الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2013

الشعبة: تقني رياضي

اختبار في مادة: الرياضيات — المـــدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

## الموضوع الأول

### التمرين الأول: ( 04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ . نعتبر النقط $A\left(3;-2;-1\right)$ ، $B\left(5;-3;2\right)$ ، $C\left(2;3;2\right)$ و $D\left(1;-5;-2\right)$ .

1) بيّن أنّ النقط $A$ و $B$ و $C$ تعين مستويا؛ نرمز له بالرمز $\left(P\right)$.

2) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}\left(2;1;-1\right)$ ناظمي للمستوي $\left(P\right)$، ثمّ جد معادلة ديكارتية للمستوي $\left(P\right)$.

3) أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(\Delta\right)$ الذي يشمل النقطة $D$ و يعامد $\left(P\right)$ .

ب) عين إحداثيات النقطة $E$ ؛ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $\left(P\right)$ .

4) $H$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستقيم $\left(AB\right)$، و $\lambda$ العدد الحقيقي حيث: $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AB}$ .

أ) بيّن أنّ : $\lambda=\dfrac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}$ .

ب) استنتج العدد الحقيقي $\lambda$ و إحداثيات النقطة $H$، ثمّ المسافة بين النقطة $D$ والمستقيم $\left(AB\right)$.

### التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $2z^2+6z+17=0$ .

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، النقط $A$ و $B$ و $C$ لاحقاتها على الترتيب: $z_A=-4$ و $z_B=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i$ و $z_C=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i$ .

– احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

3) أ) عيّن $z_D$ و $z_E$ لاحقتي النقطتين $D$ و $E$ على الترتيب حتّى يكون الرباعي $BCDE$ مربعا مركزه $A$ .

ب) عيّن $\left(\Gamma_1\right)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right\|=10\sqrt{2}$.

4) $\left(\Gamma_2\right)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي، ذات اللاحقة $z$ حيث : $\arg\left(z+4\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

– تحقّق أنّ النقطة $B$ تنتمي إلى $\left(\Gamma_2\right)$، ثمّ عيّن المجموعة $\left(\Gamma_2\right)$ .

**التمرين الثالث: ( 04 نقاط)**

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي:

$u_0 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ : $u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$.

$(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2}$ .

1) بيّن أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، ثمّ احسب حدها الأول.

2) اكتب $v_n$ بدلالة $n$ ، ثمّ استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$ .

3) احسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ ؛ حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

4) احسب بدلالة $n$ الجداء $P_n$ ؛ حيث: $p_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_n$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$

**التمرين الرابع: (07 نقاط )**

I- الدّالة $g$ معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$ .

1) ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ على المجال $]-1;+\infty[$ .

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $0,31 < \alpha < 0,32$ وأن:

$$\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$$

3) استنتج حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$.

II - الدّالة $f$ معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2$ .

$(C_f)$ منحنى $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ .

2) أثبت أنّه، من أجل كل $x$ من $]-1;+\infty[$ : $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$ .

3) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها .

4) بيّن أنّ: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2(1 + (\alpha+1)^2)$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ .

5) مثّل المنحنى $(C_f)$ على المجال $[-1;2]$ .

III- $(\Gamma)$ المنحنى الممثل للدالة $h$ المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$بالعبارة: $h(x) = \ln(x+1)$ .

$A$ النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;2)$ و $M$ نقطة من $(\Gamma)$ فاصلتها $x$ .

1) أثبت أنّ المسافة $AM$ تعطى بالعبارة $AM = \sqrt{f(x)}$ .

2) الدّالة $k$ معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة : $k(x) = \sqrt{f(x)}$ .

أ) بيّن أنّ للدالتين $k$ و $f$ نفس اتجاه التغير على المجال $]-1;+\infty[$ .

ب) عيّن إحداثيتي النقطة $B$ من $(\Gamma)$، بحيث تكون المسافة $AM$ أصغر ما يمكن .

جـ) بيّن أنّ: $AB = (\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2 + 1}$ .

## الموضوع الثاني

**التمرين الأول: (04.5 نقطة)**

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقطتين $A\left(2;-5;4\right)$ و $B\left(3;-4;6\right)$

و المستقيم $(\Delta)$ المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي: $\left(t\in\mathbb{R}\right)$ ; $\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=4+t\end{cases}$ .

1- أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(D)$ المار من النقطتين $A$ و $B$ .

ب) ادرس الوضع النسبي للمستقيمين $(\Delta)$ و $(D)$ .

2- $(P)$ المستوي الذي يشمل $(D)$ و يوازي $(\Delta)$ .

- برهن أنّ $\vec{n}(3;1;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي $(P)$، ثمّ عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$.

3- $M$ نقطة كيفية من $(\Delta)$ و $N$ نقطة كيفية من $(D)$ .

أ) عيّن إحداثيات النقطتين $M$ و $N$ بحيث يكون المستقيم $(MN)$ عموديا على كل من $(\Delta)$ و $(D)$.

ب) احسب المسافة بين نقطة كيفية من $(\Delta)$ والمستوي $(P)$.

**التمرين الثاني: ( 04.5 نقطة)**

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $\left(z+5-i\sqrt{3}\right)\left(z^2+2z+4\right)=0$ .

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ . $A$ و $B$ و $C$ النقط التي لاحقاتها على الترتيب $z_A=-1-i\sqrt{3}$ و $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=-5+i\sqrt{3}$ .

$S$ التشابه المباشر الذي يحول $A$ إلى $C$ ويحول $O$ إلى $B$ .

- جد الكتابة المركبة للتشابه المباشر $S$ ، ثمّ عيّن العناصر المميزة له .

3) أ) عيّن $z_D$ لاحقة النقطة $D$ مرجح الجملة $\left\{(A;2),(B;-1),(C;1)\right\}$ .

ب) اكتب العدد المركب $\dfrac{z_B-z_A}{z_D-z_A}$ على الشكل الأسي، ثمّ استنتج طبيعة المثلث $ABD$ .

جـ) عيّن المجموعة $(\Gamma)$ للنقط $M$ من المستوي حيث: $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$

**التمرين الثالث: (03.5 نقطة)**

$x$ و $y$ عددان صحيحان و $(E)$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $11x+7y=1$ .

1) أ) عيّن $(x_0;y_0)$؛ حل المعادلة $(E)$ الذي يحقق: $x_0+y_0=-1$ .

ب) استنتج حلول المعادلة $(E)$.

2) $a$ و $b$ عددان طبيعيان و $S$ العدد الذي يحقق: $\begin{cases}S=11a+1\\S=7b+2\end{cases}$ .

أ) بيّن أنّ $(a;-b)$ حل للمعادلة $(E)$.

ب) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد $S$ على 77؟

3) $n$ عدد طبيعي باقي قسمته على 11 هو 1 وباقي قسمته على 7 هو 2 .

عيّن أكبر قيمة للعدد $n$ حتى يكون $n < 2013$ .

**التمرين الرابع: (07.5 نقطة)**

I- الدالة $g$ معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x-1)e^x$ .

1) ادرس تغيرات $g$ .

2) بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $1+(x-1)e^x \geq 0$ .

II - الدّالة $f$ معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} \; ; \; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ .

1 - أ) بيّن أنّ $f$ مستمرة على $[0;+\infty[$.

ب) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ .

2- أ) تحقّق أنّه، من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]0;+\infty[$ : $f'(x) = \dfrac{1+(x-1)e^x}{x^2}$ .

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

III - $n$ عدد طبيعي حيث $n \geq 1$ ؛ $f_n$ الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f_n(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} + n\ln x$ .

و $(C_n)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1- ادرس اتجاه تغير الدالة $f_n$ على $]0;+\infty[$ .

2- احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ .

3- ادرس الوضع النسبي للمنحنيين $(C_n)$ و $(C_{n+1})$ .

4- بيّن أنّ جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة $B$ يطلب تعيين إحداثيتيها.

5- أ) بيّن أنّه، يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_1$ من $]0,3\,;0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1) = 0$ .

ب) بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n \geq 1$ فإنّ: $f_n(\alpha_1) < 0$ ، ثمّ برهن أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_n$ من $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$ .

6- أ) بالاعتماد على الجزء II ؛ بيّن أنّه، من أجل كل $x$ من $]0;1]$ : $\dfrac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$ .

ب) استنتج أنّه، من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n \geq 1$ : $\ln(\alpha_n) \geq \dfrac{1-e}{n}$ ، ثمّ $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$ .

جـ) جد نهاية المتتالية $(\alpha_n)$.