بكالوريا دورة جوان 2018

المـــادة: رياضيات

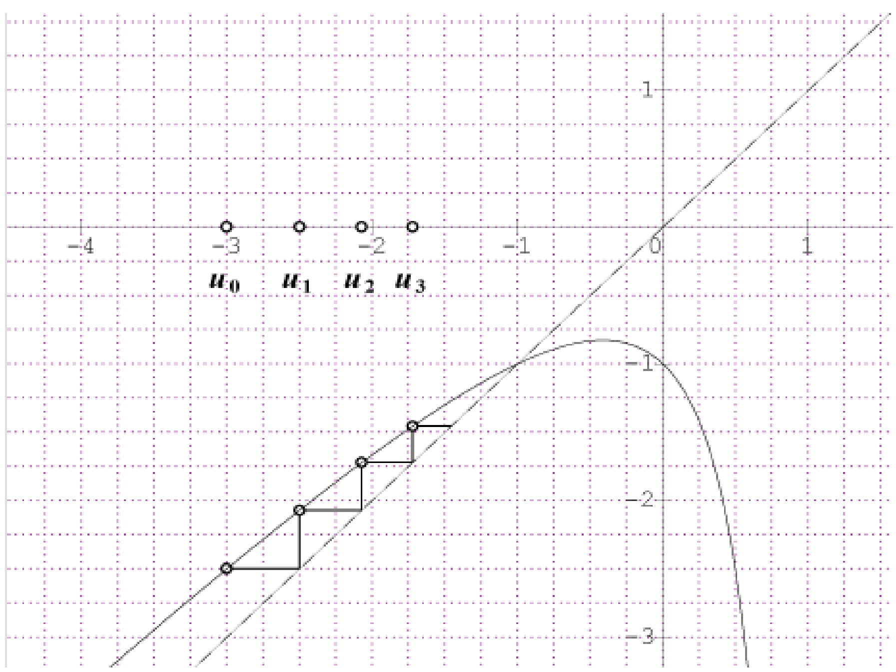
الشعبة: رياضيات

تصحيح مفصل لإختبار مادة الرياضيات

تصحيح الموضوع الأول:

تصحيح التمرين الأول:

1) إعادة رسم الشكل وتمثيل عليه الحدود الأربع الأولى:



- التخمين: من خلال الشكل يتضح لنا أنها متتالية متزايدة تماما ومتقاربة نحو **1-** أي متقاربة نحو فاصلة نقطة التقاطع مع المنصف الأول.

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي **n** فإن : $-3 \le u_n \prec -1$:

* الخاصية الإبتدائية: من أجل **n=0** نجد $-3 \le u_0 = -3 \prec -1$ إذن هذه الخاصية محققة من أجل **n=0**.

* الخاصية الوراثية: نفرض أن الخاصية محققة من أجل كل عدد طبيعي **p** أي $-3 \le u_p \prec -1$ ونبرهن على صحتها من أجل **p+1** أي لنبرهن أن $-3 \le u_{p+1} \prec -1$:

لنا الدالة **f** متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ أي تحفظ الترتيب أي مهما كان العنصران x_1 و x_2 من المجال $]-\infty;-1[$ فإن $x_1 \le x \prec x_2$ يكافيء $f(x_1) \le f(x) \prec f(x_2)$ **............(1)**

لنا $u_{p+1} = f\left(u_p\right)$ و حسب الشكل $f(-1) = -1$ و $f(-3) = -2,5$ **.......(2)**

و حسب فرضية التراجه $-3 \le u_p \prec -1$ **..(3)**

من **(1)** و **(2)** و **(3)** نجد $f(-3) \le f(u_p) \prec f(-1)$ أي $-2,5 \le u_{p+1} \prec -1$ أي $-3 \le -2,5 \le u_{p+1} \prec -1$ ومنه فإن الخاصية محققة من أجل **p+1**.

- الإستنتاج: من خلال ما سبق نستنتج أنه مهما كان العدد الطبيعي **n** فإن : $-3 \le u_n \prec -1$.

3) أ) تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي **n** فإن : $u_{n+1} + 1 \ge \frac{3}{4}\left(u_n + 1\right)$:

لنا $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{u_n - 1} = \frac{u_n^2 - 1 + 2}{u_n - 1} = u_n + 1 + \frac{2}{u_n - 1}$

و

$$u_{n+1} + 1 - \frac{3}{4}\left(u_n + 1\right) = u_n + 1 + \frac{2}{u_n - 1} + 1 - \frac{3}{4}\left(u_n + 1\right)$$
$$= \frac{\left(u_n + 3\right)\left(u_n + 1\right)}{4\left(u_n - 1\right)} = \left(\frac{u_n + 1}{u_n - 1}\right)\left(\frac{u_n + 3}{4}\right) \ge 0$$

ذلك لأن $-3 \le u_n \prec -1$ إذن $u_n + 3 \ge 0$ و $u_n + 1 \le 0$ وأيضا $u_n - 1 \le 0$

إذن $u_{n+1} + 1 - \frac{3}{4}\left(u_n + 1\right) \ge 0$ ومنه $\boxed{u_{n+1} + 1 \ge \frac{3}{4}\left(u_n + 1\right)}$.

ب) إستنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي **n** فإن : $u_n + 1 \ge -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$:

وجدنا سابقا أن : $u_{n+1} + 1 \ge \frac{3}{4}\left(u_n + 1\right)$ وهذا يعني $u_1 + 1 \ge \frac{3}{4}\left(u_0 + 1\right)$ و $u_2 + 1 \ge \frac{3}{4}\left(u_1 + 1\right)$ و $u_3 + 1 \ge \frac{3}{4}\left(u_2 + 1\right)$ و .... و $u_{n-1} + 1 \ge \frac{3}{4}\left(u_{n-2} + 1\right)$ $u_n + 1 \ge \frac{3}{4}\left(u_{n-1} + 1\right)$ وحسب الخاصية

$a \geq \frac{3}{4}b$ و $b \geq \frac{3}{4}c$ تعطي لنا $a \geq \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}c$ نجد (u_0+1) $u_n+1 \geq \underbrace{\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{3}{4}}_{n\ fois}(u_0+1)$ أي

$\boxed{u_n+1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n}$ وهو المطلوب.

لنا $u_n+1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ووجدنا سابقا أن $u_n+1 \prec 0$ أي $-2 \leq u_n+1 \prec 0$ أي $-2\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq u_n+1 \prec 0$ وحسب

مبرهنة النهاية بالمقارنة أو بالحصر نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-2\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] \leq \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+1) \prec 0$ ومنه

$0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+1) \prec 0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+1)=0$ ومنه $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1}$ وهو المطلوب.

4) نضع: $S_n = u_0+u_1+\ldots+u_n$:

* تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي **n** فإن: $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right] \leq (u_0+1)+(u_1+1)+\ldots+(u_n+1) \prec 0$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي **n**: $u_n \prec -1$ أي $u_n+1 \prec 0$ ومنه $u_0+1 \prec 0$ و $u_1+1 \prec 0$ و ....و
$u_n+1 \prec 0$ و مجموع أعدا سالبة عدد سالب إذا $(u_0+1)+(u_1+1)+\ldots+(u_n+1)<0$ **(1)..........**

ووجدنا سابقا أن $u_n+1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ أي $u_0+1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^0$ و $u_1+1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^1$ و ....و

$u_n+1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ بالجميع طرف إلى طرف نجد :

$$(u_0+1)+(u_1+1)+\ldots+(u_n+1) \geq -2\left[\left(\frac{3}{4}\right)^0+\left(\frac{3}{4}\right)^1+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$$

و $\left(\frac{3}{4}\right)^0+\left(\frac{3}{4}\right)^1+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^n$ هو مجموع **n+1** حد لمتتالية هندسة حدها الأول **1** وأساسها $\frac{3}{4}$ فنجد

$\left(\frac{3}{4}\right)^0+\left(\frac{3}{4}\right)^1+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^n = \dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)} = 4\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$ بالتعويض نجد

أي $(u_0+1)+(u_1+1)+...+(u_n+1)\geq -8\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$

(2).................. $(u_0+1)+(u_1+1)+...+(u_n+1)\geq 8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]$

من **(1)** و **(2)** نستنتج أن $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\leq (u_0+1)+(u_1+1)+...+(u_n+1)\prec 0$ وهو المطلوب.

- لدينا $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\leq (u_0+1)+(u_1+1)+...+(u_n+1)\prec 0$ ومنه

أي $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\leq u_0+u_1+u_2+...+u_n+\underbrace{1+1+...+1}_{n+1\ fois}\prec 0$

$8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\leq S_n+n+1\prec 0$ ومنه $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]-n-1\leq S_n\prec -n-1$

وبإدخال النهاية نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]-n-1\right]\leq \lim\limits_{n\to+\infty}S_n\prec \lim\limits_{n\to+\infty}(-n-1)$ فنجد

$-\infty\leq \lim\limits_{n\to+\infty}S_n\prec -\infty$ ومنه $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=-\infty}$.

تصحيح التمرين الثاني:

1) تبيين أن النقط **O** ، **A** و **B** ليست في إستقامية:

$\overrightarrow{OA}(1;1;3)$ ، $\overrightarrow{OB}(1;0;2)$ نلاحظ أن $\frac{2}{3}\neq\frac{0}{1}\neq\frac{1}{1}$ إذن الشعاعين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ غير مرتبطين خطيا ومنه فالنقط **O** ، **A** و **B** ليست في إستقامية.

ب) $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (OAB) معناه: $\vec{n}.\overrightarrow{OA}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{OB}=0$:

$\vec{n}.\overrightarrow{OA}=2\times1+1\times1+(-1)\times3=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{OB}=2\times1+1\times0+(-1)\times2=0$ إذن $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (OAB) .

معادلة المستوي (OAB) تكتب من الشكل $ax+by+cz+d=0$ حيث **a** و **b** و **c** هي إحداثيات الشعاع الناظمي.

ومنه نجد $2x+y-z+d=0$ وحيث النقطة **O** تنتمي إليه إذن نجد $2\times0+0-0+d=0$ ومنه **d=0**

اذن معادلة (OAB) هي $\boxed{2x+y-z=0}$.

2) (Δ) هي مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق: $(2x+2y+6z-11)^2+(2x+4z-5)^2=0$.

$(2x+2y+6z-11)^2+(2x+4z-5)^2=0$ معناه: $\begin{cases}2x+2y+6z-11=0\\ و \\ 2x+4z-5=0\end{cases}$

المستوي المحوري للقطعة $[OA]$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث $OM=AM$ أي

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2}$ ومنه

$x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2$ ومنه نجد $\boxed{2x+2y+6z-11=0}$

و المستوي المحوري للقطعة $[OB]$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث $OM=BM$ أي

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(z-2)^2}$ ومنه

$x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+y^2+(z-2)^2$ ومنه نجد $\boxed{2x+4z-5=0}$

وتقاطع هاذين المحورين هو حل للجملة : $\begin{cases}2x+2y+6z-11=0\\ 2x+4z-5=0\end{cases}$ والتي هي المجموعة (Δ) .

- تعيين تمثيل وسيطي للمجموعة (Δ) :

لنا $\begin{cases}2x+2y+6z-11=0\\ 2x+4z-5=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}x+y+3z-\dfrac{11}{2}=0\\ x+2z-\dfrac{5}{2}=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}-2z+\dfrac{5}{2}+y+3z-\dfrac{11}{2}=0\\ x=-2z+\dfrac{5}{2}\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}y+z-3=0\\ x=-2z+\dfrac{5}{2}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}y=-z-3\\ x=-2z+\dfrac{5}{2}\end{cases}$ ومنه

ومنه $\begin{cases} y=-z-3 \\ x=-2(-z-3)+\dfrac{5}{2}=2z+6+\dfrac{5}{2}=2z+\dfrac{17}{2} \end{cases}$ بوضع $\begin{cases} y=-z-3 \\ x=2z+\dfrac{17}{2} \end{cases}$ حيث **z=t** $t\in\mathbb{R}$

نجد $\boxed{\begin{cases} x=2t+\dfrac{17}{2} \\ y=-t-3 \\ z=t \end{cases}}$ وهو التمثيل الوسيطي للمجموعة (Δ)

3) برهان صحة التكافؤ التالي: $\left[M\in(\Delta)\right]$ يكافيء $(OM=AM=BM)$:

* لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من (Δ) ومنه فهي نقطة تنتمي إلى كل من المستويين المحورين للقطعتين $[OA]$ و $[OB]$ وحسب تعريف محور قطعة مستقيمة نجد : $\begin{cases} OM=AM \\ OM=BM \end{cases}$ إذن $(OM=AM=BM)$.

* وبطريقة عكسية نجد أيضا $(OM=AM=BM)$ معناه $(OM=AM)$ وهنا مجموعة النقط **M** هي نقاط من المستوي المحوري للقطعة $[OA]$ وكذلك $(OM=BM)$ ومجموعة النقط هي كذلك نقاط من المستوي المحوري للقطعة $[OB]$

إذن $(OM=AM=BM)$ معناه النقط **M** هي النقط المشتركة بين المستويين المحورين وهي المجموعة (Δ).

- بما أن مركز الدائرة المحيطة بالمثلث **OAB** تعريفا هي نقطة تقاطع محاوره ولدينا هنا محورين متوفرين وهما للقطعتين $[OA]$ و $[OB]$ إذن هي احد نقاط تقاطع هاذين المحورين أي هي نقطة من المجموعة (Δ) وهي أيضا تنتمي الى المستوي المحدد بهذا المثلث إذن هي أيضا نقطة من المستوي (OAB) الذي معادلته : $\boxed{2x+y-z=0}$

وعليه $\Omega\in(\Delta)$ ومنه: $\begin{cases} x_\Omega=2t+\dfrac{17}{2} \\ y_\Omega=-t-3 \\ z_\Omega=t \end{cases}$ **(1)....................**

وأيضا $\Omega\in(OAB)$ ومنه: $2x_\Omega+y_\Omega-z_\Omega=0$ **(2)..........**

بتعويض (1) في (2) نجد $2\left(2t+\frac{17}{2}\right)+(-t-3)-(t)=0$ ومنه $4t+17-t-3-t=0$ ومنه

نجد $\boxed{t=-2}$

بالتعويض في (1) نجد: $\begin{cases} x_\Omega=-4+\frac{17}{2}=\frac{9}{2} \\ y_\Omega=2-3=-1 \\ z_\Omega=-2 \end{cases}$ أي $\boxed{\Omega\left(\frac{9}{2};-1;-2\right)}$.

تصحيح التمرين الثالث:

I) حل المعادلة: $\left(z^2-2z+2\right)\left(z^2-2(\sin\theta)z+1\right)=0$.

$\left(z^2-2z+2\right)\left(z^2-2(\sin\theta)z+1\right)=0$ ومنه إما $z^2-2z+2=0$:

$\Delta=4-8=-4=4i^2=(2i)^2\rightarrow\boxed{\sqrt{\Delta}=2i}$ ومنه $z_1=\frac{2+2i}{2}=\boxed{1+i}$ و

$z_2=\frac{2-2i}{2}=\boxed{1-i}$.

أو : $z^2-2(\sin\theta)z+1=0$:

$$\Delta=4\sin^2\theta-4=4\left(\sin^2\theta-1\right)=4\left(-\cos^2\theta\right)=4i^2\cos^2\theta=(2i\cos\theta)^2$$

$$\rightarrow\boxed{\sqrt{\Delta}=2|\cos\theta|i}=\begin{cases} 2i\cos\theta:\theta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ -2i\cos\theta:\theta\in\left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\pi\right] \end{cases}$$

وفي كلتا الحالتين المعادلة $z^2-2(\sin\theta)z+1=0$ تقبل حلين مترافقين هما:

$z_3=\frac{2\sin\theta+2i\cos\theta}{2}=\boxed{\sin\theta+i\cos\theta}$ و $z_3=\frac{2\sin\theta-2i\cos\theta}{2}=\boxed{\sin\theta-i\cos\theta}$

إذن من خلال ما تقدم نجد أن للمعادلة $\left(z^2-2z+2\right)\left(z^2-2(\sin\theta)z+1\right)=0$ أربع حلول وهي :

$\boxed{\{1+i;1-i;\sin\theta+i\cos\theta;\sin\theta-i\cos\theta\}}$.

II) 1) كتابة الأعداد على الشكل الأسي:

$z_A = -\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\pi}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\left(\pi+\frac{5\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)} = \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$ ،

$z_B = 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \boxed{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$ ،

$z_C = \sin\theta + i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \boxed{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}$ ، $z_D = \overline{z_C} = \boxed{e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}}$.

2) تبيين أن النقط C ، D و E تنتمي إلى دائرة وتعيين مركزها ونصف قطرها:

لنا $z_E = \frac{z_A}{z_B} \rightarrow |z_E| = \left|\frac{z_A}{z_B}\right| = \frac{|z_A|}{|z_B|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \rightarrow \boxed{OE=1}$ وأيضا لنا

$|z_D| = |z_C| = 1 \rightarrow \boxed{OD=OC=1}$ إذن نجد : $\boxed{OE=OD=OC=1}$ وهذا يعني أن النقط **C** ، **D** و **E** تنتمي إلى الدائرة التي مركزها **O** ونصف قطرها **r=1**.

3) S هو التشابه المباشر الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$ **ونسبته** $2\sqrt{2}-2$:

B صورة C بالتشابه S معناه:

$$\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$\rightarrow e^{-i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(2-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$\rightarrow e^{-i\frac{\pi}{2}} - 1 = \left(2-\sqrt{2}\right)\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$\rightarrow -i-1 = \left(2-\sqrt{2}\right)\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} - 1 - i\right)$$

$$\rightarrow -i-1 = \left(2-\sqrt{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} - \left(2-\sqrt{2}\right)(1+i)$$

$$\rightarrow \left(2-\sqrt{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = -i-1+\left(2-\sqrt{2}\right)(1+i)$$

$$\rightarrow \left(2-\sqrt{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \left(1-\sqrt{2}\right)(1+i)$$

$$\left(2-\sqrt{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \left(\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\left(2-\sqrt{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \left(2-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$\rightarrow e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = e^{i\frac{5\pi}{4}} \rightarrow \frac{\pi}{2}-\theta = \frac{5\pi}{4}+2k\pi \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{4}-2k\pi = \boxed{-\frac{3\pi}{4}+2k'\pi}$$

4) $\boxed{e^{-in\left(\frac{5\pi}{2}\right)}} = e^{in\left(-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)} = \left[e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\right]^n = \left(z_D\right)^n$ ويكون تخيليا صرفا إذا كان

$\boxed{-5n=1+2k} / k\in\mathbb{Z} \rightarrow \frac{\pi}{2}+k\pi = -n\frac{5\pi}{2} \rightarrow \cos\left(-n\frac{5\pi}{2}\right)=0$ أي يجب أن يكون **5n-**

فردي وبما أن **5** فردي إذن يجب أن يكون **n** فرديا أي $\boxed{n=2k'+1} / k'\in\mathbb{N}$ **.**

تصحيح التمرين الرابع:

f الدالة المعرفة على $\left[0;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ بـ :

$$\begin{cases} f(x)=x+1-\frac{1}{\ln x}; x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\} \\ f(0)=1 \end{cases}$$

1) أ) تبيين أن **f** مستمرة عند **0** بقيم أكبر:

$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x+1-\frac{1}{\ln x}\right)=0+1-\frac{1}{-\infty}=1=f(0)$ إذن **f** مستمرة عند **0.**

ب) $\lim_{h\to0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{h-\frac{1}{\ln h}}{h}=\lim_{h\to0^+}1-\frac{1}{h\ln h}=1-\frac{1}{0^-}=+\infty$

والتفسير الهندسي أن المنحني يقبل على يمين **0** نصف مماس عمودي على حامل محور الفواصل**.**

2) أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\frac{1}{\ln x}\right)=+\infty+1-\frac{1}{+\infty}=+\infty$ ،

$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(x+1-\frac{1}{\ln x}\right)=1+1-\frac{1}{0^+}=-\infty$ ،

$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(x+1-\frac{1}{\ln x}\right)=1+1-\frac{1}{0^-}=+\infty$ **.**

ب) إتجاه تغير **f** وجدول تغيراتها:

$f'(x)=1+\frac{1}{x[\ln x]^2}\succ0$ إذن **f** متزايدة تماما على مجموعة تعريفها.

جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
f'(x)	+	‖	+
f(x)	1 ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3) الدالة مكتوبة بالشكل $f(x)=ax+b+g(x)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}=0$ إذن حسب الدرس فإذ المستقيم (Δ) دو المعادلة $y=x+1$ مفارب مائل بجوال $+\infty$.

4) الدالة f مستمرة على مجموعة تعريفها وبالتالي فهي مستمرة على $[0.49;0.5]$ و لنا $f(1.49)\approx -0.07$ و $f(1.5)\approx 0.03$ لحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن للمعادلة $f(x)=0$ حل على الأقل في هذا المجال وبما أن الدالة رتيبة تماما على هذا المجال فان هذا الحل وحيد وبالتالي فالمنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة w فاصلتها α في هذا المجال.

معادلة المماس عند هذه النقطة أي عند $(\alpha;0)$:

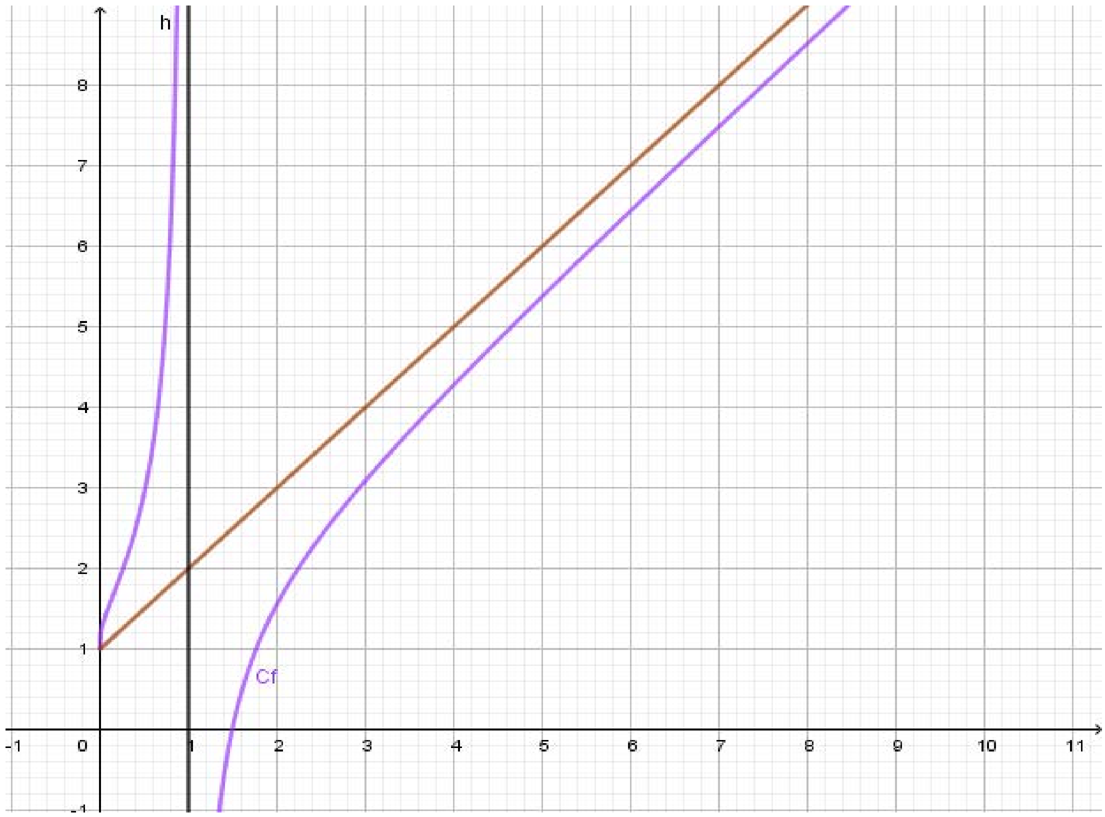
$$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)=\left(1+\frac{1}{\alpha[\ln\alpha]^2}\right)(x-\alpha)+f(\alpha)$$

وبما أن $f(\alpha)=0$ نجد بالتعويض في الدالة $\ln\alpha=\dfrac{1}{\alpha+1}$ فاصبح المعادلة

$$y=\left(1+\frac{1}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^2}\right)(x-\alpha)\to y=\left(1+\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha}\right)(x-\alpha)$$ أي

$$\boxed{y=\left(\alpha+3+\frac{1}{\alpha}\right)(x-\alpha)}\ .$$

5) رسم (Δ) و (C_f) :



6) أ) $h'(x)=-1+\ln x+1=\boxed{\ln x}$ وهي موجبة على $[1;+\infty[$ وتنعدم عند قيمة واحدة فقط وبالتالي فالدالة **h** متزايدة تماما على هذا المجال.

إذن $h(1)=0$ والدالة متزايدة وهذا يعني ان جميغ قيمها موجبة إذن إشارتها هي +.

ب)

$$f(x)-x+\frac{1}{x\ln x}=x+1-\frac{1}{\ln x}-x+\frac{1}{x\ln x}=1-\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{x\ln x}=\frac{x\ln x-x+1}{x\ln x}=\boxed{\frac{h(x)}{x\ln x}}$$

وهو مقدار موجب تماما على المجال $]1;+\infty[$ إذن $f(x)-x+\dfrac{1}{x\ln x}\succ 0$

ومنه $\boxed{f(x)\succ x-\dfrac{1}{x\ln x}}$ ....**(1)**

ومن الرسم نستنتج أن المنحني يقع تحت المقارب في المجال $]1;+\infty[$ ومنه $\boxed{f(x)\prec x+1}$ ....**(2)**

من **(1)** و **(2)** نجد $\boxed{x-\dfrac{1}{x\ln x}\prec f(x)\prec x+1}$.

7) تبيين أن $\frac{1}{2}(e^2-\alpha^2)-\ln(\alpha+1)\prec A\prec\frac{1}{2}(e-\alpha)(e+\alpha+2)$:

وجدنا سابقا $x-\frac{1}{x\ln x}\prec f(x)\prec x+1$ والدالة موجبة تماما على المجال $[\alpha;e]$ إذن حسب خواص التكامل

نجد $\int_\alpha^e\left(x-\frac{1}{x\ln x}\right)dx\prec\int_\alpha^e f(x)dx\prec\int_\alpha^e(x+1)dx$ ومنه

$$\int_\alpha^e\left(x-\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right)dx\prec\int_\alpha^e f(x)dx\prec\left[\frac{x^2}{2}+x+k\right]_\alpha^e$$ ومنه

$\left[\frac{x^2}{2}-\ln(\ln x)+k'\right]_\alpha^e\prec\int_\alpha^e f(x)dx\prec\left[\frac{x^2}{2}+x+k\right]_\alpha^e$. (توضيح: حيث $\ln x\succ 0$ على $[\alpha;e]$و $\int\frac{u'(x)}{u(x)}dx=\ln(u(x))+k$ $\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\frac{\ln' x}{\ln x}\rightarrow\frac{u'(x)}{u(x)}\rightarrow$ ومنه الدالة الأصلية للدالة $x\rightarrow\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$ هي الدالة $x\rightarrow\ln(\ln x)$).

ومنه نجد

$$\left(\frac{e^2}{2}-\ln(\ln e)+k'\right)-\left(\frac{\alpha^2}{2}-\ln(\ln\alpha)+k'\right)\prec\int_\alpha^e f(x)dx\prec\left(\frac{e^2}{2}+e+k\right)-\left(\frac{\alpha^2}{2}+\alpha+k\right)$$

وجدنا سابقا $\ln\alpha=\frac{1}{\alpha+1}$ ومنه نجد

$$\frac{e^2-\alpha^2}{2}+\ln\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)\prec\int_\alpha^e f(x)dx\prec\frac{(e-\alpha)(e+\alpha)}{2}+(e-\alpha)$$ ومنه

$$\frac{e^2-\alpha^2}{2}-\ln(\alpha+1)\prec\int_\alpha^e f(x)dx\prec(e-\alpha)\left[\frac{(e+\alpha)}{2}+1\right]$$ وأخيرا نجد

$$\boxed{\frac{e^2-\alpha^2}{2}-\ln(\alpha+1)\prec\int_\alpha^e f(x)dx\prec\frac{1}{2}(e-\alpha)(e+\alpha+2)}$$

تصحيح الموضوع الثاني:

تصحيح التمرين الأول:

1) تعيين العددين α و β :

لنا $\begin{cases}\alpha+\beta=4035\\ \alpha-\beta=1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}2\alpha=4036\\ \beta=\alpha-1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\alpha=2018\\ \beta=2017\end{cases}$.

- تبيين أن $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما:

لنا $\frac{\alpha}{2}=\frac{2018}{2}=1009$ ولدينا $\alpha-\beta=1$ ومنه $2\frac{\alpha}{2}-\beta=1$ ومنه $2(1009)+(-1)(2017)=1$ ومنه حسب مبرهنة بيزو نستنتج أن **1009** و **2017** أوليان فيما بينهما أي $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما .

2) تعيين كل الثنائيات الصحيحة (x,y) التي تحقق المعادلة : $1009x-2017y=1$ **(1)**.......

وجدنا سابقا $2(1009)+(-1)(2017)=1$ أي $(1009)(2)-(2017)(1)=1$ **(2)**.....

بالطرح نجد $1009(x-2)=2017(y-1)$

1009 يقسم $1009(x-2)$ فهو يقسم $2017(y-1)$ وبما أن 1009 أولي مع 2017 إذن حسب مبرهنة غوص نجد **1009** يقسم $y-1$ إذن يوجد عدد صحيح **k** حيث $y-1=1009k$ ومنه $\boxed{y=1009k+1}$.

بالتعويض في المعادلة **(1)** نجد $1009x-2017(1009k+1)=1$ ومنه $1009x=2035153k+2017+1$ أي $\boxed{x=2017k+2}$

إذن الثنائيات الصحيحة (x,y) التي تحقق المعادلة : $1009x-2017y=1$ هي $(x,y)=(2017k+2,1009k+1)$ حيث **k** عدد صحيح.

3) تعيين الأعداد الصحيحة **a** التي تحقق : $\begin{cases}a\equiv 2019[2017]\\ a\equiv 2019[1009]\end{cases}$.

ومنه $\begin{cases} a \equiv 2019[2017] \\ a \equiv 2019[1009] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a = 2017p + 2019 \\ a = 1009q + 2019 \end{cases}$ ومنه $2017p + 2019 = 1009q + 2019$

ومنه $2017p = 1009q$ نجد **2017 يقسم 1009q ولكن 2017 أولي مع 1009 وعليه 2017 يقسم q**

وهذا حسب مبرهنة غوص ومنه يوجد عدد صحيح k' حيث q=2017k' .

بالتعويض نجد $a = 1009(2017k') + 2019$ **ومنه** $\boxed{a = 2035153k' + 2019}$.

4) أ) دراسة تبعا لقيم n بواقي قسمة 7^n **على 9:**

$7^0 \equiv 1[9] \quad ; \quad 7^1 \equiv 7[9]$
$7^2 \equiv 4[9] \quad ; \quad 7^3 \equiv 1[9]$ ومنه فإن البواقي تلخص في الجدول التالي:

قيم n	3k	3k+1	3k+2
الباقي	1	7	4

ب) تعيين باقي قسمة العدد 42L على 9:

$$L = \underbrace{111...1}_{2018\ fois} = 1 \times 7^{2017} + 1 \times 7^{2016} + 1 \times 7^{2015} + ... + 1 \times 7^0$$

لنا
$$= 7^0 + 7^1 + 7^2 + ... + 7^{2017} = 7^0 \frac{7^{2018} - 1}{7 - 1} = \boxed{\frac{7^{2018} - 1}{6}}$$

ومنه $42L = 42\frac{7^{2018} - 1}{6} = 7\left(7^{2018} - 1\right) = \boxed{7^{2019} - 7}$

لنا 2019=3*673 ومنه حسب الجدول السابق نجد $7^{2019} \equiv 1[9]$

ولنا $7 \equiv 7[9]$ **بالطرح نجد** $7^{2019} - 7 \equiv 1 - 7[9]$ **ومنه** $7^{2019} - 7 \equiv -6[9]$ **ومنه حسب خواص الموافقة**

نجد $\boxed{7^{2019} - 7 \equiv 3[9]}$ **إذن باقي قسمة 42L على 9 هو 3.**

تصحيح التمرين الثاني:

1) حساب إحتمال الحوادث التالية:

عندما نسحب 4 كريات في آن واحد نجد العدد الكلي للإمكانيات هو $C_9^4 = \frac{9!}{4! \times 5!} = \boxed{126}$.

A: "الحصول على أربع كريات من نفس اللون" يعني يجب أن تكون كلها حمراء ومنه $P(A)=\frac{C_5^4}{126}=\boxed{\frac{5}{126}}$.

B: " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر" معناه إما واحدة بيضاء وثلاث من اللونين الآخرين أو الأربع كريات كلها مختلطة بين الأحمر والأخضر ومنه $\boxed{1}=\frac{56+70}{126}=\frac{C_1^1\times C_8^3+C_8^4}{126}=P(B)$.

C: " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم" أي يجب أن نتحصل على $-3;-1;2;2$ ومنه $P(C)=\frac{C_4^2\times C_1^1\times C_1^1}{126}=\frac{6}{126}=\boxed{\frac{1}{21}}$.

2)أ) X هو عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس : لدينا تسعة كريات من بينها 3 كريات خضراء ومنه عندما نسحب أربع كريات فإما يتبقى 3 خضراء أو 2 خضراء أو 1 خضراء أو 0 خضراء أي $X=\{0;1;2;3\}$.

إذن $P(X=0)=\frac{C_3^3\times C_6^1}{126}=\frac{6}{126}=\boxed{\frac{1}{21}}$ ، $P(X=1)=\frac{C_3^2\times C_6^2}{126}=\frac{45}{126}=\boxed{\frac{5}{14}}$

$P(X=2)=\frac{C_3^1\times C_6^3}{126}=\frac{60}{126}=\boxed{\frac{10}{21}}$ ، $P(X=3)=\frac{C_6^4}{126}=\frac{15}{126}=\boxed{\frac{5}{42}}$

وقانون إحتماله معرف في الجدول التالي:

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	1/21	5/14	10/21	5/42

ب) حساب الأمل الرياضياتي **E(X)**:

$$E(X)=0\times\frac{1}{21}+1\times\frac{5}{14}+2\times\frac{10}{21}+3\times\frac{5}{42}$$
$$=\frac{5}{14}+\frac{20}{21}+\frac{5}{14}=\frac{10}{14}+\frac{20}{21}=\frac{5}{7}+\frac{20}{21}=\boxed{\frac{35}{21}}$$

ج) حساب إحتمال الحادثة **$X^2-X>0$**:

$X^2-X\succ 0$ معناه $X(X-1)\succ 0$ أي يجب أن يكون $X=\{2;3\}$ ومنه

$$P(X^2-X\succ 0)=P(X=2)+P(X=3)$$
$$=\frac{10}{21}+\frac{5}{42}=\boxed{\frac{25}{42}}$$

تصحيح التمرين الثالث:

$$z^2+(m+1)z+(2m-1)=0......(E)$$

1) تعيين قيم العدد الحقيقي **m** حتى تقبل المعادلة (E) حلين غير حقيقيين:

تقبل المعادلة (E) حلين غير حقيقيين إذا وفقط إذا كان مميزها سالب تماما:

$$\Delta=(m+1)^2-4(2m-1)=m^2+2m+1-8m+4=\boxed{m^2-6m+5}$$

ويكون دلتا سالب تماما أي عكس إشارة معامل $\mathbf{m^2}$ إذا كان مميزه موجب وقيم m تقع داخل مجال الجذرين :

$$\Delta_1=(-6)^2-4\times5=36-20=16\succ0$$

وعليه عبارة المميز التي هي كثير حدود من الدرجة الثانية مميزه موجب تماما فهو يقبل جذرين هما :

$m_2=\dfrac{6-4}{2}=1$ و $m_1=\dfrac{6+4}{2}=5$

إذن يكون المميز سالبا تماما إذا كان $\boxed{m\in]1;5[}$.

2) حل المعادلة (E) بوضع **m=3:** نجد $\Delta=3^2-6\times3+5=9-18+5=-4\rightarrow\sqrt{\Delta}=2i$ ومنه

$z_2=\dfrac{-4-2i}{2}=\boxed{-2-i}$ ، $z_1=\dfrac{-4+2i}{2}=\boxed{-2+i}$.

3) $z_A=-2+i$ ، $z_B=-2-i$ ، $z_C=\alpha$ ، $z_E=\sqrt{3}$ حيث α عدد حقيقي و $\alpha\succ-2$.

$AC=|z_C-z_A|=|\alpha+2-i|=\sqrt{(\alpha+2)^2+1}$ ، $AB=|z_B-z_A|=|-2-i+2-i|=|-2i|=2$ ،

$BC=|z_C-z_B|=|\alpha+2+i|=\sqrt{(\alpha+2)^2+1}$.

ABC مثلث متقايس الأضلاع معناه $\sqrt{(\alpha+2)^2+1}=2$ ومنه $(\alpha+2)^2+1=4$ ومنه

$(\alpha+2)^2-3=0$ أي $(\alpha+2+\sqrt{3})(\alpha+2-\sqrt{3})=0$ ومنه إما $\alpha=-2+\sqrt{3}$ أو

$\alpha=-2-\sqrt{3}$ ولكن $\alpha=-2-\sqrt{3}\prec-2$ وهذا مرفوض حسب الشرط ولكن $\alpha=-2+\sqrt{3}\succ-2$

وهو مقبول إذن يكون المثلث **ABC** متقايس الأضلاع إذا كان $\boxed{\alpha=-2+\sqrt{3}}$.

4) نضع $z_C=-2+\sqrt{3}$: $\dfrac{z_C-z_E}{z_A-z_B}=\dfrac{-2+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{-2+i+2+i}=\dfrac{-2}{2i}=\dfrac{-1}{i}=i=\boxed{e^{i\frac{\pi}{2}}}$

أ) $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{EC}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$ أي المستقيمان (BA) و (EC) متعامدان.

ب) لنا المثلث **ABC** متقايس الأضلاع أي **AB=AC=BC** هذا من جهة ومن جهة أخرى وجدنا $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B} = i$

أي $\left|\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B}\right| = |i| = 1$ أي **AB=CE** إذن نستنتج أن **AC=BC=EC** أي ان النقط **A** ، **B** و **E** تنتمي إلى الدائرة التي مركزها النقطة **C** ونصف قطرها **r=CE=AB=2** .

5) حساب **a**: العبارة المركبة لهذا الدوران هي $z' = az + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$

يحول **B** إلى **C** معناه : $z_C = az_B + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$ ومنه

$-2+\sqrt{3} = a(-2-i) + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$ ومنه

$-4+2\sqrt{3} = -4a - 2ai + \sqrt{3} - 6 + 2\sqrt{3}i - i$ ومنه $a(4+2i) = -\sqrt{3} - 2 + i\left(2\sqrt{3}-1\right)$

ومنه

$$a = \frac{-\sqrt{3}-2+i\left(2\sqrt{3}-1\right)}{4+2i} = \frac{\left[-\sqrt{3}-2+i\left(2\sqrt{3}-1\right)\right](4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}$$

$$= \frac{-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}i-8+4i+8\sqrt{3}i-4i+4\sqrt{3}-2}{16+4} = \frac{-10+10\sqrt{3}i}{20} = \boxed{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

زاوية هذا الدوران هي عمدة للعدد **a** ومنه

$$\theta = \arg a \rightarrow \begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \boxed{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi} \,/\, k \in \mathbb{Z}$$

ب) لتكن النقطة **G** هي مركز هذا الدوران: تعريفا هذه النقطة هي النقطة الصامدة بواسطة هذا الدوران أي

$$z_G = \frac{b}{1-a} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)}{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{\sqrt{3}-6+i\left(2\sqrt{3}-1\right)}{3-\sqrt{3}i} = \frac{\left[\sqrt{3}-6+i\left(2\sqrt{3}-1\right)\right]\left(3+\sqrt{3}i\right)}{\left(3-\sqrt{3}i\right)\left(3+\sqrt{3}i\right)}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-18+6\sqrt{3}i-3i+3i-6\sqrt{3}i-6+\sqrt{3}}{12} = \frac{4\sqrt{3}-24}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{3}-6}{3}}$$

نحن نعلم أن لاحقة مركز ثقل مثلث متقايس الأضلاع **ABC** هي $z_G = \frac{z_A+z_B+z_C}{3} = \frac{-2+i-2-i-2+\sqrt{3}}{3} = \boxed{\frac{\sqrt{3}-6}{3}}$.

إذن نستنتج أن مركز هذا الدوران هو فعلا مركز ثقل المثلث **ABC** .

تصحيح التمرين الرابع:

I(1) تبيين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإن: $g'(x)=\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.

لنا $g(x)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1$ ومنه

$$g'(x)=\left[(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1\right]'=(1+x+x^2)'e^{-\frac{1}{x}}+\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'(1+x+x^2)$$

$$=(1+2x)e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}(1+x+x^2)=\frac{x^2(1+2x)e^{-\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}(1+x+x^2)}{x^2}$$

$$=\frac{x^2+2x^3+1+x+x^2}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{2x^3+2x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{2x^2(x+1)+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

$$=\boxed{\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}$$

- إستنتاج إتجاه تغير g: وجدنا $g'(x)=\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\left[\frac{(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\right](x+1)$

بما أنه مهما كان x من $]0;+\infty[$ فإن $\frac{(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\succ 0$ وأيضا x+1 موجب تماما على هذا المجال إذن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن $g'(x)\succ 0$ أي الدالة g متزايدة تماما على مجموعة تعريفها.

2) $g(1)=3e^{-1}-1=\frac{3}{e}-1\succ 0$ و

$$g(0,9)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1=2,71\times 0,32-1\approx -0,13\prec 0$$

إذن بما أن الدالة g مستمرة على المجال $]0,9;1[$ و $g(0,9)\times g(1)\prec 0$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن للمعادلة g(x)=0 حل على الأقل في المجال $]0,9;1[$ وبما أن الدالة g متزايدة تماما على هذا المجال فإن هذا الحل وحيد وهو α .

إستنتاج إشارة g(x): نستنتج إن g(x) سالب تماما في المجال $]0;\alpha[$ وموجب تماما غي المجال $]\alpha;+\infty[$.

II) $f(x)=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right]=+\infty+1\times e^{-\infty}=\boxed{+\infty}$$ (1

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right]=0+(+\infty)\times e^{0}=\boxed{+\infty}$$

ب) تبيين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

لنا $f(x)=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$ ومنه

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right)'=-\frac{1}{x^2}+e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{-1+x^2e^{-\frac{1}{x}}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}=\frac{(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1}{x^2}=\boxed{\frac{g(x)}{x^2}}$$

ومنه نستنتج أن إشارة f'(x) من إشارة g(x) أي في المجال $]0;\alpha[$ تكون المشتقة سالبة تماما أي الدالة f متناقصة تماما وفي المجال $]\alpha;+\infty[$ تكون الدالة f متزايدة تماما.

جدول التغيرات:

x	**0**		α	**1**		$+\infty$
f'(x)	‖	-	**0**		+	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	**f(α)**	↗		$+\infty$

2) تبيين أن: $\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)=-1$.

بوضع $t=-\frac{1}{x}$ ومنه $x=-\frac{1}{t}$ ولما $x\to+\infty$ فإن $t\to 0$ فنجد:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{t}e^{t}+\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{-(e^t-1)}{t}\right)=-\lim_{t\to 0}\left(\frac{e^t-1}{t}\right)=-1$$

Y=x مقارب للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$ معناه: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+e^{-\frac{1}{x}}+\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)\right]=0+1-1=0$$

أي أن المستقيم ذو المعادلة **y=x** مقارب مائل للمنحني $\left(C_f\right)$ بجوال $+\infty$.

3) $h(x)=\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$.

أ) $\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}\right)=0-1+1=0$.

- دراسة إتجاه تغير الدالة **h:**

$$h'(x)=\left(\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}\right)'=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^2}\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right)$$

إذن إشارة **h'(x)** من نفس إشارة $e^{-\frac{1}{x}}-1$

h'(x)<0 معناه $e^{-\frac{1}{x}}-1\prec 0$ أي $e^{-\frac{1}{x}}\prec 1\to e^{-\frac{1}{x}}\prec e^{0}\to-\frac{1}{x}\prec 0$ إذن الدالة **h** متناقصة تماما

$$\to x\succ 0\to \boxed{x\in\left]0;+\infty\right[}$$

على المجال المعطى أي على مجموعة تعريفها.

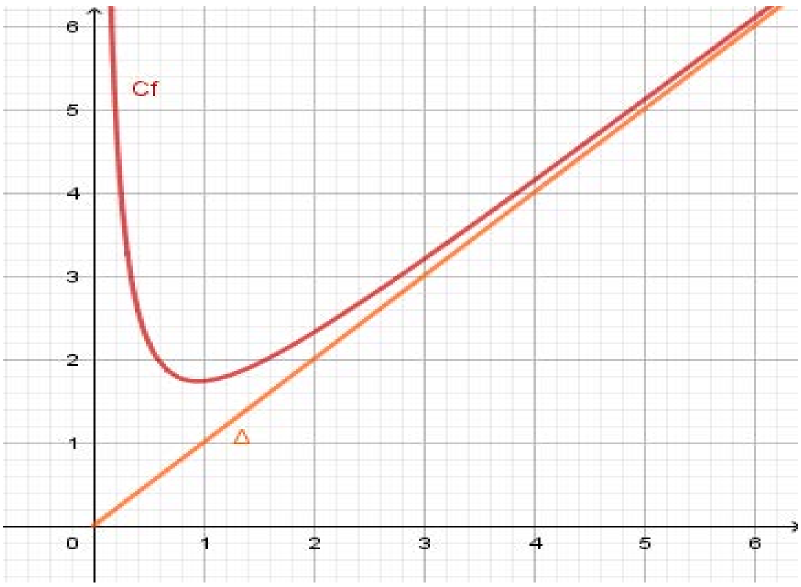
الدالة **f** متناقصة تماما على مجموعة تعريفها ولنا $\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$ وعليه نستنتج أن المنحني الممثل لها يقع فوق محور الفواصل بشكل تام ومنه مهما كان **x** من $\left]0;+\infty\right[$ فإن **h(x)>0** .

ب)

$$f(x)-x=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}-x=\frac{1}{x}-x+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{1-x^2}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}=\frac{(1-x)(1+x)}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$$
$$=(1+x)\left[\frac{1-x}{x}+e^{-\frac{1}{x}}\right]=(1+x)\left[\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}\right]=\boxed{(1+x)h(x)}$$

نستنتج أن $f(x)-x\succ 0$ إذن المنحني $\left(C_f\right)$ يقع فوق المستقيم (Δ) .

4) رسم (Δ) و (C_f) :



5) أ) كتابة u_n بدلالة n:

$$u_n = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1}$$
$$= \frac{n}{n+1}\left[\frac{1}{\frac{1}{n}} + \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{\frac{1}{n}}}\right] - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n}{n+1}\left[n + \left(\frac{n+1}{n}\right)e^{-n}\right] - \frac{n^2}{n+1}$$
$$= \frac{n^2}{n+1} + e^{-n} - \frac{n^2}{n+1}$$
$$= \boxed{e^{-n}}$$

- تبيين أن (u_n) متتالية هندسية وتعيين أساسها q و حدها الأول u_1 :

لنا $u_n = e^{-n}$ ومنه $u_{n+1} = e^{-n-1} = e^{-n} \times e^{-1} = \frac{1}{e} e^{-n} = \boxed{\frac{1}{e} u_n}$ إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{1}{e}}$ و حدها الأول $u_1 = e^{-1} = \boxed{\frac{1}{e}}$.

- حساب بدلالة n المجموع S_n :

لنا $u_n = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1}$ ومنه $\boxed{\frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) = u_n + \frac{n^2}{n+1}}$

$$S_n = \left(\frac{1}{2} f(1) - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(u_1 + \frac{1^2}{1+1} - \frac{1}{1+1}\right) + \left(u_2 + \frac{2^2}{2+1} - \frac{1}{2+1}\right) + \left(u_3 + \frac{3^2}{3+1} - \frac{1}{3+1}\right) + \ldots + \left(u_n + \frac{n^2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(u_1 + \frac{1^2-1}{1+1}\right) + \left(u_2 + \frac{2^2-1}{2+1}\right) + \left(u_3 + \frac{3^2-1}{3+1}\right) + \ldots + \left(u_n + \frac{n^2-1}{n+1}\right)$$

$$= \left(u_1 + \frac{(1-1)(1+1)}{1+1}\right) + \left(u_2 + \frac{(2-1)(2+1)}{2+1}\right) + \left(u_3 + \frac{(3-1)(3+1)}{3+1}\right) + \ldots + \left(u_n + \frac{(n-1)(n+1)}{n+1}\right)$$

$$= \left(u_1 + (1-1)\right) + \left(u_2 + (2-1)\right) + \left(u_3 + (3-1)\right) + \ldots + \left(u_n + (n-1)\right)$$

$$= (u_1 + 0) + (u_2 + 1) + (u_3 + 2) + \ldots + \left(u_n + (n-1)\right)$$

$$= (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) + \left(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{e} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^n}{1 - \frac{1}{e}}\right) + \frac{n-1}{2}(1 + n - 1) = \left(\frac{1}{e} \times \frac{1 - \frac{1}{e^n}}{\frac{e-1}{e}}\right) + \frac{n(n-1)}{2} = \left(\frac{1}{e} \times \frac{\frac{e^n - 1}{e^n}}{\frac{e-1}{e}}\right) + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{e} \times \frac{e^n - 1}{e^n} \times \frac{e}{e-1}\right) + \frac{n(n-1)}{2} = \left(\frac{e^n - 1}{(e-1)e^n}\right) + \frac{n(n-1)}{2} = \boxed{\frac{1 - e^{-n}}{e-1} + \frac{n(n-1)}{2}}$$