



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التربية الوطنية



الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات  
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

دورة: 2020

الشعبة: رياضيات

المدة: 04 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الدالة العددية  $f$  معرفة على المجال  $[1; 4]$  بـ :  $f(x) = \frac{4x+4}{9-x}$ .

1 أ . ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $[1; 4]$ .

ب . أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[1; 4]$  فإن :  $f(x) \in [1; 4]$ .

2 المتتالية العددية  $(u_n)$  معرفة بعدها الأول  $u_0$  حيث :  $u_0 = 2$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

أ . برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $1 < u_n < 4$ .

ب . ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  و استنتج أنها متقاربة.

3 المتتالية العددية  $(v_n)$  معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، كما يلي :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 4}$ .

أ . برهن أنّ المتتالية  $(v_n)$  هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول  $v_0$ .

ب . عبّر عن الحد العام  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج الحد العام  $u_n$  بدلالة  $n$  واحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

4 المجموع  $S_n$  معرف بـ :  $S_n = v_0 + 8v_1 + 8^2v_2 + \dots + 8^n v_n$  احسب  $S_n$  بدلالة  $n$ .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

صندوق به 5 كريات بيضاء و 3 كريات حمراء ( كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس).

نسحب من الصندوق كرية واحدة حيث: إذا ظهرت كرية حمراء نُعيدّها إلى الصندوق ونُضيف له كرية بيضاء

وإذا ظهرت كرية بيضاء نُعيدّها إلى الصندوق ونُضيف له كرية حمراء، ثم نُكرّر العملية مرّة ثانية.

1 انقل شجرة الاحتمالات المقابلة التي تُتمذج هذه التجربة ثم أكملها.

2 بيّن أنّ احتمال أن يوجد في الصندوق 7 كريات بيضاء هو  $\frac{1}{8}$ .

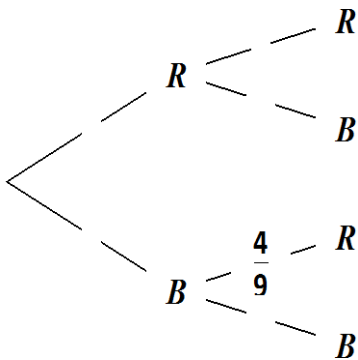
3 احسب احتمال أن يوجد في الصندوق 4 كريات حمراء على الأقل.

4 ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة عدد الكريات البيضاء الموجودة

في الصندوق بعد العملية الثانية.

أ . برّر أنّ قيم المتغير العشوائي  $X$  هي: 5، 6 و 7.

ب . عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  ، ثم احسب  $E(X)$  أمّله الرياضياتي.





التمرين الثالث: (05 نقاط)

ليكن  $n$  عددا طبيعيا أكبر تماما من 1.

نعتبر الأعداد الطبيعية  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  حيث:  $a = 4n + 1$ ،  $b = 6n + 1$ ، و  $c = 3n + 2$ .

(1) أثبت أن العددين  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما.

(2) نسمي  $\alpha$  القاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $c$ .

أثبت أن  $\alpha$  يقسم 5، ثم عين الأعداد الطبيعية  $n$  بحيث يكون:  $\alpha = 5$ .

(3) نسمي  $\beta$  القاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $bc$ .

أ. أثبت أن  $\alpha$  يقسم  $\beta$ .

ب. أثبت أن العددين  $\beta$  و  $b$  أوليان فيما بينهما ثم استنتج أن:  $\alpha = \beta$ .

(4) نعتبر العددين الطبيعيين  $A$  و  $B$  حيث:  $A = 4n^2 - 3n - 1$  و  $B = 18n^3 - 3n^2 - 13n - 2$ .

أ. بين أن كلا من العددين  $A$  و  $B$  مضاعف للعدد الطبيعي  $(n-1)$ .

ب. نضع:  $d = PGCD(A, B)$ . عبّر حسب قيم  $\alpha$  عن  $d$  بدلالة  $n$ . (لاحظ أن:  $bc = 18n^2 + 15n + 2$ )

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالتان العدديتان  $g$  و  $h$  معرفتان على المجال  $]-\infty; 0]$  كما يلي:  $g(x) = -2e^x$  و  $h(x) = x(e^x + 1)$ .

حدّد إشارة كل من  $h(x)$  و  $g(x)$  على المجال  $]-\infty; 0]$ .

(II) الدالة العددية  $f$  معرفة على المجال  $]-\infty; 0]$  بـ:  $f(x) = (x-3)e^x + \frac{1}{2}x^2$ .

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أ. بين أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]-\infty; 0]$ :  $f'(x) = h(x) + g(x)$ .

ب. استنتج اتجاه تغيّر الدالة  $f$  على المجال  $]-\infty; 0]$ .

(2) احسب  $f(0)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة  $f$ .

(3) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $]-\infty; 0]$  ثم تحقّق أن:  $-1.5 < \alpha < -1.4$ .

(4)  $(P)$  هو التمثيل البياني للدالة:  $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$  على المجال  $]-\infty; 0]$ .

أ. احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ f(x) - \frac{1}{2}x^2 \right]$  ثم فسّر النتيجة بيانيا.

ب. ادرس الوضع النسبي للمنحنين  $(P)$  و  $(C_f)$ .

ج. أنشئ  $(P)$  ثم المنحنى  $(C_f)$  على المجال  $]-\infty; 0]$ .

(5) ليكن  $m$  وسيطا حقيقيا، ناقش بيانيا وحسب قيم  $m$  عدد حلول المعادلة:  $|f(x)| = e^m$  في  $]-\infty; 0]$ .



**الموضوع الثاني**

التمرين الأول: (04 نقاط)

- 1) حل المعادلة:  $3x - 5y = 2$  ذات المجهول  $(x; y)$  حيث  $x$  و  $y$  عدنان صحيحان.
- 2) أ. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي  $n$  باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي  $9^n$  على 7.  
ب. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي  $n$  باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي  $4^n$  على 11.
- 3) عيّن الأعداد الطبيعية  $n$  بحيث يكون:  $14 \times 4^n + 11 \times 9^n - 4 \equiv 0 [77]$ .
- 4) ليكن  $n$  عددا طبيعيا غير معدوم، نضع:  $u_n = 3 \times 4^n + 4 \times 9^n$  و  $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{15n}$   
أ. عبّر عن  $S_n$  بدلالة  $n$ .  
ب. أثبت أنّ  $S_n$  مضاعف للعدد 77.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- يحتوي صندوق على كريات متماثلة منها:  $n$  كرية بيضاء تحمل العدد  $\pi$  ( $n$  عدد طبيعي و  $n \geq 2$ ) و 4 كريات حمراء تحمل الأعداد  $\frac{\pi}{2}$ ،  $\frac{\pi}{2}$ ،  $\frac{\pi}{3}$  و  $\pi$  و كريتين خضراوين تحملان العددين  $\frac{\pi}{2}$  و  $\frac{\pi}{3}$ .
- نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من هذا الصندوق.
- 1) أ. احسب احتمال كل من  $A$  و  $B$  حيث:  
 $A$ : "سحب كريتين من نفس اللون" و  $B$ : "سحب كريتين تحملان نفس العدد علما أنهما من نفس اللون"  
 ب. عيّن العدد الطبيعي  $n$  حتى يكون:  $P(A) = \frac{17}{55}$ .
  - 2) نفرض في ما يلي:  $n = 5$  و نسمي  $\alpha$  و  $\beta$  العددين الظاهرين على الكريتين المسحوبتين.  
 نعتبر  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب العدد:  $\cos(\alpha)\cos(\beta)$   
 أ. بّرر أنّ قيم المتغير العشوائي  $X$  هي:  $1$ ،  $\frac{1}{4}$ ،  $0$ ،  $-\frac{1}{2}$ .  
 ب. بيّن أنّ:  $P(X = 0) = \frac{27}{55}$ .  
 ج. عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  واحسب أمله الرياضياتي  $E(X)$ .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- المتتاليتان العدديتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  معرفتان على  $\mathbb{N}$  بـ:
- $$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 3\alpha v_n + (1-3\alpha)u_n \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3\alpha u_n + (1-3\alpha)v_n \end{cases}$$
- ( $\alpha$  عدد حقيقي)
- المتتالية العددية  $(w_n)$  معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $w_n = v_n - u_n$



- (1) أ. احسب  $w_0$  ثم احسب  $w_1$  بدلالة  $\alpha$ .  
ب. بيّن أنّ  $(w_n)$  متتالية هندسية أساسها  $(6\alpha-1)$ .  
ج. اكتب عبارة  $w_n$  بدلالة  $n$  و  $\alpha$  ، ثمّ عيّن قيم  $\alpha$  حتّى تكون:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ .

نفرض في كلّ ما يلي:  $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{3}$

- (2) أ. أثبت أنّ المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما و أنّ  $(v_n)$  متناقصة تماما.  
ب. استنتج أنّ  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متقاربتان نحو نفس النهاية  $\ell$ .  
(3) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_n + v_n = 2$  ، واستنتج قيمة  $\ell$ .  
(4) احسب بدلالة  $\alpha$  المجموع  $S$  حيث:  $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2020}$   
التمرين الرابع: (07 نقاط)

الدالة العددية  $f$  معرّفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $f(x) = \ln(\sqrt{9x^2 + 1} + 3x)$

ليكن  $(C_f)$  المنحنى البياني للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- (1) أ. احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ، ثمّ بيّن أنّ:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .  
ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا:  $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{9x^2 + 1}}$ .  
ج. استنتج اتجاه تغيّر الدالة  $f$  ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

- (2) نعتبر الدالة  $g$  المعرّفة على المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = f(x) - x$ .  
أ. بيّن أنّ  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .

ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[0; +\infty[$ :  $g'(x) = \frac{-9x^2 + 8}{(\sqrt{9x^2 + 1})(3 + \sqrt{9x^2 + 1})}$

ج. ادرس اتجاه تغيّر الدالة  $g$  على المجال  $[0; +\infty[$  ثمّ شكّل جدول تغيّراتها. ( نأخذ  $g\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \approx 0,8$  )

- (3) أ. بيّن أنّ المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}; +\infty\right[$  ثمّ تحقّق أنّ:  $2.83 < \alpha < 2.84$ .  
ب. استنتج إشارة  $g(x)$  على  $[0; +\infty[$ .

- ج. حدّد الوضع النسبي للمستقيم  $(\Delta)$  ذي المعادلة  $y = x$  و المنحنى  $(C_f)$  على المجال  $[0; +\infty[$ .  
(4) نعتبر الدالة  $k$  المعرّفة على  $[0; +\infty[$  ب:  $k(x) = \ln(6x)$  و ليكن  $(\gamma)$  منحنيا البياني في المعلم السابق.  
أ. بيّن أنّ  $(\gamma)$  هو صورة منحنى الدالة:  $x \mapsto \ln x$  بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه.  
ب. احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - k(x)]$  ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

(5) أ. بيّن الدالة  $f$  فردية.

- ب. انشئ كلا من  $(\Delta)$  ،  $(\gamma)$  و  $(C_f)$  على المجال  $[0; +\infty[$  ثمّ استنتج انشاء المنحنى  $(C_f)$  على  $\mathbb{R}$ .