الحل المفصّل للموضوع الأوّل

التمرين الأوّل:

1) كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي.

$$z_A=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$.z_B=3(1+i)=3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n، بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا.

$$.\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}}\right)^n=\left(e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^n=e^{i\left(-\frac{n\pi}{4}\right)}$$

$\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقي معناه $\arg\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n=k\pi$ ومنه $\frac{-n\pi}{4}=k\pi$ وعليه $n=-4k$ أي $n=4k'$ حيث $k'\in\mathbb{N}$.

جـ) z عدد مركب حيث $\frac{z}{z_A}=4e^{i\frac{\pi}{12}}$ ؛

حساب طويلة العدد z وعمدة له.

لدينا $z=4e^{i\frac{\pi}{12}}z_A=4e^{i\frac{\pi}{12}}\times\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=4\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)}=4\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

إذن $|z|=4\sqrt{2}$ و $\arg z=-\frac{\pi}{6}$.

كتابة $\frac{z}{z_A}$ على الشكل الجبري.

لدينا $z=4\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\sqrt{6}-2i\sqrt{2}$

ومنه $\frac{z}{z_A}=\frac{2\sqrt{6}-2i\sqrt{2}}{1-i}=\frac{2\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2\left(\sqrt{6}+i\sqrt{6}-i\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}{2}=\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

د) استنتاج $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

لدينا $\frac{z}{z_A}=4e^{i\frac{\pi}{12}}$ ومن جهة أخرى $\frac{z}{z_A}=\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

إذن $4e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}=\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ ومنه $e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ وعليه

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ أي $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

2) أ) حساب اللاحقة z_C للنقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

لدينا $z_C - z_A = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}(z_B - z_A)$ معناه $z_C = i(z_B - z_A) + z_A$ يكافئ $z_C = i(2+4i)+1-i$ أي $z_C = -3+i$.

استنتاج طبيعة المثلث ABC.

لدينا $AB = AC$ و $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}$ إذن المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

ب) حساب z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A;-1),(B;1),(C;1)\}$.

$z_D = -z_A + z_B + z_C$ يكافئ $z_D = -1+i+3+3i-3+i$ أي $z_D = -1+5i$.

تبيين أن $ABDC$ مربع.

لدينا $z_D = -z_A + z_B + z_C$ معناه $z_D - z_C = -z_A + z_B$ وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ زيادة على ذلك لدينا $AB = AC$ و $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}$ إذن $ABDC$ مربع.

التمرين الثاني:

1) أ) تبيين أن النقط A، B و C تعين مستويا.

لدينا $\overrightarrow{AB}(1;-2;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-3;1;5)$ و $\frac{-2}{1} \neq \frac{1}{-3}$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقط A، B و C تعين مستويا.

ب) التحقق أن الشعاع $\vec{n}(2;1;1)$ ناظمي للمستوي (ABC).

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 2\times1+1\times-2+1\times0=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 2\times-3+1\times1+1\times5=0$ ومنه $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ أي أن الشعاع $\vec{n}$ ناظمي للمستوي (ABC).

إذن المستوي (ABC) له معادلة من الشكل $2x+y+z+d=0$ ولدينا $B\in(ABC)$ يعني أن $4+2+d=0$ أي $d=-6$ وعليه $2x+y+z-6=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) أ) تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (P).

$$\begin{cases} x = 2+\beta ....(1) \\ y = -1-3\alpha-\beta ......(2) \\ z = -\alpha ....(3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد $x+y=1-3\alpha$ ومنه $x+y=1+3z$ أي $x+y-3z-1=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P).

تبيين أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان.

لدينا $\vec{n}(2;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) و $\vec{n}'(1;1;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P).

و $\vec{n}.\vec{n}' = 2\times1+1\times1+1\times-3=0$ أي $\vec{n}\perp\vec{n}'$ ومنه المستويان (P) و (ABC) متعامدان.

ب) تبيين أن تقاطع المستويين (P) و (ABC) هو المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x = 5+4t \\ y = -4-7t \,;(t\in\mathbb{R}) \\ z = -t \end{cases}$

يكفي التحقق أن (Δ) محتوى في كل من (P) و (ABC).

لدينا $2(5+4t)-4-7t-t-6 = 10+8t-4-7t-t-6=0$ و $5+4t-4-7t+3t-1=0$

ومنه (Δ) محتوى في كل من (P) و (ABC) وعليه $(P)\cap(ABC)=(\Delta)$.

3) **أ) تعيين إحداثيات النقطة H مرجح الجملة** $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$.

$x_H=\dfrac{x_A+x_B-x_C}{1}=\dfrac{1+2+2}{1}=5$ ، $y_H=\dfrac{y_A+y_B-y_C}{1}=\dfrac{2+0-3}{1}=-1$ و

$z_H=\dfrac{z_A+z_B-z_C}{1}=\dfrac{2+2-7}{1}=-3$ وعليه $H(5;-1;-3)$.

ب) حساب المسافة بين النقطة H والمستقيم (Δ).

لدينا H مرجح للجملة $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$ ومنه $H\in(ABC)$.

بما أن (P) و (ABC) متعامدان و $H\in(ABC)$ فإنّ $d(H;(\Delta))=d(H;(P))$.

$d(H;(P))=\dfrac{|5-1+9-1|}{\sqrt{11}}=\dfrac{12}{\sqrt{11}}=\dfrac{12\sqrt{11}}{11}$.

4) لتكن (P') مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)\vec{u}=0$.

أ) تبيين أن (P') مستو يطلب تعيين عناصره المميزة.

لدينا H مرجح للجملة $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$ إذن من أجل كل نقطة M من الفضاء فإنّ:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(1+1-1)\overrightarrow{MH}$ أي $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MH}$.

$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)\vec{u}=0$ تعني $\overrightarrow{MH}\,\vec{u}=0$ ومنه (P') هو المستوي الذي يشمل H و $\vec{u}$ شعاع ناظمي له

أي (P') هو المستوي الذي يشمل H و يعامد المستقيم (Δ).

استنتاج معادلة ديكارتية لـ (P').

نضع $M(x;y;z)$ ومنه $\overrightarrow{MH}(5-x;-1-y;-3-z)$

$\overrightarrow{MH}\,\vec{u}=0$ معناه $4(5-x)-7(-1-y)-(-3-z)=0$ وعليه $-4x+7y+z+30=0$ وهي معادلة ديكارتية لـ (P').

ب) تبيين أنّ المستويات الثلاثة (P) و (ABC) و (P') تتقاطع في نقطة واحدة E.

بما أنّ $(P)\cap(ABC)=\{(\Delta)\}$ فإنّ $(P)\cap(ABC)\cap(P')=(P')\cap(\Delta)$ وبما أن (Δ) يعامد (P') فإن (P') و (Δ) يتقاطعان في نقطة E.

تعيين إحداثيات النقطة E.

إحداثيات النقطة E هي حل للجملة $\begin{cases}x=5+4t\\ y=-4-7t\\ z=-t\\ -4x+7y+z+30=0\end{cases}$ وعليه $-4(5+4t)+7(-4-7t)-t+30=0$

ومنه $-66t-18=0$ أي $t=-\dfrac{3}{11}$ وعليه $E\left(\dfrac{43}{11};-\dfrac{23}{11};\dfrac{3}{11}\right)$.

جـ) حساب بطريقة ثانية المسافة بين H والمستقيم (Δ).

بما أنّ (P') يشمل H ويعامد (Δ) فإن المسقط العمودي للنقطة H على المستقيم (Δ) هي E.

وعليه $d(H;(\Delta))=HE$.

لدينا

$$HE=\sqrt{\left(5-\frac{43}{11}\right)^2+\left(-1+\frac{23}{11}\right)^2+\left(-3-\frac{3}{11}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{12}{11}\right)^2+\left(\frac{12}{11}\right)^2+\left(\frac{-36}{11}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{12}{11}\right)^2+\left(\frac{12}{11}\right)^2+9\left(\frac{12}{11}\right)^2}$$

$$=\sqrt{11\left(\frac{12}{11}\right)^2}=\frac{12\sqrt{11}}{11}$$

إذن $d\left(H;(\Delta)\right)=\dfrac{12\sqrt{11}}{11}$.

التمرين الثالث:

1) أ) تعيين، حسب قيّم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13.

لدينا $8^0\equiv1[13]$ ، $8^1\equiv8[13]$ ، $8^2\equiv12[13]$ ومنه $8^2\equiv-1[13]$ أي $8^4\equiv1[13]$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي p ، $8^{4p}\equiv1[13]$ ، $8^{4p+1}\equiv8[13]$ ، $8^{4p+2}\equiv12[13]$ ، $8^{4p+3}\equiv5[13]$.

n	$4p$	$4p+1$	$4p+2$	$4p+3$
باقي قسمة 8^n على 13	1	8	12	5

2) استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $42\times138^{2015}+2014^{2037}-3$ على 13.

لدينا $42\equiv3[13]$ و $138\equiv8[13]$ ومنه $138^{2015}\equiv8^{2015}[13]$ أي $138^{2015}\equiv8^{4\times503+3}[13]$ ولدينا $8^{4p+3}\equiv5[13]$

إذن $138^{2015}\equiv5[13]$ وعليه $42\times138^{2015}\equiv3\times5[13]$ أي $42\times138^{2015}\equiv2[13]$.

و $2014\equiv12[13]$ أي $2014\equiv-1[13]$ ومنه $2014^{2037}\equiv(-1)^{2037}[13]$ وعليه $2014^{2037}\equiv-1[13]$ أي $2014^{2037}\equiv12[13]$.

إذن $42\times138^{2015}+2014^{2037}-3\equiv2+12-3[13]$ أي $42\times138^{2015}+2014^{2037}-3\equiv11[13]$.

2) أ) تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $(5n+1)\times64^n-5^{2n+3}\equiv(5n+6)8^{2n}[13]$.

لدينا $5+8\equiv0[13]$ معناه $5\equiv-8[13]$ ومنه $5^{2n}\equiv(-8)^{2n}[13]$ أي $5^{2n}\equiv8^{2n}[13]$ و $5^3\equiv-5[13]$

وعليه $5^{2n}\times5^3\equiv-5\times8^{2n}[13]$ أي $5^{2n+3}\equiv-5\times8^{2n}[13]$ معناه $-5^{2n+3}\equiv5\times8^{2n}[13]$ يكافئ

$(5n+1)64^n-5^{2n+3}\equiv(5n+1)64^n+5\times8^{2n}[13]$ ويكافئ $(5n+1)64^n-5^{2n+3}\equiv(5n+1)8^{2n}+5\times8^{2n}[13]$

أي $(5n+1)\times64^n-5^{2n+3}\equiv(5n+6)8^{2n}[13]$.

ب) تعيين مجموعة قيّم العدد الطبيعي n، حتى يكون: $(5n+1)64^n-5^{2n+3}\equiv0[13]$.

$(5n+1)64^n-5^{2n+3}\equiv0[13]$ معناه $(5n+6)8^{2n}\equiv0[13]$ وبما أن 8 و 13 أوليان فيما بينهما فإن 8^{2n} و 13 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص $5n+6\equiv0[13]$ يكافئ $5n\equiv-6[13]$ يكافئ $5n\equiv20[13]$ أي $n\equiv4[13]$ إذن $n=13p+4$ حيث $p\in\mathbb{N}$.

التمرين الرابع:

I) h الدالة العددية المعرفة على $]-2;+\infty[$ بما يلي: $h(x)=(x+2)^2+2-2\ln(x+2)$.

1) حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2}h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2}\ln(x+2)=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2}h(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2}(x+2)^2+2-2\ln(x+2)=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+2)\left(x+2+\frac{2}{x+2}-2\frac{\ln(x+2)}{x+2}\right)=+\infty.$$

2) دراسة اتجاه تغيّر الدالة h.

الدالة h تقبل الإشتقاق على $]-2;+\infty[$ ولدينا:

$$h'(x)=2(x+2)-\frac{2}{x+2}=\frac{2(x+2)^2-2}{x+2}=\frac{2\left((x+2)^2-1\right)}{x+2}=\frac{2(x+1)(x+3)}{x+2}.$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2;+\infty[$: $\frac{2(x+3)}{x+2}>0$ ومنه إشارة $h'(x)$ من نفس إشارة $(x+1)$.

من أجل $x\in]-2;-1[$: $h'(x)<0$ ومن أجل $x\in]-1;+\infty[$: $h'(x)>0$.

ومنه الدالة h متناقصة تماما على المجال $]-2;-1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[-1;+\infty[$.

وجدول تغيّراتها يكون كما يلي:

x	-2		-1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2;+\infty[$: $h(x)\geq 3$ وبالتالي $h(x)>0$ لكل x من $]-2;+\infty[$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=x+1+\frac{2}{x+2}\ln(x+2)$.

1) حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-2}f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا.

لدينا $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-2}\frac{2}{x+2}\ln(x+2)=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-2}f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-2}x+1+\frac{2}{x+2}\ln(x+2)=-\infty$.

وتفسير هذا هندسيا وجود مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) معادلته $x=-2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x+1)}{x+2}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x+1+\frac{2\ln(x+1)}{x+2}=+\infty$.

2) أ) تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2;+\infty[$: $f'(x)=\frac{h'(x)}{(x+2)^2}$.

$$f'(x)=1+\frac{\frac{2}{x+1}(x+2)-2\ln(x+2)}{(x+2)^2}=1+\frac{2-2\ln(x+2)}{(x+2)^2}=\frac{(x+2)^2+2-2\ln(x+2)}{(x+2)^2}=\frac{h(x)}{(x+2)^2}$$

ب) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-2;+\infty[$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2;+\infty[$: $h(x)>0$ و $(x+2)^2>0$ ومنه $f'(x)>0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]-2;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	-2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) **أ) تبيين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.**

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x+2}\ln(x+2)=\lim_{x\to+\infty}2\frac{\ln(x+2)}{x+2}=\lim_{t\to+\infty}2\frac{\ln t}{t}=0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2;+\infty[$ لدينا $f(x)-(x+1)=2\dfrac{\ln(x+2)}{x+2}$.

$f(x)-(x+1)=0$ يعني $\ln(x+2)=0$ يكافئ $x+2=1$ أي $x=-1$.

$f(x)-(x+1)>0$ يعني $\ln(x+2)>0$ يكافئ $x+2>1$ أي $x>-1$.

$f(x)-(x+1)<0$ يعني $\ln(x+2)<0$ يكافئ $0<x+2<1$ أي $-2<x<-1$.

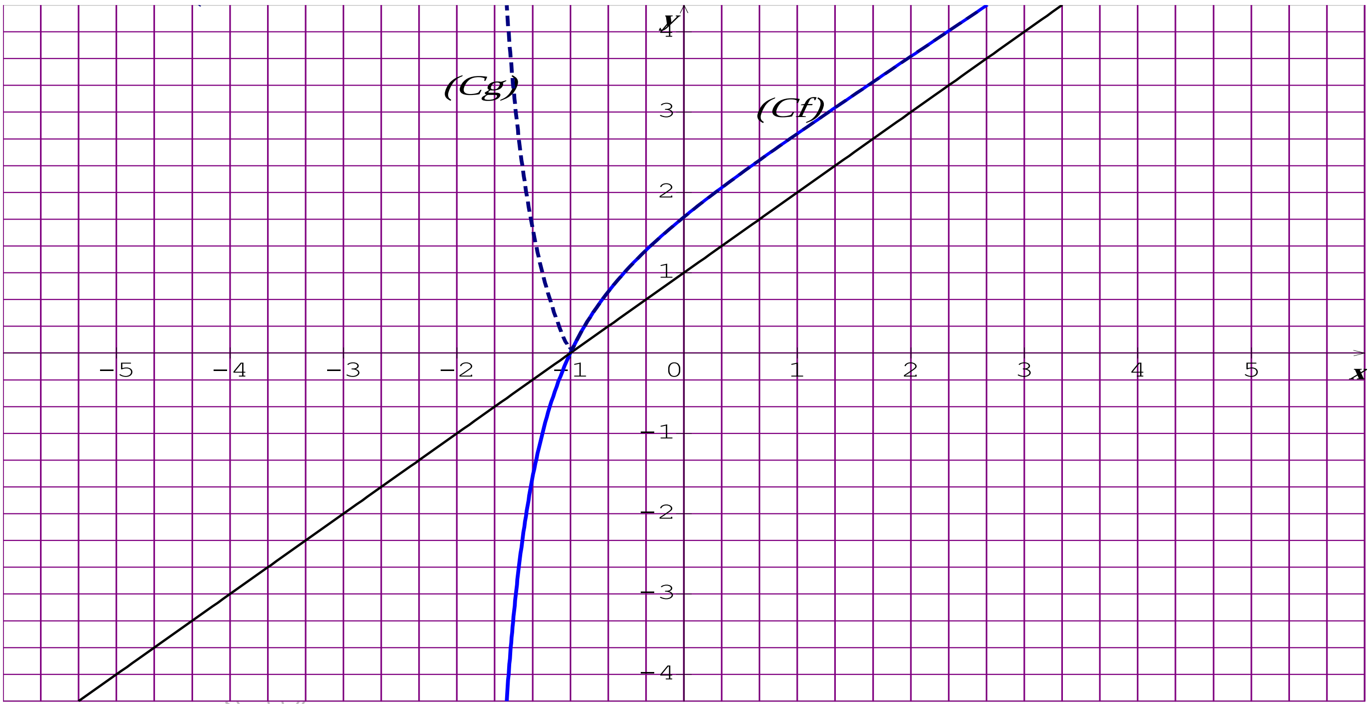
إذن في المجال $]-1;+\infty[$، (C_f) يوجد فوق (Δ) و في المجال $]-2;-1[$، (C_f) يوجد تحت (Δ) و (C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطة التي إحداثيتيها $(-1;0)$.

4) **أ) إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف A.**

من أجل كل x من $]-2;+\infty[$ لدينا $f''(x)=h'(x)$ ومنه إشارة هي نفس إشارة $h'(x)$.

أي $f''(x)$ تنعدم من أجل $x=-1$ وتغيّر من إشارتها ومنه (C_f) يقبل نقطة إنعطاف $A(-1;0)$.

ب) رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f).



جـ) حساب بالسنتيمتر مربع، مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$، $x=-1$ و $x=1$.

$$A=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(x+1+\frac{2}{x+1}\ln(x+2)\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+x+\left(\ln(x+2)\right)^2\right]_{-1}^{1}$$

$$A=\left[\frac{1}{2}+1+(\ln 3)^2\right]-\left[\frac{1}{2}-1\right]=2+(\ln 3)^2\,cm^2.$$

III) g الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=|x+1|+\frac{2}{x+2}|\ln(x+2)|$.

1) حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$.

x	-2		-1		$+\infty$
$\|x+1\|$		$-(x+1)$	0	$(x+1)$	
$\|\ln(x+2)\|$		$-\ln(x+2)$	0	$\ln(x+2)$	
$g(x)$		$-(x+1)-\frac{2}{x+2}\ln(x+2)$	0	$(x+1)+\frac{2}{x+2}\ln(x+2)$	

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{(x+1)+\frac{2}{x+2}\ln(x+2)-0}{x+1}=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}1+\frac{2}{x+2}\frac{\ln(x+2)}{x+1}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}1+\frac{2}{(x+1)+1}\frac{\ln(x+1+1)}{x+1}$$

نضع $x+1=t$ إذا كان $x\xrightarrow{>}-1$ فإن $t\xrightarrow{>}0$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim\limits_{t\xrightarrow{>}0}1+\frac{2}{t+1}\frac{\ln(t+1)}{t}=3$ لأن $\lim\limits_{t\xrightarrow{>}0}\frac{\ln(t+1)}{t}=1$ و $\lim\limits_{t\xrightarrow{>}0}\frac{2}{t+1}=2$.

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\xrightarrow{<}-1}\frac{-(x+1)-\frac{2}{x+2}\ln(x+2)-0}{x+1}=\lim_{x\xrightarrow{<}-1}\frac{-\left[(x+1)+\frac{2}{x+2}\ln(x+2)\right]}{x+1}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\xrightarrow{<}-1}-\left[1+\frac{2}{x+2}+\frac{\ln(x+2)}{x+1}\right]=-3$$

بما أنّ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}\neq\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ فإن الدالة g لاتقبل الإشتقاق عند العدد -1.

وتفسير هذا هندسيا وجود نصفي مماسين للمنحنى الممثل للدالة g عند النقطة A معامل توجيه كل منهما -3 و 3.

3) **رسم المنحنى (C_g) انطلاقا من (C_f).**

لدينا $\begin{cases} g(x)=-f(x);x\in]-2;-1] \\ g(x)=f(x);x\in[-1;+\infty[\end{cases}$ إذن في المجال $]-2;-1]$، (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

وفي المجال $[-1;+\infty[$، (C_g) ينطبق على (C_f).

الحل المفصّل للموضوع الثاني

التمرين الأوّل:

1) **أ) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل A و $\vec{u}(1;2;-2)$ شعاع توجيه له.**

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(\Delta)$ إذا وفقط إذا وُجد عدد حقيقي λ بحيث $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}$.

$\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}$ تكافئ $\begin{cases}x-2=\lambda\\y-3=2\lambda\\z-1=-2\lambda\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=2+\lambda\\y=3+2\lambda;(\lambda\in\mathbb{R})\\z=1-2\lambda\end{cases}$.

ب) تعيين إحداثيات النقطة C نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D).

نحل الجملة $\begin{cases}2+\lambda=1............(1)\\3+2\lambda=1-t.....(2)\\1-2\lambda=3+2t....(3)\end{cases}$ من (1) نجد $\lambda=-1$ بالتعويض في (2) نجد $1=1-t$ أي $t=0$

من أجل $\lambda=-1$ نجد $M(1;1;3)$ من (Δ) ومن أجل $t=0$ نجد نفس النقطة من (D).

وعليه $(\Delta)\cap(D)=\{C(1;1;3)\}$.

2) **تبيين أنّ $\vec{n}(2;-2;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P).**

لدينا $\vec{u}(1;2;-2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و $\vec{v}(0;-1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (D) وهما شعاعان غير مرتبطين خطيا من المستوي (P).

و $\vec{n}\vec{u}=2\times1-2\times2-1\times-2=0$ و $\vec{n}\vec{v}=2\times0-2\times-1-1\times2=0$ أي $\vec{n}\perp\vec{u}$ و $\vec{n}\perp\vec{v}$ ومنه $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (P).

استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (P).

المستوي (P) له معادلة من الشكل $2x-2y-z+d=0$ ولدينا $C\in(P)$ يعني $2-2-3+d=0$ أي $d=3$

إذن المستوي (P) له المعادلة $2x-2y-z+3=0$.

3) **أ) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة B ويعامد المستقيم (Δ).**

بما أن (Q) يعامد (Δ) فإنّ $\vec{u}(1;2;-2)$ هو شعاع ناظمي له.

معادلة للمستوي (Q) من الشكل $x+2y-2z+d=0$ ولدينا $B\in(Q)$ يعني $1+4+4+d=0$ أي $d=-9$

وعليه للمستوي (Q) المعادلة $x+2y-2z-9=0$.

ب) تعيين إحداثيات النقطة E المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (Δ).

بما أن (Q) يعامد (Δ) فإن المسقط لكل نقطة من المستوي (Q) على المستقيم (Δ) هي النقطة E تقاطع (Q) والمستقيم (Δ) وبالأخص المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (Δ) هي E.

لدينا $E\in(\Delta)$ ومنه إحداثيات النقطة E من الشكل $E(2+\lambda;3+2\lambda;1-2\lambda)$.

ولدينا $E\in(Q)$ معناه $x_E+2y_E-2z_E-9=0$ وعليه $2+\lambda+2(3+2\lambda)-2(1-2\lambda)-9=0$ ومنه

$-3+9\lambda=0$ أي $\lambda=\frac{1}{3}$ إذن $E\left(2+\frac{1}{3};3+2\times\frac{1}{3};1-2\times\frac{1}{3}\right)$ أي $E\left(\frac{7}{3};\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)$.

ج) حساب المسافة بين النقطة B والمستقيم (Δ).

$d(B;(\Delta))=BE$ ولدينا $BE=\sqrt{\left(\frac{7}{3}-1\right)^2+\left(\frac{11}{3}-2\right)^2+\left(\frac{1}{3}+2\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{25}{9}+\frac{49}{9}}=\sqrt{\frac{75}{9}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

وعليه $d(B;(\Delta))=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

د) حساب مساحة المثلث BEC.

لدينا E المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (Δ) و بما أن $C\in(\Delta)$ فإن المثلث BEC قائم في E

لدينا $\overrightarrow{EC}\left(-\frac{4}{3};-\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)$ ومنه $EC=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{64}{9}+\frac{64}{9}}=\sqrt{\frac{144}{9}}=4$

وعليه $S\left(BEC\right)=\frac{EB\times EC}{2}=\frac{\frac{5\sqrt{3}}{3}\times 4}{2}=\frac{10\sqrt{3}}{3}ua$.

التمرين الثاني:

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-4(\sin\theta)z+4=0....(1)$

$$\Delta'=4\sin^2\theta-4=-4\left(1-\cos^2\theta\right)=-4\cos^2\theta=\left(2i\cos\theta\right)^2$$

للمعادلة (1) حلان هما $z_1=2\sin\theta+2i\cos\theta$ و $z_2=2\sin\theta-2i\cos\theta$.

2) من أجل $\theta=\frac{\pi}{3}$؛ كتابة z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

$$z_1=2\sin\frac{\pi}{3}+2i\cos\frac{\pi}{3}=2i\left(-i\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}\right)=2i\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{3}}=2e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}=2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$z_2=\overline{z_1}=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

3) أ) كتابة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري، والشكل الأسي.

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{3\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-i}=\frac{2\sqrt{3}}{-2i}=i\sqrt{3}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ومنه $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أنّ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$ و $AC=\sqrt{3}AB$ إذن المثلث ABC قائم في A.

ب) استنتاج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر S مركزه A.

لدينا $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$ و $AC=\sqrt{3}AB$ نستنتج هكذا أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A زاويته $\frac{\pi}{2}$ و نسبته $\sqrt{3}$.

جـ) تعيين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$.

$t\left(B\right)=D$ معناه $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ يكافئ $z_D-z_B=z_C-z_A$ يكافئ $z_D=z_C-z_A+z_B$ يكافئ $z_D=3\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i+\sqrt{3}-i$ أي $z_D=3\sqrt{3}-i$.

بما أن $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ و $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$ فإن $ABDC$ مستطيل.

4) أ) تعيين $\left(\Gamma_1\right)$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\frac{z-z_C}{z-z_B}$ تخيلي صرف.

$\frac{z-z_C}{z-z_B}$ تخيلي صرف معناه $\frac{z-z_C}{z-z_B}=0$ أي $z=z_C$ أو $\arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $z\neq z_B$.

$M\in\left(\Gamma_1\right)$ معناه $M=C$ أو $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{CM}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $M\neq B$.

إذن $\left(\Gamma_1\right)$ هي الدائرة التي قطرها $[BC]$ باستثناء النقطة B.

ب) تعيين (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\frac{z-z_C}{z-z_B}$ حقيقيا.

$\frac{z-z_C}{z-z_B}$ حقيقيا معناه $\frac{z-z_C}{z-z_B}=0$ أي $z=z_C$ أو $\arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_B}\right)=k\pi$ و $z\neq z_B$.

$M\in(\Gamma_2)$ معناه $M=C$ أو $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{CM}\right)=k\pi$ و $M\neq B$.

إذن (Γ_2) هي المستقيم (BC) باستثناء النقطة B.

التمرين الثالث:

1) **أ) تمثيل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3.**

ب) حسب تمثيل الحدود يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة.

2) **أ) برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le u_n<8$.**

لدينا $0\le u_0<8$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

لنفرض أن $0\le u_n<8$ وعليه $0\le 6u_n<48$ يكافئ $16\le 6u_n+16<64$ يكافئ $4\le\sqrt{6u_n+16}<8$ لأن دالة الجذر التربيعي متزايدة تماما ومنه $0\le\sqrt{6u_n+16}<8$ أي $0\le u_{n+1}<8$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $0\le u_n<8$ وهذا حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع.

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=\frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$.

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{6u_n+16}-u_n=\frac{\left(\sqrt{6u_n+16}-u_n\right)\left(\sqrt{6u_n+16}+u_n\right)}{\left(\sqrt{6u_n+16}+u_n\right)}=\frac{6u_n+16-u_n^2}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}=\frac{-\left(u_n^2-6u_n-16\right)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-\left((u_n-3)^2-9-16\right)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}=\frac{-\left((u_n-3)^2-25\right)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}=\frac{-\left((u_n-3-5)(u_n-3+5)\right)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}=\frac{-\left((u_n-8)(u_n+2)\right)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}.$$

جـ) استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $0\le u_n<8$.

ومنه $8-u_n>0$ و $u_n+2>0$ و $\sqrt{6u_n+16}+u_n>0$ إذن $\frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}>0$ أي $u_{n+1}-u_n>0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة.

3) **أ) تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0<8-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(8-u_n)$.**

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n<8$ ومنه $8-u_n>0$.

$$8-u_{n+1}=8-\sqrt{6u_n+16}=\frac{\left(8-\sqrt{6u_n+16}\right)\left(8+\sqrt{6u_n+16}\right)}{\left(8+\sqrt{6u_n+16}\right)}=\frac{64-(6u_n+16)}{\left(8+\sqrt{6u_n+16}\right)}$$

$$8-u_{n+1}==\frac{48-6u_n}{\left(8+\sqrt{6u_n+16}\right)}=\frac{6(8-u_n)}{\left(8+\sqrt{6u_n+16}\right)}=\frac{6(8-u_n)}{\left(8+\sqrt{6u_n+16}\right)}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 0$ معناه $6u_n+16 \geq 16$ يكافئ $\sqrt{6u_n+16} \geq 4$ يكافئ $8+\sqrt{6u_n+16} \geq 12$

يكافئ $\frac{1}{8+\sqrt{6u_n+16}} \leq \frac{1}{12}$ وبما أن $8-u_n > 0$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن $\frac{6(8-u_n)}{8+\sqrt{6u_n+16}} \leq \frac{1}{2}(8-u_n)$

أي $8-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8-u_n)$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n : $0<8-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8-u_n)$.

ب) تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<8-u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $8-u_n>0$.

لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $8-u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

لدينا $8-u_0=8$ و $8\left(\frac{1}{2}\right)^0=8$ أي $8-u_0 \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^0$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أنّ $8-u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ من أجل عدد طبيعي n ولنبرهن صحة الخاصية $8-u_{n+1} \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

$8-u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ معناه $\frac{1}{2}(8-u_n) \leq 8\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ أي $\frac{1}{2}(8-u_n) \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$8-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8-u_n)$ فإن $8-u_{n+1} \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ومنه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد

طبيعي n: $8-u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ أي $0<8-u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

بما أن $\lim_{n\to+\infty} 8\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ يكون حسب النهايات بالمقارنة $\lim_{n\to+\infty} 8-u_n=0$ أي $\lim_{n\to+\infty} u_n=8$.

التمرين الرابع:

I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x+2)e^x-2$.

1) حساب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} xe^x+2e^x-2=-2$ لأن $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ و $\lim_{x\to-\infty} 2e^x=0$.

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+2)e^x-2=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

2) **دراسة اتجاه تغير الدالة g.**

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x)=e^x+(x+2)e^x=e^x(x+3)$.

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $e^x>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $(x+3)$.

من أجل $x\in]-\infty;-3[$ يكون $g'(x)<0$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-3]$.

و من أجل $x\in]-3;+\infty[$ يكون $g'(x)>0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[-3;+\infty[$.

وجدول تغيّراتها يكون كما يلي:

x	$-\infty$		-3		0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		
$g(x)$	-2	$\searrow$	$-e^{-3}-2$	$\nearrow$	0	$+\infty$

$g(0)=(0+2)e^{0}-2=0$

استنتاج إشارة $g(x)$.

من أجل $x\in]-\infty;0[$: $g(x)<0$ ومن أجل $x\in]0;+\infty[$: $g(x)>0$ و $g(0)=0$.

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2x+3-(x+1)e^{x}$.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=(x+1)\left(\dfrac{2x+3}{x+1}-e^{x}\right)=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x+1}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}+e^{x}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^{x}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+3-(x+1)e^{x}=-\infty$.

2) **تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=-g(x)$.**

$$f'(x)=2-\left[e^{x}+e^{x}(x+1)\right]=2-e^{x}(x+2)=-g(x)$$

ب) استنتاج إشارة $f'(x)$.

إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$.

من أجل $x\in]-\infty;0[$: $g(x)<0$ ومنه $f'(x)>0$

ومن أجل $x\in]0;+\infty[$: $g(x)>0$ ومنه $f'(x)<0$ و $f'(0)=0$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

جـ) تبيان أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x+3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=\lim_{x\to-\infty}-(x+1)e^{x}=\lim_{x\to-\infty}-xe^{x}-e^{x}=0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

لدينا $f(x)-(2x+3)=-(x+1)e^{x}=(-x-1)e^{x}$

ومنه إشارة $f(x)-(2x+3)$ هي نفس إشارة $(-x-1)$ لأنّ $e^{x}>0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)-(2x+3)$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;1)$	(C_f) تحت (Δ)	

3) **أ) تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث:** $0,92<\alpha<0,93$ **و** $-1,56<\beta<-1,55$ **.**

الدالة f، مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ وبالخصوص على المجال $[-1,56;-1,55]$ و

$f(-1,56)\approx -0,002$ و $f(-1,55)\approx 0,17$ أي $f(-1,55)\times f(-1,56)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

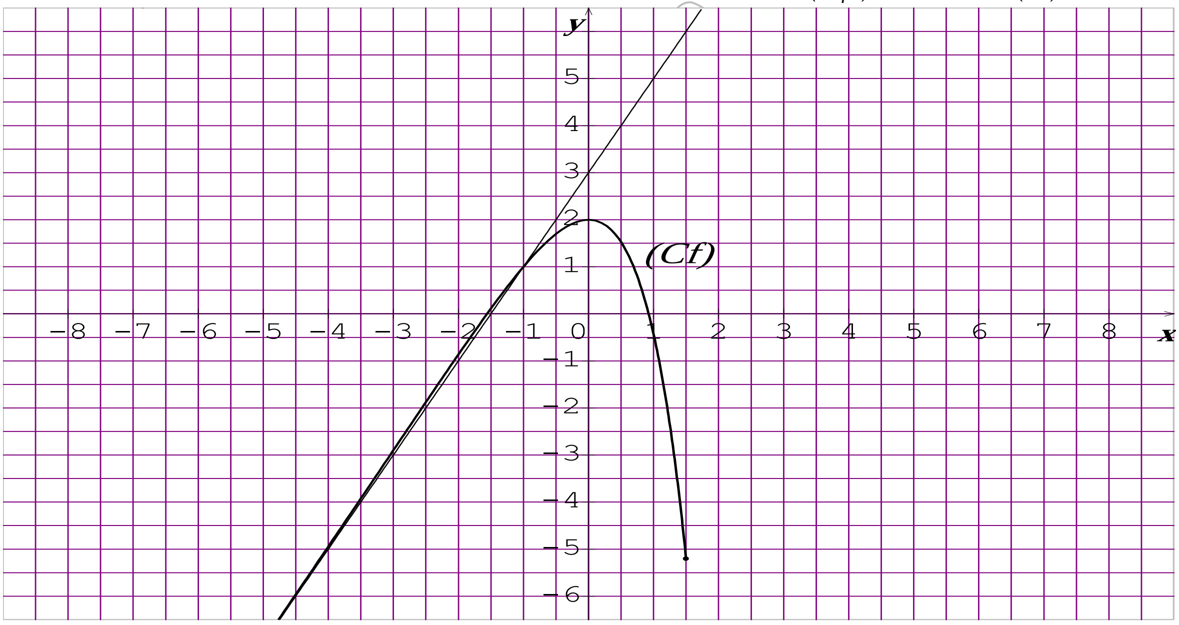
يوجد عدد حقيقي وحيد β من المجال $]-1,56;-1,55[$ بحيث $f(\beta)=0$.

وكذلك، الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[0,92;0,93]$ و

$f(0,92)\approx 0,02$ و $f(0,93)\approx -0,03$ أي $f(0,92)\times f(0,93)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد

عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0,92;0,93[$ بحيث $f(\alpha)=0$.

ب) رسم (Δ) والمنحنى (C_f).



4) **أ) تبيان أنّ الدالة $x\mapsto xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto(x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$.**

نضع $h(x)=xe^x$ ومنه $h'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

إذن الدالة h دالة أصلية للدالة $x\mapsto(x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$.

ب) حساب A مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=\alpha$.

$A=\int_0^{\alpha}(2x+3-f(x))dx=\int_0^{\alpha}(x+1)e^x dx=\left[xe^x\right]_0^{\alpha}=\alpha e^{\alpha}ua$.

جـ) ايجاد حصرا للعدد A.

لدينا $0,92<\alpha<0,93$ معناه $e^{0,92}<e^{\alpha}<e^{0,93}$ (لأن الدالة الأسية متزايدة تماما) أي $2,51<e^{\alpha}<2,53$

إذن $0,92\times 2,51<\alpha e^{\alpha}<0,93\times 2,53$ أي $2,30<A<2,36$.