التصحيح المفصل بكالوريا 2018 شعبة التقني رياضي الموضوع الأول

التمرين الأول :

1) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > \frac{1}{e}$

لدينا $u_0 > \frac{1}{e}$ أي أن $\frac{5}{4e} > \frac{1}{e}$ محققة .

نفرض أن $u_n > \frac{1}{e}$ و لنبرهن أن $u_{n+1} > \frac{1}{e}$

الدالة المرفقة f حيث $f(x) = \frac{2x}{ex+1}$ مشتقاتها $f'(x) = \frac{2}{(ex+1)^2}$ و منه f متزايدة على المجال $\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$ و

$f(u_n) > f\left(\frac{1}{e}\right)$ و منه $u_{n+1} > \frac{\frac{2}{e}}{e\left(\frac{1}{e}\right)+1}$ أي أن $u_{n+1} > \frac{1}{e}$ و منه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > \frac{1}{e}$.

ب-إثبات أن $u_{n+1} - u_n = \frac{e.u_n\left(\frac{1}{e} - u_n\right)}{e.u_n + 1}$ لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{e.u_n + 1} - u_n = \frac{u_n - e.u_n^2}{e.u_n + 1}$ و منه $u_{n+1} - u_n = \frac{e.u_n\left(\frac{1}{e} - u_n\right)}{e.u_n + 1}$.

بما أن $u_n > \frac{1}{e}$ فإن إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ سالبة إذن المتتالية (u_n) متناقصة .

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على الأعداد الطبيعية كما يلي $v_n = \frac{e.u_n}{e.u_n - 1}$

إثبات أن (v_n) متتالية هندسية $v_{n+1} = \frac{e.u_{n+1}}{e.u_{n+1} - 1}$ و منه $v_{n+1} = \frac{e.\frac{2u_n}{e.u_n + 1}}{e.\left(\frac{2u_n}{e.u_n + 1}\right) - 1} = \frac{2e.u_n}{2e.u_n - e.u_n - 1}$ و منه

$v_{n+1} = \frac{2e.u_n}{e.u_n - 1} = 2v_n$ إذن المتتالية هندسية أساسها 2 و حدها الأول $v_0 = \frac{e.u_0}{e.u_0 - 1} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4} - 1}$ و منه $v_0 = -5$.

عبارة حدها العام هي $v_n = -5 \times 2^n$.

3) أ-التحقق $v_n = 1 + \frac{1}{e.u_n - 1}$ بتوحيد المقامات نجد $v_n = \frac{e.u_n}{e.u_n - 1}$ محققة .

و منه نجد $v_n - 1 = \frac{1}{e.u_n - 1}$ بتبديل الطرفين نجد $e.u_n - 1 = \frac{1}{v_n - 1}$ بالتبسيط نجد $u_n = \frac{1}{e}\left[1 + \frac{1}{v_n - 1}\right] = \frac{1}{e}\left(\frac{v_n}{v_n - 1}\right)$ أي

أن $u_n = \frac{1}{e}\left(\frac{-5 \times 2^n}{-5 \times 2^n - 1}\right)$ و منه $u_n = \frac{1}{e}\left(\frac{5 \times 2^n}{5 \times 2^n + 1}\right)$ و هي عبارة الحد العام المطلوبة .

و منه $\lim u_n = \lim \frac{1}{e}\left(\frac{5 \times 2^n}{5 \times 2^n}\right) = \frac{1}{e}$.

ب-حساب المجموع : $S_n = -5\left[\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}\right] = -5\left(2^{n+1} - 1\right)$.

4) أ-دراسة بوقي قسمة 2^n على 7

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	
$2^n\equiv$	1	2	4	$[7]$

ب-تعين قيم العدد الطبيعي n حتى $S_n\equiv 0[7]$ يعني أن $-5\left(2^{n+1}-1\right)\equiv 0[7]$ و $-5\equiv 2[7]$ أي أن $2\left(2^{n+1}-1\right)\equiv 0[7]$ بما أن 2 و 7 أوليان فيما بينهما هذا يعني أن $\left(2^{n+1}-1\right)\equiv 0[7]$ يكافئ $2^{n+1}\equiv 1[7]$

من الجدول السابق نجد أن القيم المطلوبة هي $n+1=3k:\ k\in\mathbb{N}^*$ و منه $n=3k-1\ :\ k\in\mathbb{N}^*$

التمرين الثاني

1) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (Q) له معادلة من الشكل $2x+2y-z+d=0$ و $A\in(Q)$ يعني أن $2\times0+2\times0-2+d=0$ و منه $d=2$ إذن معادلة (Q) هي $2x+2y-z+2=0$.

2) التمثيل الوسيطي للمستقيم الذي يتعامد مع (Q) شعاع توجيهه هو $\vec{n}(2;\ 2;-1)$ و الشامل للنقطة A هو $\begin{cases}x=2t\\ y=2t & :t\in\Re\\ z=-t+2\end{cases}$.

3) أ-التحقق من معادلة المستوي (P) هي $2x-y+2z+5=0$ بتعويض التمثيل الوسيطي له في هذه المعادلة نجد $2(t+m)-(4t-2m+1)+2(t-2m-2)+5=0$ يكافئ $-5+5=0$ محققة .

ب-لدينا $B\in(P)$ يعني أن إحداثياتي هذه النقطة تحقق المعادلة $2x-y+2z+5=0$ أي أن $2\times0-3+2\times(-1)+5=0$ محققة .

الشعاع الناظمي للمستوي (P) هو $\vec{n'}(2;\ -1;\ 2)$ و الشعاع الناظمي للمستوي (Q) هو $\vec{n}(2;\ 2;-1)$ نحسب حدائهما السلمي نجد $\vec{n}\cdot\vec{n'}=4-2-2=0$ و منه (Q) و (P) متعامدان .

4) أ- إيجاد قيم t حتى يكون $d((P);M)=d((Q);M)$ أي أن

$\dfrac{|2\times2t+2\times2t-(-t+2)+2|}{\sqrt{9}}=\dfrac{|2(2t)-2t+2(-t+2)+5|}{\sqrt{9}}$ يكافئ أن $|9t|=9$ إذن $|t|=1$ و منه $\begin{cases}t=1\\ \text{او}\\ t=-1\end{cases}$.

ب-سطح الكرة المماس للمستويين (Q) و (P) مركزه هو نقطة من (Δ) يعني أن $C(2t;2t,-t+2)$ و $d((P);C)=d((Q);C)$ و منه $\begin{cases}t=1\\ \text{او}\\ t=-1\end{cases}$ أي أن $C(2;2,1)$ أو $C(-2;-2,3)$ يجب أن يكون $CA=CB$

نعوض $C(2;2,1)$ نجد أن $CA=\sqrt{4+4+1}=3$ و $CB=\sqrt{4+1+4}=3$ محققة .

نعوض $C(-2;-2,3)$ نجد أن $CA=\sqrt{4+4+1}=3$ و $CB=\sqrt{4+25+4}\neq3$ غير محققة .

و منه $C(2;2,1)$ و نصف قطر هذا السطح هو $CA=3$.

التمرين الثالث :

I - حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$ نحسب المميز $\Delta=-8$ و منه للمعادلة حلين هما $z_1=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ و $z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

II- لدينا $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $z_B=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

1) الكتابة على الشكل ألأسي $z_A=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2e^{\frac{\pi}{4}i}$ و $\frac{1}{z_B}=\frac{1}{\overline{z_A}}=\frac{1}{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}i}$ و منه

$\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}=\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{2018}=2^{1009}.e^{\frac{1009\pi}{2}i}=2^{1009}.e^{\frac{\pi}{2}i}=2^{1009}i$ و هو عدد تخيلي صرف .

2) إثبات أن لاحقة C هي $z_C=-\sqrt{2}+3i\sqrt{2}$ لدينا $C=h(B)$ يعني أن $z_C=-3z_B+(1+3)z_w$ و منه

$z_C=-3(\sqrt{2}-i\sqrt{2})+4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و منه $z_C=-3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}+2\sqrt{2}=-\sqrt{2}+3i\sqrt{2}$ محققة .

3) تعين لاحقة D حيث $D=r(B)$ أي أن $z_D=-iz_B+(1+i)\times 0$ و منه $z_D=-i(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$ إذن $z_D=-i\sqrt{2}-\sqrt{2}$.

4) أ-إثبات أن $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=-i$ لدينا $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\frac{-\sqrt{2}+3i\sqrt{2}-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{-i\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$ و منه $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\frac{-2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}$ أي أن

$\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{2}=-i$ و هو المطلوب .

بما أن $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=-i$ يعني أن $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ و $\frac{AC}{AD}=1$ و منه المثلث ACD قائم في A و متساوي الساقين .

ب- الرباعي $ACED$ مربع إضافة لما سبق يجب أن يكون $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DE}$ يكافئ $z_E-z_D=z_C-z_A$ أي أن $z_E=z_D+z_C-z_A$ و منه $z_E=-i\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{2}+3i\sqrt{2}-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ إذن $z_E-3\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و هو المطلوب .

التمرين الرابع :

لدينا $f(x)=\frac{x}{x-1}e^{-x}$.

1) حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\frac{x}{x-1}e^{-x}=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\frac{x}{x-1}=-\infty$

التفسير البياني هو أن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}e^{-x}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=1$.

2) إثبات عبارة المشتقة : $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}e^{-x}-\frac{x}{x-1}e^{-x}$ و منه $f'(x)=\frac{-1-x^2+x}{(x-1)^2}e^{-x}=\frac{(-x^2+x-1)}{(x+1)^2}e^{-x}$ و هو المطلوب .

إشارتها من إشارة $-x^2+x-1$ نحسب المميز $\Delta=-3$ و منه فهي كمية سالبة على المجال $]-\infty;1[$ و منه الدالة f متناقصة على مجموعة تعريفها .

جدول تغيراتها

x	$-\infty$ $\qquad$ 1
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

3) أ-كتابة معادلة المماس (T) : $y=f'(0)x+f(0)$

و منه $y=-x$.

ب-لدينا $h(x)=e^{-x}+x-1$

دراسة اتجاه تغير الدالة h : $h'(x)=-e^{-x}+1$ و هي تنعدم عند 0

$h'(x)>0$ يكافئ $-e^{-x}+1>0$ يكافئ $e^{-x}<1$ يكافئ $-x<0$ أي أن $x>0$ و منه $h'(x)$ موجبة على المجال $[0;1[$ و سالبة على المجال $]-\infty;0]$ و منه الدالة h متزايدة على المجال $[0;1[$ و متناقصة على المجال $]-\infty;0]$ و منه فهي تقبل قيمة حدية صغرى هي $h(1)=\frac{1}{e}$ و منه فإن h موجبة على المجال $]-\infty;1[$.

4) إثبات المساواة : $f(x)+x=\frac{x.h(x)}{x-1}$ لدينا $\frac{x.h(x)}{x-1}=\frac{x}{x-1}\left[e^{-x}+x-1\right]=\frac{x}{x-1}.e^{-x}+x=f(x)+x$ و هو المطلوب .

الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (T) على حسب إشارة الفرق $f(x)+x$ و هي من إشارة $\frac{x.h(x)}{x-1}$ بما أن h موجبة فإن إشارته من إشارة $\frac{x}{x-1}$

و هو موجب على المجال $]-\infty;0[$ و منه (C_f) يقع فوق للمستقيم (T) في هذا المجال .

و هو سالب على المجال $]0;1[$ و منه (C_f) يقع فوق للمستقيم (T) في هذا المجال.

التفسير الهندسي لهذه النتيجة هو أن (C_f) له نقطة انعطاف و هي النقطة ذات الفاصلة 0 .

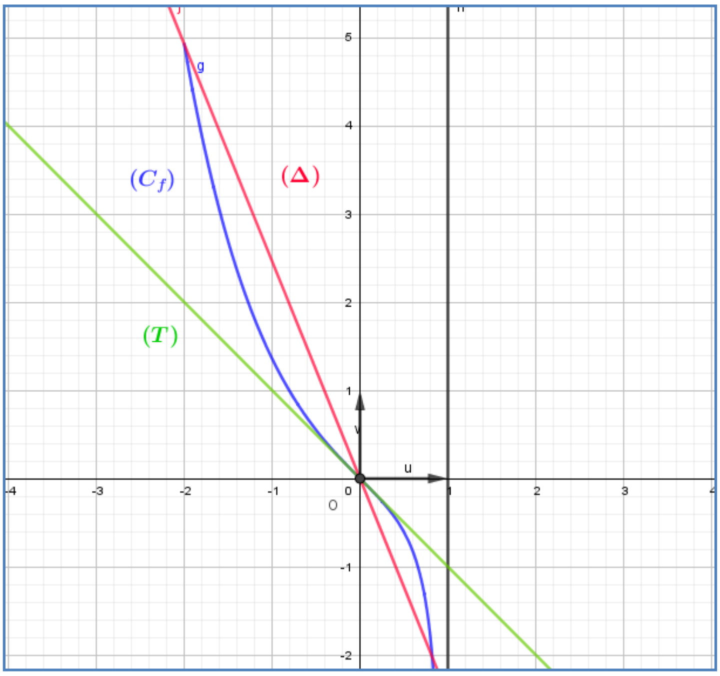
5) كتابة معادلة المستقيم(Δ):

يمر من المبدأ يعني له معادلة من الشكل $y=ax$.

و يمر من $A\left(-2;\frac{2}{3}e^2\right)$ يعني أن $\frac{2}{3}e^2=-2a$ و منه $a=-\frac{1}{3}e^2$.

و منه المعادلة الديكارتية للمستقيم (Δ) هي $y=-\frac{1}{3}e^2.x$.

رسم المنحنى و المستقيمات



6) أ - على المجال $[-1;0]$ لدينا $0\le\frac{x}{x-1}\le1$ و

$1\le e^{-x}\le e$

و منه $0 \le \frac{x}{x-1} \le 1$ بالضرب في e^{-x} نجد

$\frac{x}{x-1}e^{-x} < e^{-x}$.

$1 \le e^{-x}$ بالضرب في $\frac{x}{x-1}$ نجد $\frac{x}{x-1} \le \frac{x}{x-1}.e^{-x}$

إذن $\frac{x}{x-1} \le \frac{x}{x-1}e^{-x} < e^{-x}$.

ب- التحقق بتوحيد المقامات $\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1+\frac{1}{x-1}$ و هو المطلوب.

لدينا على المجال $[-1\,;0]$: $\frac{x}{x-1} \le \frac{x}{x-1}e^{-x} < e^{-x}$ و منه $\int_{-1}^{0}\frac{x}{x-1}dx \le \int_{-1}^{0}\frac{x}{x-1}e^{-x}dx < \int_{-1}^{0}e^{-x}dx$ أي أن

$\int_{0}^{1}\left[1+\frac{1}{x-1}\right]dx \le \int_{0}^{1}f(x)dx < -\left[e^{-x}\right]_{-1}^{0}$ يعني أن $\left[x+\ln|x-1|\right]_{-1}^{0} \le \int_{0}^{1}f(x)dx < -\left[e^{-x}\right]_{-1}^{0}$ و منه

$-1+\ln 2 \le \int_{0}^{1}f(x)dx < -1+e$ و هو المطلوب .

7) المناقشة البيانية للمعادلة $f(x)=mx$ حلها و إيجاد فواصل نقاط تقاطع (C_f) و المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=mx$

لما $m \in \left]-\infty; -\frac{1}{3}e^{2}\right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة حل حيد .

لما $m \in \left[-\frac{1}{3}e^{2};-1\right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في ثلاثة نقاط و منه للمعادلة ثلاثة حلول .

لما $m \in [-1; +\infty[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة حل حيد .

انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول :

لتكن (u_n) متتالية عبارة حدها العام هو $u_n = 2\times 3^n$ و (v_n) متتالية حدها الأول $v_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n فإن

$v_{n+1} = 5v_n + u_n$

1) نضع $w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}$

إثبات أن (w_n) متتالية هندسية $w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} + \frac{1}{2} = \frac{5v_n + u_n}{3u_n} + \frac{1}{2} = \left(\frac{5}{3}\right)\frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ و منه

$w_{n+1} = \left(\frac{5}{3}\right)\frac{v_n}{u_n} + \left(\frac{5}{6}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)\left[\frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}\right] = \frac{5}{3}w_n$ و منه (w_n) متتالية هندسية أساسها $\left(\frac{5}{3}\right)$ و حدها الأول

$w_0 = \left[\frac{v_0}{u_0} + \frac{1}{2}\right] = \frac{4}{2} + \frac{1}{2}$ و منه $w_0 = \frac{5}{2}$.

2) كتابة عبارة الحد العام w_n بدلالة n : $w_n = \frac{5}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^n = \frac{5^{n+1}}{2\times 3^n}$.

لدينا $w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}$ يكافئ $\frac{v_n}{u_n} = w_n - \frac{1}{2}$ ومنه $v_n = w_n.u_n - \frac{1}{2}.u_n$ بالتعويض نجد $v_n = \frac{5^{n+1}}{2\times 3^n}.\times 2\times 3^n - \frac{1}{2}.2\times 3^n$ أي

أن $v_n = 5^{n+1} - 3^n$ و هو المطلوب .

3) دراسة بواقي القسمة

$n =$	$n = 2k$	$n = 2k+1$	
$5^n \equiv$	1	5	$[8]$

$n =$	$n = 2k$	$n = 2k+1$	
$3^n \equiv$	1	3	$[8]$

4) تعين قيم n باقي قسمة v_n على 8 لدينا $v_n = 5^{n+1} - 3^n$ لكن الجدول

$n =$	$n = 2k$	$n = 2k+1$	
$v_n \equiv$	4	6	$[8]$

الباقي هو 4 لما $n = 2k$ حيث k عدد طبيعي

و الباقي 6 لما $n = 2k+1$ حيث k عدد طبيعي

التمرين الثاني

كيس يحوي 7كريات منها 3 بيضاء و 4 خضراء .

I - عدد حالات الممكنة الكلية هي $C_7^2 = 21$

1) حساب احتمال الحادثة A : $P(A) = \frac{C_4^1 \times C_3^1}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$.

2) حساب احتمال الحادثة B : $P(B) = \frac{C_4^2 + C_3^2}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$

II - اللعبة

1) التبرير : يدفع اللعب α دينار جزائري

إذا سحب كرتين بيضاوين يتحصل على 100 دينار جزائري و ربحه هو $100-\alpha$.

إذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يتحصل على 50 دينار جزائري و ربحه هو $50-\alpha$.

إذا سحب كرتين خضراوين يخسر ما دفع $\alpha-$دينار جزائري

و منه قيم المتغير هي $100-\alpha$ و $50-\alpha$ و $-\alpha$.

قانون الاحتمال

x_i	$-\alpha$	$50-\alpha$	$100-\alpha$
$P(X=x_i)$	$\frac{C_4^2}{21}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{C_3^2}{21}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$

2) إثبات عبارة الأمل ألرياضياتي $E(X)=-\alpha\frac{2}{7}+(50-\alpha)\frac{4}{7}+(100-\alpha)\frac{1}{7}$ و منه $E(X)=\frac{-7\alpha+300}{7}=-\alpha+\frac{300}{7}$.

إيجاد أكبر قيمة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب أي أن الأمل ألرياضياتي موجب $E(X)>0$ يعني أن $-\alpha+\frac{300}{7}>0$

يكافئ $\alpha<\frac{300}{7}$ و α طبيعي يعني أن $\alpha\leq 42$ و منه القيمة المطلوبة للعدد α هي 42 دينار جزائري .

التمرين الثالث:

I - أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $4z^2-2z+1=0$.........(E) نحسب المميز $\Delta=-12$ و منه للمعادلة حلين هما

$z_1=\frac{2+2i\sqrt{3}}{8}=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$ و $z_2=\frac{2-2i\sqrt{3}}{8}=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}$.

ب-كتابة $\frac{1}{z_1}$; $\frac{1}{z_2}$ على الشكل ألأسي : لدينا $z_1=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}i}$ و منه $\frac{1}{z_1}=2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

و $z_2=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{3}i}$ و منه $\frac{1}{z_2}=2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

II - لدينا $z_A=4$ و $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

1) أ- حساب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{-3-i\sqrt{3}}=\frac{3-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}$ و منه $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}==\frac{\left(3-i\sqrt{3}\right)^2}{12}=\frac{6-6i\sqrt{3}}{12}$ إذن

$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{-\frac{\pi}{3}i}$.

مما سبق نستنتج أن $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$ لأن $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$ و $AC=AB$ لأن $\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=1$

و منه المثلث ABC متقايس الأضلاع .

ب- بما أن $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=e^{-\frac{\pi}{3}i}$ فإن النقطة B صورة C بالدوران الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{3}$.

2) إيجاد لاحقة D صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$ أي أن $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$ و منه $z_D-z_A=z_B-z_C$ و منه $z_D=z_A+z_B-z_C=4+2i\sqrt{3}$.

بما أن $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$ و ABC متقايس الأضلاع فإن الرباعي $ACBD$ معين لأنه متوازي أضلاع كل أضلاعه متقايسة .

3) تحديد مجموعة النقط (γ) : $\left|iz+\sqrt{3}-i\right|=\left|z-1+i\sqrt{3}\right|$ يكافئ $\left|i\right|\left|z+\frac{\sqrt{3}}{i}-1\right|=\left|z-1+i\sqrt{3}\right|$ يكافئ

$\left|z-i\sqrt{3}-1\right|=\left|z-1+i\sqrt{3}\right|$ يكافئ $BM=CM$ مجموعة النقط M هي محور القطعة المستقيمة $[CB]$.

4) تبين أن G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC و التي هي نقطة تقاطع محاور المثلث ABC و (γ) أحد محاوره إذن $G\in(\gamma)$.

التمرين الرابع :

I - لدينا $g(x)=2-x+\ln x$

1) أ-دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;1[$: $g'(x)=-1+\frac{1}{x}=\frac{-x+1}{x}$ و هي موجبة على المجال $]0;1[$ إذن g متزايدة على هذا المجال .

ب- الدالة g متزايدة و مستمرة على $]0;1[$ و $g(0{,}15)=-0{,}04$ و $g(0{,}16)=0{,}007$

فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0{,}15<\alpha<0{,}16$.

2) استنتاج إشارة $g(x)$:

x	0		α		1
إشارة $g(x)$		$-$	0	$+$	

II - لدينا $f(x)=\frac{1-2x+\ln x}{x-1}$

1) حساب النهايات $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\frac{-1}{x-1}=-\infty$ و منه نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب للمنحنى (C_f).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1-2x}{x-1}+\frac{\ln x}{x-1}\right]=-2+0=-2$ بالتزايد المقارن و منه نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y=-2$ مقارب للمنحنى (C_f).

2) أ-إثبات عبارة المشتقة : $f'(x)=\frac{\left(-2+\frac{1}{x}\right)(x-1)-(1-2x+\ln x)}{(x-1)^2}$ و منه $f'(x)=\frac{-2x+1+2-\frac{1}{x}-1+2x-\ln x}{(x-1)^2}$ أي أن

$f'(x)=\frac{2-\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}=\frac{2-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$ و منه $f'(x)=\frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$ و هو المطلوب .

ب-إشارة المشتقة السابقة من إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$ من دراسة إشارة g على المجال $]0;1[$:

الأستاذ جواليل أحمد أسامة – ثانوية الشيخ أمود تمنغست 2018

$g\left(\frac{1}{x}\right)\geq 0$ يكافئ $\alpha\leq\frac{1}{x}<1$ بالقلب نجد $1<x\leq\frac{1}{\alpha}$ و منه f متزايدة على المجال $\left]1;\frac{1}{\alpha}\right]$.

$g\left(\frac{1}{x}\right)\leq 0$ يكافئ $0<\frac{1}{x}\leq\alpha$ بالقلب نجد $x\geq\frac{1}{\alpha}$ و منه f متناقصة على المجال $\left[\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$.

جدول تغيرات الدالة f

x	1		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$					
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\frac{1}{\alpha})$	$\searrow$	-2

3) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-2$

لدينا $f(x)+2=\frac{1-2x+\ln x}{x-1}+2=\frac{-1+\ln x}{x-1}$.

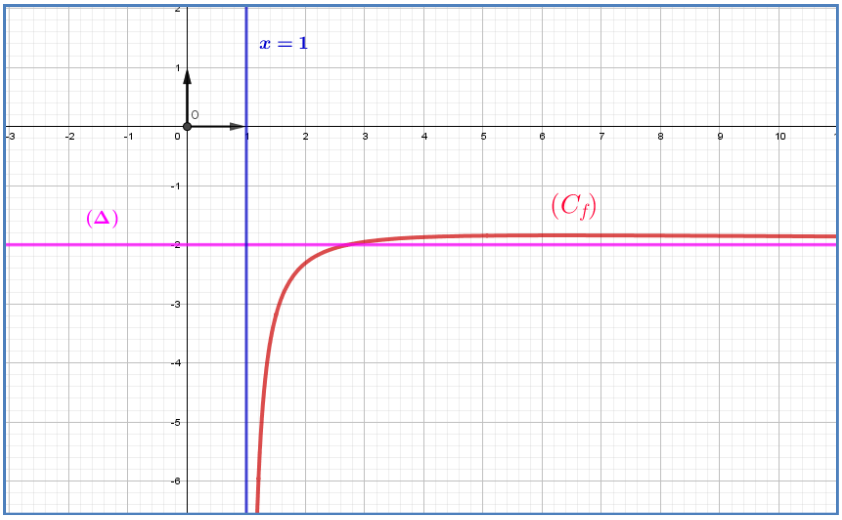
إشارة الفرق من إشارة $-1+\ln x$ على المجال $]1;+\infty[$:

ينعدم عند e و منه (C_f) و (Δ) يتقاطعان عند النقطة ذات الفاصلة e.

يكون موجبا على المجال $]e;+\infty[$ و منه (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]e;+\infty[$.

يكون سالباً على المجال $]1;e[$ و منه (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) على المجال $]1;e[$.

4) رسم المنحنى (C_f) و المستقيمان المقاربان



5) لدينا $(C_{|f|})$ و (C_f) متناظران بالنسبة لحامل محور الفواصل

المعادلة $|f(x)|=m$ تقبل حلين متمايزين يعني أن $(C_{|f|})$ يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي معادلته $y=m$

(و هو موازي لحامل محور الفواصل)

في نقطتين

من البيان نلاحظ أنه حتى يتقاطع (Δ_m) و $(C_{|f|})$ في نقطتين

يجب أن يكون $2<m<-f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$