا: الرباعي $OACB$ متوازي أضلاع لأن قطراه متناصفان.

ثانيا:

$$\begin{cases} \left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right) = \frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$$

ومنه: نجد:

$$\begin{cases} CA = CB \\ \left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{2}+2k\pi : k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

الخلاصة: $OACB$ متوازي أضلاع فيه ضلعين متجاورين متقايسين ومتعامدين فهو إذن مربـــــــع.

3) R دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) كتابة العبارة المركبة للدوران R:

$$R(M)=M' : z'-z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_O)$$

ومنه: $R(M)=M' : z' = i\,z$

ب) ① تعيين $z_{C'}$ حيث $C'=R(C)$

$$R(C)=C' \Leftrightarrow z_{C'} = i\,z_C$$

ومنه: $z_{C'} = 6\sqrt{2}\,i$

② التحقق من أن: $C';A;C$ في إستقامية

يكفي إثبات أن: $\frac{z_A-z_C}{z_{C'}-z_C}\in\mathbb{R}^*$

$$\frac{z_A-z_C}{z_{C'}-z_C} = \frac{-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,i}{6\sqrt{2}\,i-6\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-3\sqrt{2}(1-i)}{-6\sqrt{2}(1-i)} = \frac{1}{2}$$

ومنه: $\frac{z_A-z_C}{z_{C'}-z_C}\in\mathbb{R}^*\ldots\otimes$

$$\otimes \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_{C'}-z_C}\right) = k\pi : k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CC'};\overrightarrow{CA}\right) = k\pi : k\in\mathbb{Z}$$

ومنه النقط $C';A;C$ في إستقامية.

جـ) ① تعيين $z_{A'}$ حيث $A'=R(A)$

$$R(A)=A' \Leftrightarrow z_{A'} = i\,z_A$$

$$\Leftrightarrow z_{A'} = i\times 3\sqrt{2}(1+i)$$

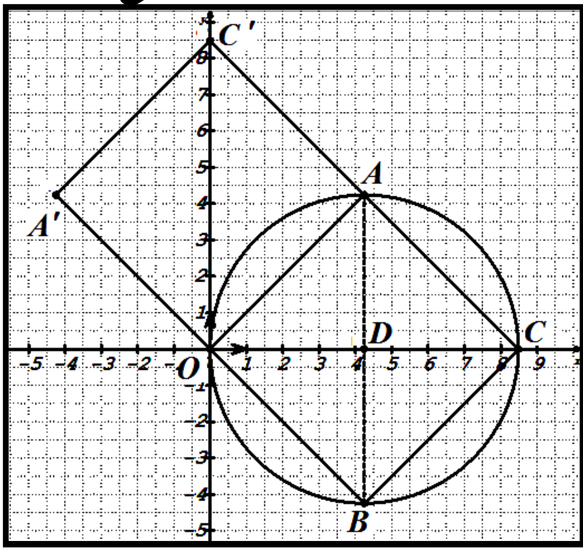
ومنه: $\boxed{z_{A'} = -3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,i}$

② تحديد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R

لدينا: $R(A)=A'$ و $R(O)=O$

و $R(C)=C'$ و $R(B)=A$

بما أن الدوران R تقايس و $OACB$ مربع
فإن صورته $OA'C'A$ بالدوران مربع أيضا .
الرسم:



التمرين الرابع (06 نقاط):

$$f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$$

$$D=\mathbb{R}_+^*=]0\,;+\infty[$$

1) أ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

التفسير الهندسي: المنحنى يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x=0$ و $y=1$

ب) ①دراسة إتجاه التغير: من أجل كل x من D

$$f'(x)=2\times\frac{\frac{1}{x}\times x-(1)\ln x}{x^2}$$

ومنه: $f'(x)=2\times\frac{1-\ln x}{x^2}$

②إشارة المشتقة: من أجل كل x من D:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow x=e$$

وإشارة $f'(x)$ هي إشارة $(1-\ln x)$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه f متزايدة تماما على المجال $]0\,;e]$
ومتناقصة تماما على المجال $[e\,;+\infty[$

تشكيل جدول تغيرات f:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e+2}{e}$	$\searrow$	1

2) أ) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=1$

ندرس إشارة المقدار $A(x)$:

$$A(x)=f(x)-1$$

$$A(x)=2\frac{\ln x}{x}$$

إشارة $A(x)$:

$$A(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$$

ومنه: $(C_f)\cap(\Delta)=\{A(1;1)\}$

وإشارة $A(x)$ هي إشارة البسط $\ln x$:

x	0		1		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)	

ب) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$=2(x-1)+1$$

ومنه: $(T): y=2x-1$

جـ) بتطبيق مبرهنة القيم المتوسطة على f في المجال I حيث $I=]0\,;1]$ نجد:

① f مستمرة على I

② $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)\times f(1)<0$

③ f رتيبة تماما (متزايدة تماما) على I

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0\,;1[$.

التحقق من أن: $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$

بما أن: $\left[e^{-0,4}\,;e^{-0,3}\right] \subset]0\,;1[$

يكفي التحقق من أن:

$$f\left(e^{-0,4}\right)\times f\left(e^{-0,3}\right)<0$$

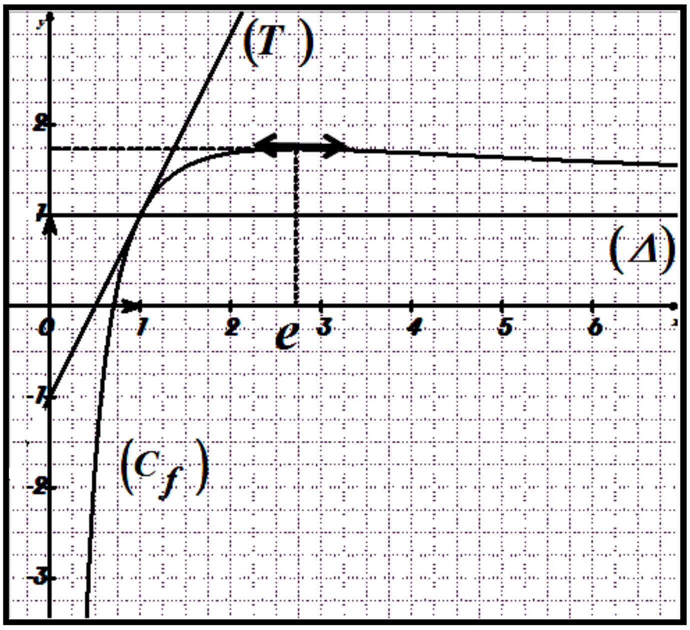
$$f\left(e^{-0,4}\right)=1-0,8\times e^{0,4}\approx -0,19$$

$$f\left(e^{-0,3}\right)=1-0,6\times e^{0,3}\approx 0,19$$

إذن: $f\left(e^{-0,4}\right)\times f\left(e^{-0,3}\right)<0$

وبالتالي: $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$

3) إنشاء (T) و $\left(C_f\right)$



4) $h(x)=1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}=f\left(|x|\right)$

$$D_h=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$$

أ) ① إثبات أن: $h(x)-h(-x)=0$

بملاحظة أن: $\boxed{|-x|=|x|}$ فإن:

$$h(x)-h(-x)=f\left(|x|\right)-f\left(|-x|\right)$$
$$=f\left(|x|\right)-f\left(|x|\right)=0$$

ومنه: $h(x)-h(-x)=0$

② الإستنتاج:

$$h(x)-h(-x)=0 \Leftrightarrow h(-x)=h(x)$$

ومنه نستنتج أنّ h دالة زوجية والمنحنى $\left(C_h\right)$ يقبل محور التراتيب كمحور تناظر له.

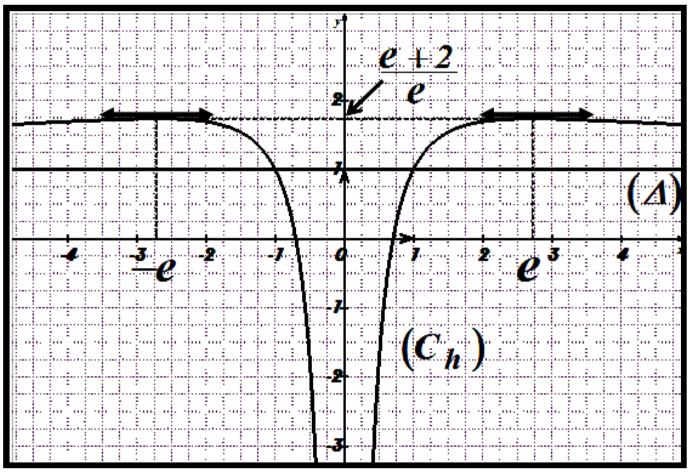
ب) إنشاء $\left(C_h\right)$ إعتمادا على المنحنى $\left(C_f\right)$

$$\begin{cases} h(x)=f(x): x\in]0;+\infty[\\ h(x)=f(-x): x\in]-\infty;0[\end{cases}$$

① في المجال $]0;+\infty[$ المنحنى $\left(C_h\right)$ ينطبق على $\left(C_f\right)$.

② في المجال $]-\infty;0[$ المنحنى $\left(C_h\right)$ نظير المنحنى $\left(C_f\right)$ بالنسبة لمحور التراتيب.

ومنه الرسم:



جـ) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m لعدد حلول المعادلة:

$$\ln x^2=(m-1)|x| \ldots (*)$$

$$(*)\Leftrightarrow 2\ln|x|=m|x|-|x|$$
$$\Leftrightarrow m|x|=|x|+2\ln|x|$$
$$\Leftrightarrow m=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}$$

ومنه: $(*)\Leftrightarrow h(x)=m$

إذن حلول المعادلة $(*)$ هي فواصل النقط المشتركة بين المنحنى $\left(C_h\right)$ والمستقيم

$\left(\Delta_m\right)$ ذو المعادلة $y = m$.

(مستقيم يوازي محور الفواصل)

المناقشـــــــة :

① إذا كان $m \in \left]-\infty ; 1\right[$ فإن :

للمعادلة $(*)$ حليـــــن .

② إذا كان $m \in \left]1 ; \frac{e+2}{e}\right[$ فإن :

للمعادلة $(*)$ أربعـــــة حلول .

③ إذا كان $m = \frac{e+2}{e}$ فإن :

للمعادلة $(*)$ حلين مضاعفين .

④ إذا كان $m \in \left]\frac{e+2}{e} ; +\infty\right[$ فإنه

ليس للمعادلة $(*)$ حلولا في $\mathbb{R}^*$.

❁ إنتـــــــــــهى ❁

Jeudi 05/06/2014