حل بكالوريا :دورة جوان 2010

حل الموضوع الأول

التمرين الأول :

1 . لدينا: $|z_A| = |1+i| = \sqrt{2}$ ، لتكن $\theta_1 = arg(z_A)$. لدينا: $\begin{cases} cos\,\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\,\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ،

ومنه : $\theta_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

وبالتالي: $\dfrac{\pi}{4}$ عمدة لـ z_A ، إذن الشكل الأسي لـ z_A هو : $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

ولدينا: $|z_B| = |3i| = 3$ ، لتكن $\theta_2 = arg(z_B)$. لدينا: $\begin{cases} cos\,\theta_2 = \dfrac{0}{3} = 0 \\ sin\,\theta_2 = \dfrac{3}{3} = 1 \end{cases}$ ، ومنه :

$\theta_2 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

وبالتالي: $\dfrac{\pi}{4}$ عمدة لـ z_B ، إذن الشكل الأسي لـ z_B هو : $z_B = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$.

2 . أ / الكتابة المركبة للتشابه S هي من الشكل $z' = az + b$ ، حيث $a = 2i$
و $b = 6 + 3i$ ، إذن :مركزه النقطة ذات اللاحقة:

$\dfrac{b}{1-a} = \dfrac{6+3i}{1-2i} = \dfrac{6+3i}{1-2i} \times \dfrac{1+2i}{1+2i} = 3i = z_B$ ، إذن مركز التشابه S هو النقطة B

ونسبته: $|a| = |2i| = 2$ ، وزاويته: $arg(a) = arg(2i) = \dfrac{\pi}{2}$.

ب / $C = S(A)$ معناه: $z_C = 2iz_A + 6 + 3i$ ، ومنه: $z_C = 2i(1+i) + 6 + 3i$

ومنه: $z_C = 4 + 5i$.

جـ / لدينا: $C = S(A)$ ومنه من تعريف التشابه المباشر S ينتج : $\begin{cases} BC = 2BA \\ (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

ومنه : المثلث ABC قائم في B .

3 . أ / لدينا: $z_D = \dfrac{2\times z_A + (-2)\times z_B + 2\times z_C}{2-2+2}$ ، بالحساب نجد: $z_D = 5+3i$.

ب / لدينا: $z_B - z_A = -1+2i$ ، ومن جهة: $z_C - z_D = -1+2i$ ، ومنه:
$z_B - z_A = z_C - z_D$ ، وبالتالي الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع .

ومن جهة اخرى: $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \dfrac{\pi}{2}$ و $BC \neq BA$ لأن: $BC = 2BA$ ، وبالتالي متوازي الأضلاع $ABCD$ مستطيل .

4 . أ / نبين أن العدد $\dfrac{z_B - z_E}{z_D - z_E}$ عدد حقيقي موجب تماما ، لدينا:

$\dfrac{z_B - z_E}{z_D - z_E} = \dfrac{3i-(6+3i)}{5+3i-(6+3i)} = \dfrac{-6}{-1} = 6$ ، بالفعل: $\dfrac{z_B - z_E}{z_D - z_E}$ عدد حقيقي موجب تماما.

ب / لدينا : $arg\left(\dfrac{z_B - z}{z_D - z}\right) = (\overrightarrow{MD};\overrightarrow{MB})$

العدد المركب $\dfrac{z_B - z}{z_D - z}$ حقيقي موجب تماما إذا وفقط إذا كان: $arg\left(\dfrac{z_B - z}{z_D - z}\right) = 2\pi k$

أي: $(\overrightarrow{MD};\overrightarrow{MB}) = 2\pi k$ ، وبالتالي الشعاعان $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MD}$ مرتبطان خطيا ومن نفس الاتجاه ، ومنه: $(\Delta) = (BD) - [BD]$. (المستقيم (Δ) باستثناء القطعة المستقيمة $[BD]$)

التمرين الثاني :

1 – أ / الشعاعان $\overrightarrow{AB}(1;0;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;1;-1)$ غير مرتبطين خطيا لأن مثلا : $\dfrac{1}{-2} \neq \dfrac{1}{-1}$

ب / نبين أن إحداثيات النقط A ، B ، C تحقق المعادلة : $x + y - z - 2 = 0$ ، بالفعل لدينا:

من أجل A المساواة : $1+1-0-2=0$ محققة.

من أجل B المساواة : $2+1-1-2=0$ محققة.

من أجل C المساواة : $-1+2-(-1)-2=0$ محققة.

2 – أ / الجملة: $\begin{cases} x = 0+1\times t \\ y = 4+5\times t \\ z = 3+3\times t \end{cases}$ ، أي : $\begin{cases} x = t \\ y = 4+5t \\ z = 3+3t \end{cases}$ مع t عدد حقيقي هي تمثيل وسيطي للمستقيم (D).

ب / بتعويض التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي (P) نجد المساواة :

$-t + 2(4+5t) - 3(3+3t) + 1 = 0$ ، أي : $10t - 10t - 9 + 9 = 0$ ، أي : $0 = 0$ محققة مهما كان الوسيطي الحقيقي t .

و بتعويض التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي (Q) نجد المساواة :

$-2t+(4+5t)-(3+3t)-1=0$ ، أي : $5t-5t+4-4=0$ ، أي : $0=0$ محققة مهما كان الوسيطي الحقيقي t .

إذن كل نقطة من المستقيم (D) تنتمي إلى كل من المستويين (P) و (Q) ، وهذا مايدل أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D).

$3-$ بما أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D) فإنه لتعيين تقاطع المستويات الثلاثة (ABC) ، (P) و (Q) يكفي تعيين تقاطع المستقيم (D) مع المستوي (ABC) .

لأجل ذلك نحل الجملة :
$$\begin{cases} x=-t\ldots(1) \\ y=4+5t\ldots(2) \\ z=3+3t\ldots(3) \\ x+y-z-2=0\ldots(4) \end{cases}$$

بتعويض x ، y ، z من (1) و (2) و (3) في المساواة (4) نجد:

$-t+4+5t-(3+3t)-2=0$ ومنه : $t=1$ ، ثم بتعويض $t=1$ في المساوايات (1) و (2) و (3) نجد : $x=-1$ و $y=9$ و $z=6$. إذن المستويات الثلاثة (ABC) ، (P) و (Q) تتقاطع في النقطة : $D(-1;9;6)$.

التمرين الثالث :

I) 1)ـ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty$ وبما أن: $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ ، فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)=+\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\ln(2x-1)\right]=+\infty$ ، إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

ـ لدينا: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}\frac{1}{2}}(2x-1)=0^+$ وبما أن: $\lim\limits_{X\overset{>}{\to}0}\ln X=-\infty$ ، فإن: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}\frac{1}{2}}\ln(2x-1)=-\infty$

ومنه: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}\frac{1}{2}}\left[1+\ln(2x-1)\right]=-\infty$ ، إذن: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}\frac{1}{2}}f(x)=-\infty$.

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال I ولدينا: $f'(x)=0+\dfrac{(2x-1)'}{2x-1}=\dfrac{2}{2x-1}>0$

لأن من أجل كل x من I : $0<2x-1$ ، ومنه: الدالة f متزايدة تماما على المجال I ويكون جدول تغيراتها:

x	$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) نحل المعادلة: $f'(x)=1$ ، لكون معامل توجيه المستقيم (d) يساوي 1 ، ومنه:

$f'(x)=1$ تكافئ $\frac{2}{2x-1}=1$ ، أي: $2x-1=2$ ، ومنه: $x=\frac{3}{2}$.إذن: فاصلة النقطة من المنحني (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) هي $\frac{3}{2}$.

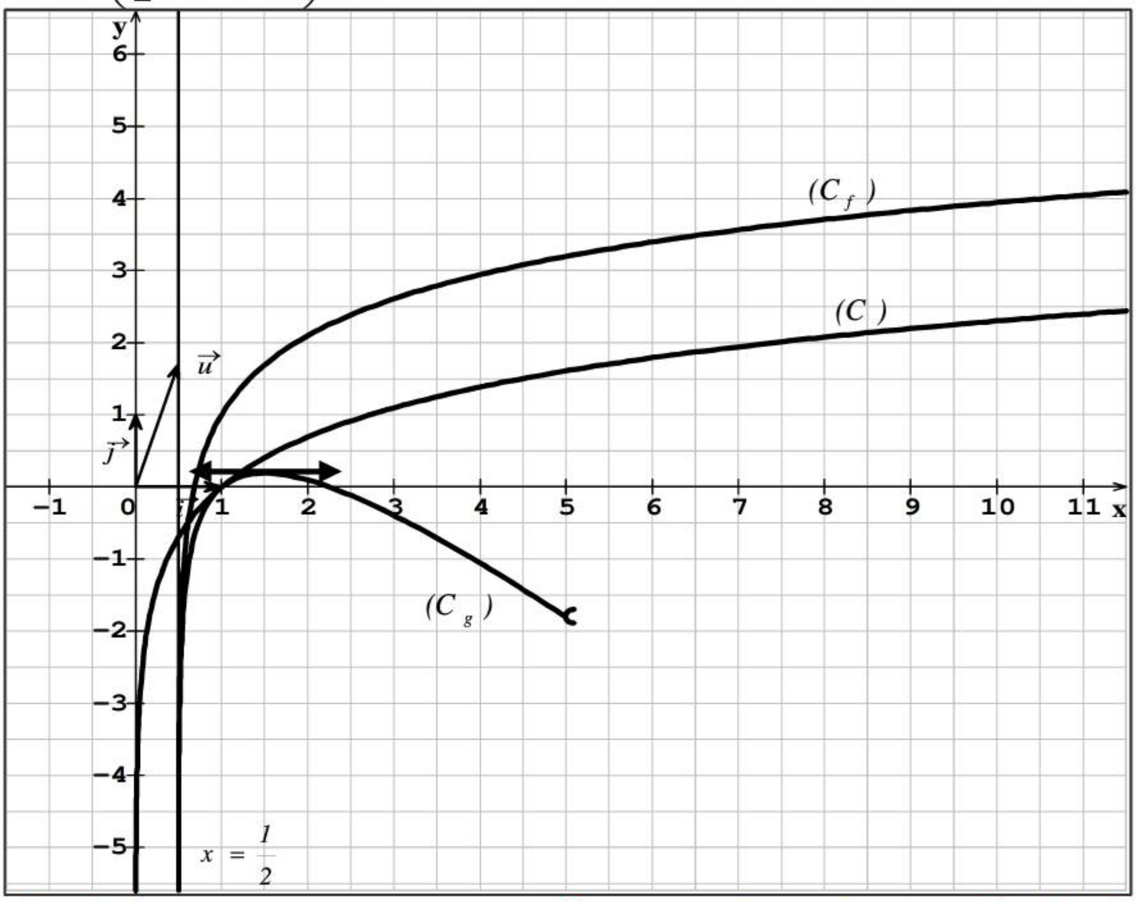
4) من أجل كل x من I لدينا:

$f(x)=1+\ln(2x-1)=1+\ln\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]=1+\ln 2+\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)$، إذن:

$f(x)=\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)+1+\ln 2$ ، ومنه: $a=-\frac{1}{2}$ ، $b=1+\ln 2$.

ب / من المساواة $f(x)=\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)+1+\ln 2$ يمكن استنتاج رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\left(\frac{1}{2};1+\ln 2\right)$.

الرسم:



II) $g(x)=f(x)-x=1-x+ln(2x-1)$.

1) ـ لدينا: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} f(x)=-\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}}[f(x)-x]=-\infty$ ،

إذن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} g(x)=-\infty$.

اثبات أن $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)=-\infty$:

من أجل كل x من I لدينا: $g(x)=(2x-1)\left[\frac{1-x}{2x-1}+\frac{ln(2x-1)}{2x-1}\right]$

لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{1-x}{2x-1}=\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{-x}{2x}=-\frac{1}{2}$ ، ولحساب النهاية: $\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{ln(2x-1)}{2x-1}$ ، نضع:

$u=2x-1$ ، فيكون: $x \to +\infty$ تكافئ $u \to +\infty$ ، ومنه:

$\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{ln(2x-1)}{2x-1}=\lim\limits_{u \to +\infty}\frac{ln u}{u}=0$ ، ومنه: $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\frac{1-x}{2x-1}+\frac{ln(2x-1)}{2x-1}\right]=-\frac{1}{2}$ ، وبما أن:

$\lim\limits_{x \to +\infty}(2x-1)=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)=-\infty$.

2) الدالة g تقبل الاشتقاق على المجال I ولدينا:

$g'(x)=f'(x)-(x)'=\frac{2}{2x-1}-1=\frac{3-2x}{2x-1}$ ، إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $3-2x$

ولدينا:

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه جدول تغيرات الدالة g :

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}+ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

3) أ / لدينا: $g(1)=1-1+ln(2\times 1-1)=0$ ،

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ و تأخذ قيمها في المجال

$\left]-\infty;-\frac{1}{2}+ln\,2\right[$ ، وبما أن: $-\frac{1}{2}+ln\,2>0$ فإن: $0\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}+ln\,2\right[$ ، ومنه حسب

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α ، ولكون:

$g(2)=0,0986...>0$ و $g(3)=-0,3905...<0$ فإن: $2<\alpha<3$.

ب / الرسم: أنظر الشكل السابق .

4) من دراسة تغيرات الدالة g و السؤال 3) نتحصل على إشارة $g(x)$ على النحو التالي :

x	$\frac{1}{2}$		1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

وتكون وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (d) كما يلي :

- (C_f) تحت المستقيم (d) على كل من المجالين $\left]\frac{1}{2};1\right[$ ، $]\alpha;+\infty[$.
- (C_f) فوق المستقيم (d) على المجال $]1;\alpha[$.
- (C_f) يقطع المستقيم (d) في النقطتين $A(1;1)$ ، $B(\alpha;\alpha)$.

5) بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I فإنها متزايدة تماما على المجال $]1;\alpha[$ ، ومنه:

$f(1)<f(x)<f(\alpha)$ ، وبما ان: $f(1)=1$ و $f(\alpha)=\alpha$ ، لأن $g(\alpha)=0$ ، فإن:

$1<f(x)<\alpha$ ، إذن: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;\alpha[$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى

المجال $]1;\alpha[$.

III) 1) لدينا:

$$u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)=1+\left[ln\left(2\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)-1\right]=1+ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

ومنه: $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$ تكافئ $1+ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=1+2\ln 3-3\ln 2$ ، أي:

$ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=ln\,9-ln\,8$ ، أي: $ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=ln\left(\frac{9}{8}\right)$ ، ومنه: $\frac{n+1}{n}=\frac{9}{8}$ ، ومنه:

$9n=8n+8$ ، ومنه: $n=8$.

2) لدينا: $u_n = 1+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1+\ln(n+1)-\ln n$ ، ومنه:

$$\begin{cases} u_1 = 1+\ln 2-\ln 1 \\ u_2 = 1+\ln 3-\ln 2 \\ u_3 = 1+\ln 4-\ln 3 \\ . \\ . \\ . \\ u_{n-1} = 1+\ln n-\ln(n-1) \\ u_n = 1+\ln(n+1)-\ln n \end{cases}$$

، بجمع المساوايات طرفا إلى طرف نجد :

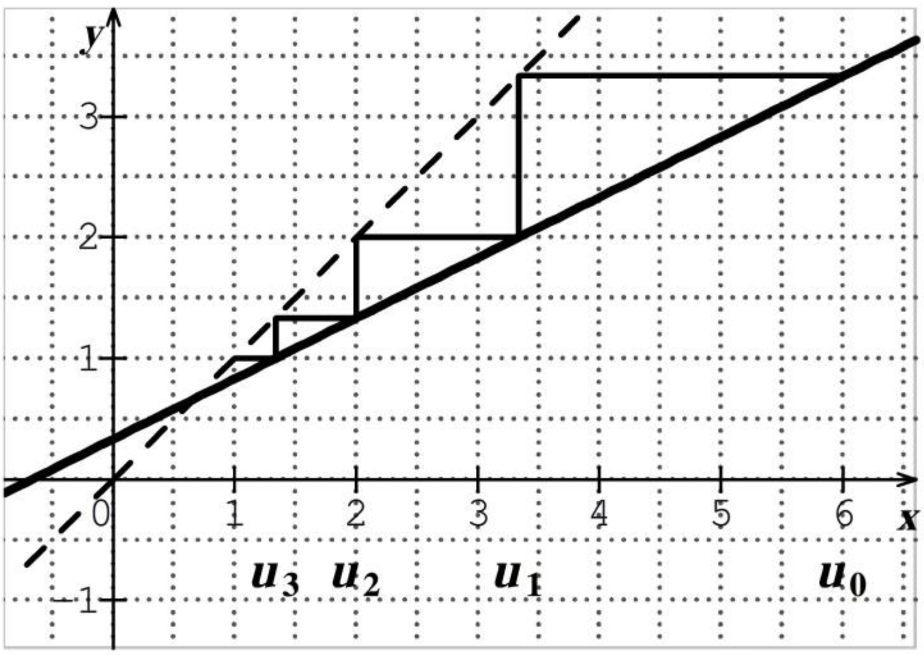
$$S_n = \left(1+\cancel{\ln 2}-\ln 1\right)+\left(1+\cancel{\ln 3}-\cancel{\ln 2}\right)+\left(1+\cancel{\ln 4}-\cancel{\ln 3}\right)+\dots$$
$$+\left[1+\cancel{\ln n}-\cancel{\ln(n-1)}\right]+\left[1+\ln(n+1)-\cancel{\ln n}\right]$$
$$=(1+1+1+\dots+1)+\ln(n+1) = n\times 1+\ln(n+1)$$

إذن: $S_n = n+\ln(n+1)$.

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1 – أ) أنظر الرسم .



ب) نضع $x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ فنجد $x = \frac{2}{3}$

ومنه (Δ) و (D) يتقاطعان في النقطة $I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

جـ) التخمين : المتتالية (u_n) متناقصة.

2. أ) * المرحلة 1: من أجل $n=0$ لدينا $P(0)$ محققة لأن $u_0 > \frac{2}{3}$.

* المرحلة 2: نفرض صحة $p(n)$ أي : $u_n > \frac{2}{3}$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $u_{n+1} > \frac{2}{3}$.

لدينا : $u_n > \frac{2}{3}$ ومنه $\frac{1}{2}u_n > \frac{1}{3}$ ومنه $\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} > \frac{2}{3}$ أي : $u_{n+1} > \frac{2}{3}$.

* الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{2}{3}$.

ب) لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} - u_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}u_n$ ، وبما أن $u_n > \frac{2}{3}$ فإن $-\frac{1}{2}u_n < -\frac{1}{3}$

ومنه : $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}u_n < 0$ ، أي $u_{n+1} - u_n < 0$ ، إذن (u_n) متناقصة.

3. أ) لدينا : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ ومنه :

$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}v_n$ ، ومنه (v_n) متتالية هندسية

أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - \frac{2}{3} = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$.

ب) لدينا : $v_n = v_0 \times q^n = \frac{16}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه : $u_n = v_n + \frac{2}{3} = \frac{16}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$.

جـ) لدينا :

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{16}{3} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{32}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

ومنه : $S'_n = \left(v_0 + \frac{2}{3}\right) + \left(v_1 + \frac{2}{3}\right) + \ldots + \left(v_n + \frac{2}{3}\right) = (v_0 + v_1 + \ldots + v_n) + \frac{2}{3}(n+1)$.

$$= \frac{32}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{2}{3}(n+1)$$

التمرين الثاني :

1. لدينا: $\Delta = 36-72 = -36 = (6i)^2$ ومنه المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين :

$z_1 = \frac{6+6i}{2} = 3+3i$ ، $z_2 = \overline{z_1} = 3-3i$.

ـ لدينا: $|z_1| = 3\sqrt{2}$ ، لتكن $\theta_1 = arg(z_1)$. لدينا: $\begin{cases} cos\,\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\,\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ، ومنه : $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$

وبالتالي: $z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، ومنه : $z_2 = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

2 . أ / لدينا: $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 3\sqrt{2}$ ،أي: $OA = OB = OC = OD = 3\sqrt{2}$

ومنه: النقط A ، B ، C ، و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O ونصف القطر $3\sqrt{2}$.

ب / لدينا: $z_B - z_O = e^{i\theta}(z_A - z_O)$ ، ومنه: $e^{i\theta} = \frac{z_A - z_O}{z_B - z_O} = \frac{z_A}{z_B} = \frac{3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

إذن: $\theta = -\frac{\pi}{2}$ هي زاوية الدوران R .

جـ / لدينا: $z_C = -z_A$ إذن: $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$ وبالتالي النقط A ، O و C في استقامية .

ولدينا: $z_D = -z_B$ إذن: $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}$ وبالتالي النقط B ، O و D في استقامية .

د / لدينا: النقط A ، O و C في استقامية وكذلك النقط B ، O و D والنقط A ، B ، C ، و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O أي $[AC]$ و $[BD]$ قطران في هذه الدائرة ، إذن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

ولدينا: B هي صورة A بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ، إذن : $\overrightarrow{OA}$ عمودي على $\overrightarrow{OB}$

وبالتالي (AC) عمودي على (BD) و $AC = BD$.

نستخلص أن متوازي الأضلاع $ABCD$ قطراه متعامدان ومتقايسان فهو مربع .

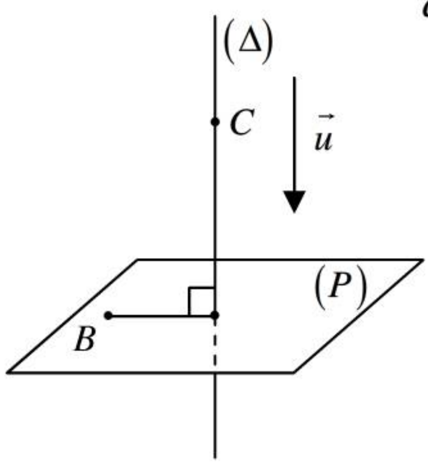
التمرين الثالث :

1) لدينا : $(P): x - 2y + z + 3 = 0$ و $(O;\vec{i}): \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ، فبتعويض $y = 0$ و $z = 0$ في معادلة المستوي (P) نجد: $x + 3 = 0$ ، أي : $x = -3$ ، ومنه : $A(-3;0;0)$.

2) أ – بتعويض إحداثيات النقطة B في معادلة المستوي (P) نجد : $0-0-3+3=0$ محققة.

ب – لدينا : $AB = \sqrt{(-3-0)^2+(0-0)^2+(0+3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

جـ- لدينا : $d(C;(P))=\dfrac{|-1+8+2+2|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{12}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}$



3) أ- المستقيم (Δ) يمر بالنقطة $C(-1;-4;2)$

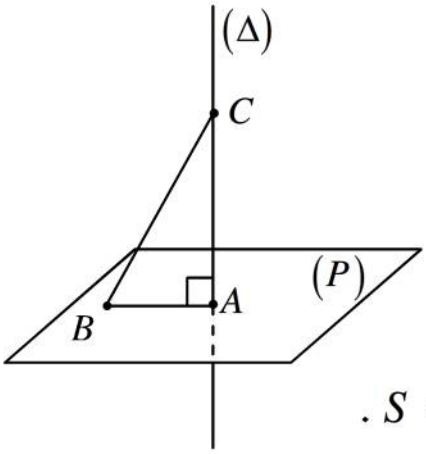
والشعاع $\vec{n}(1;-2;1)$ هو شعاع توجيه له ومنه الجملة :

$\begin{cases} x=-1+1\times t \\ y=-4+(-2)\times t \\ z=2+1\times t \end{cases}$ ، أي : $\begin{cases} x=-1+t \\ y=-4-2t \\ z=2+t \end{cases}$ ،

مع t عدد حقيقي هي تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

ب- بتعويض إحداثيات النقطة A في التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) نجد: $\begin{cases} -3=-1+t \\ 0=-4-2t \\ 0=2+t \end{cases}$

أي : $\begin{cases} t=-2 \\ t=-2 \\ t=-2 \end{cases}$ ، بما أن t وحيد فإن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ).



جـ- بما أن (Δ) عمودي على المستوي (P) و A ، C

نقطتين من (Δ) و A ، B نقطتين من (P) فإن

المثلث ABC قائم في A ، إذا رمزنا بـ: S إلى مساحة

المثلث ABC ، فإن :

$S=\dfrac{AB\times AC}{2}=\dfrac{AB\times d(C;(P))}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}\times 2\sqrt{6}}{2}=6\sqrt{3}$.

التمرين الرابع :

1. أ) لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ ، ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{e^x-1}=1$ ،وبما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ ، فإن:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ ، ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{e^x-1}=0$ ،وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ ، فإن:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ب) لدينا: $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}(e^x-1)=0^+$ ، ومنه : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\left(-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=-\infty$ ، وبما أن : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} x=0$ ، فإن:

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)=-\infty$.

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (e^x - 1) = 0^-$ ، ومنه : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(-\frac{1}{e^x - 1}\right) = +\infty$ ، وبما أن : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} x = 0$ ، فإن: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$.

بما أن : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$ ، نستنتج أن المنحني (C_f) يقبل المستقيم الذي معادلة له : $x = 0$ (محور التراتيب) كمستقيم مقارب بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

2. الدالة f تقبل الاشتقاق على كل من المجالين: $]-\infty;0[$ ، $]0;+\infty[$ ولدينا :

$f'(x) = 1 - \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} > 0$ ، إذن: الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين: $]-\infty;0[$ ، $]0;+\infty[$. ويكون جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\|$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	$\|$	$-\infty \nearrow +\infty$

3. أ) لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{e^x - 1} = 0$. ومنه المستقيم $(\Delta) : y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ولدينا: $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\frac{1}{e^x - 1} - 1\right) = 0$. ومنه: المستقيم $(\Delta') : y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) ـ وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

لدينا: $f(x) - x = -\frac{1}{e^x - 1}$ ، إشارة الفرق $f(x) - x$ موضحة في الجدول الموالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	$-$	$\|$	$+$
$f(x) - x$	$+$	$\|$	$-$

إذن : (C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $]-\infty;0[$ ويقع تحت (Δ) على المجال $]0;+\infty[$.

ـ وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ') :

لدينا: $f(x)-(x+1)=-\frac{1}{e^x-1}-1=-\frac{e^x}{e^x-1}$ ، إشارة الفرق $f(x)-(x+1)$ موضحة في الجدول الموالي:

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$	
e^x-1	$-$	$+$
$f(x)-(x+1)$	$+$	$-$

إذن : (C_f) يقع فوق (Δ') على المجال $]-\infty;0[$ ويقع تحت (Δ') على المجال $]0;+\infty[$.

4 . إثبات أن النقطة $w\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f).

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن $-x$ من $\mathbb{R}^*$ ولدينا:

$$f(2\times 0-x)+f(x)=f(-x)+f(x)=-x-\frac{1}{e^{-x}-1}+x-\frac{1}{e^x-1}$$

$$=\frac{e^x-1}{e^x-1}=1=2\times\frac{1}{2}$$

ومنه: $w\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f).

5 . أ) اثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2<\alpha<1$ و $-1,4<\beta<-1,3$

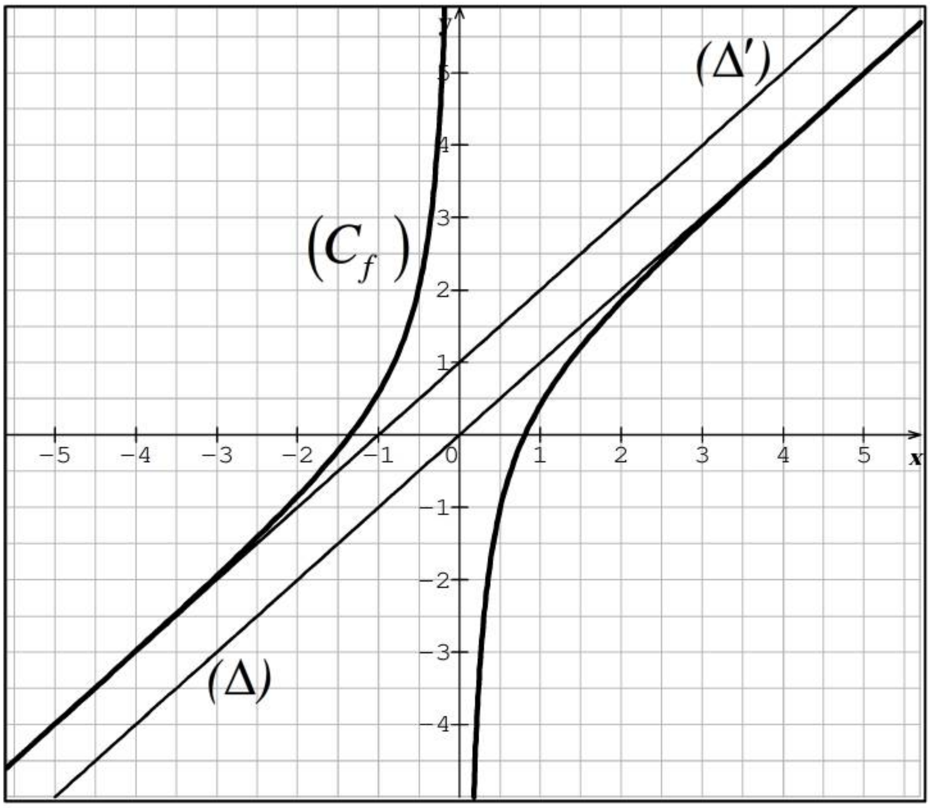
- لدينا: $[\ln 2;1]\subset]0;+\infty[$ ، إذن : f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[\ln 2;1]$ وبماأن : $f(\ln 2)\approx -0,31<0$ و $f(1)\approx 0,41>0$ ، فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]\ln 2;1[$ يحقق: $f(\alpha)=0$.

- ولدينا: $[-1,4;-1,3]\subset]-\infty;0[$ ، إذن : f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-1,4;-1,3]$ وبماأن : $f(-1,4)\approx -0,07<0$ و $f(-1,3)\approx 0,07>0$ ، فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا حلاوحيدا $\beta\in[-1,4;-1,3]$ يحقق: $f(\beta)=0$.

ب) معامل توجيه المستقيم (Δ) يساوي : 1 ، ومنه نضع: $f'(x)=1$ ، أي : $1+\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=1$ ،

ومنه: $\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=0$ ،ومنه: $e^x=0$ ، وهذا مستحيل وبالتالي لا توجد مماسات للمنحني (C_f) توازي المستقيم (Δ).

جـ) الرسم :



د) لدينا: $(m-1)e^{-x}=m$ تكافئ $(m-1)e^{-x}\times e^{x}=m\times e^{x}$، أي: $m-1=me^{x}$

أي : $m=-\dfrac{1}{e^{x}-1}$، ومنه: $x-\dfrac{1}{e^{x}-1}=x+m$، إذن : $f(x)=x+m$.

حلول المعادلة $f(x)=m+1$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ_m) الذي معادلة له : $y=x+m$. إن المستقيم (Δ_m) يوازي كل من المستقيمين (Δ) و (Δ') ، والوسيط m هو الترتيب إلى المبدأ . إذن :

- لما $m\in\left]-\infty;0\right[$ فيوجد حل وحيد موجب .
- لما $m\in\left[0;1\right]$ فلا توجد حلول .
- لما $m\in\left]1;+\infty\right[$ فيوجد حل وحيد سالب .