الحل المفصل لاختبار الرياضيات شعبة الرياضيات بكالوريا 2017

الموضوع الأول

التمرين الاول :

1) تبين أن المستقيمان (Δ) , (Δ') يتقاطعان في نقطة .لدينا $(\Delta): \begin{cases} x = t-2 \\ y = -t+2 \\ z = 2t-4 \end{cases}$ و من المعطيات نجد التمثيل الوسيطي للمستقيم $(\Delta'): \begin{cases} x = -t'+1 \\ y = 2t'-3 \\ z = t'-4 \end{cases}$.

التقاطع : نحل الجملة $\begin{cases} t-2 = -t'+1 \\ -t+2 = 2t'-3 \\ 2t-4 = t'-4 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} t-2 = -2t+1 \\ -t+2 = 4t-3 \\ 2t = t' \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 3t = 3 \\ -5t = -5 \\ 2t = t' \end{cases}$ إذن $\begin{cases} t = 1 \\ t' = 2 \end{cases}$ بالتعويض في إحدى التمثيلين الوسيطين نجد أن المستقيمان يتقاطعان في نقطة وحيدة هي $A(-1;1;-2)$.

2) شعاع توجيه (Δ) هو $\overrightarrow{v}(1;-1;2)$ وشعاع توجيه المستقيم (Δ') هو $\overrightarrow{u}(-1;2;1)$ و منه المستوي (P) المعين بالمستقيمين يشمل النقطة $C(-1;1;-2)$ تمثيله الوسيطي هو . $\begin{cases} x = -t'+t-1 \\ y = 2t'-t+1 \\ z = t'+2t-2 \end{cases}$: $t \in IR$, $t' \in IR$

استنتاج معادلة ديكارتية لهذا المستوي : $\begin{cases} x = -t'+t-1 ....(1) \\ y = 2t'-t+1 ....(2) \\ z = t'+2t-2 ....(3) \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x+y = t' .....(1)+(2) \\ y = 2t'-t+1 ......(2) \\ z = t'+2t-2 ......(3) \end{cases}$ و منه

$\begin{cases} t' = x+y \\ y = 2(x+y)-t+1 \\ z = t'+2t-2 ......(3) \end{cases}$ و منه $\begin{cases} t' = x+y \\ t = 2x+y+1 \\ z = x+y+4x+2y+2-2 \end{cases}$

و منه المعادلة الديكارتية لـ (P) هي $5x+3y-z=0$.

3) تبين أن (S) سطح كرة لتكن N منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ لدينا $AM^2+BM^2 = 20$ يكافئ $(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NM})^2+(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NM})^2 = 20$ و منه نجد $AN^2+NM^2+2\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{NM}+BN^2+NM^2+2\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{NM} = 20$

بما أن $AN=BN$ و $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{0}$ تصبح المعادلة $2AN^2+2NM^2 = 20$ و منه $NM^2 = 10-AN^2$

$N\left(\frac{1+(-1)}{2};\frac{-3+1}{2};\frac{-4+(-2)}{2}\right)$ و منه $N(0;-1;-3)$ إذن $AN = \sqrt{(-1)^2+(1+1)^2+(-2+3)^2} = \sqrt{6}$

$NM^2 = 10-AN^2$ يعني $NM^2 = 10-6$ و منه $NM^2 = 4$ إذن $NM = 2$ مجموعة النقط (S) هي سطح كرة مركزه N و نصف قطره 2 .

4) تحديد الوضع النسبي للمستوي (P) و سطح الكرة (S) نحسب البعد بين N منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ و المستوي $d(N;P) = \frac{|5(0)+3(-1)-(-3)|}{\sqrt{25+9+1}} = 0$ و منه المستوي و سطح الكرة يتقاطعان وفق دائرة مركزها N و

التمرين الثاني :

1) نعتبر (E).....$104x-20y=272$

أ- حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104 لدينا $PGCD(20;104)=4PGCD(5;26)=4$

بما أن 4 قاسم للعدد 272 فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في مجموعة الاعداد الصحيحة .

ب- إثبات انه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $x\equiv 3[5]$

لدينا (E) تكافئ $104x=20y+272$ و منه $104x\equiv 272[5]$ أي ان $4x\equiv 2[5]$ و $4\equiv -1[5]$ منه $-x\equiv 2[5]$ أي ان $-x\equiv -2[5]$ و $-2\equiv 3[5]$ منه $x\equiv 3[5]$ و هو المطلوب .

$x\equiv 3[5]$ يعني ان $x=3+5k\ :\ k\in\mathbb{Z}$ بالتعويض في (E) نجد $104(5k+3)=20y+272$ و منه $520k+40=20y$ أي ان $y=26k+2:k\in\mathbb{Z}$ مجموعة الحلول هي $S=\{(5k+3;26k+2):k\in\mathbb{Z}\}$.

2) تعيين العددان α و β لدينا $\lambda=\overline{1\alpha\alpha\beta01}^{4}$ و $\lambda=\overline{1\alpha\beta01}^{6}$ يعني ان $\begin{cases}\lambda=1+\beta\times 4^2+\alpha\times 4^3+\alpha\times 4^4+4^5\\ \lambda=1+\beta\times 6^2+\alpha\times 6^3+6^4\end{cases}$ و

منه $16\beta+320\alpha+1025=36\beta+216\alpha+1297$ أي ان $104\alpha-20\beta=272$ و منه من حلول المعادلة (E)

نستنتج ان $\begin{cases}\alpha=3+5k\\ \beta=26k+2\end{cases}$ علما ان العددان α و β أقل تماما من 4 و منه $\begin{cases}\alpha=3\\ \beta=2\end{cases}$.

حساب : $\lambda=1+2\times 6^2+3\times 6^3+6^4=2017$.

3) التحقق من أن العددان 2017 و 1009 أوليان

العدد 2017 يقبل القسمة على	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	47
الاجابة	لا	لا	لا	لا	لا		لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا

و منه 2017 عدد أولي لان $47\leq\sqrt{2017}$.

العدد 1009 يقبل القسمة على	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
الاجابة	لا	لا	لا	لا	لا		لا	لا	لا	لا	لا	لا

و منه 1009 عدد أولي لان $37\leq\sqrt{1009}$.

تعيين $a\ ;\ b\ :\ d$ قاسم للعددين $d\ ;\ m$ و منه فهو قاسم للعدد $2m-d$ أي قاسم للعدد 2017 و منه فإن القيم الممكنة لـ d هي 1 او 2017

- لما $d=1$ فإن $2m-1=2017$ و منه

$m=\frac{2018}{2}=1009$ بما ان 1009 عدد أولي و $md=ab$ و منه $ab=1009$ إذن الثنائيات $(a;b)$ هي $(1;1009)$ و $(1009;1)$

لما $d=2017$ فإن $2m-2017=2017$ و منه $m=2017$ و منه $ab=2017^2$ إذن الثنائية $(a;b)$ هي $(2017;2017)$

التمرين الثالث :

1) حل المعادلة $(z-2+2i)(z^2-2\sqrt{2}z+8)=0$ في $\mathbb{C}$ المعادلة تكافئ $\begin{cases} z-2+2i=0 \ldots\ldots(1) \\ z^2-2\sqrt{2}z+8=0 \ldots(2) \end{cases}$ أي

$\begin{cases} z=2-2i \\ z^2-2\sqrt{2}z+8=0 \ldots(1) \end{cases}$ نحسب مميز المعادلة (1) و هو $\Delta=(2\sqrt{2})^2-4(8)=8-32=-24$ للمعادلة حلين هما

$\begin{cases} z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{6} \\ z_2=\sqrt{2}-i\sqrt{6} \end{cases}$. حلول المعادلة هي $\begin{cases} z_0=2-2i \\ z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{6} \\ z_2=\sqrt{2}-i\sqrt{6} \end{cases}$

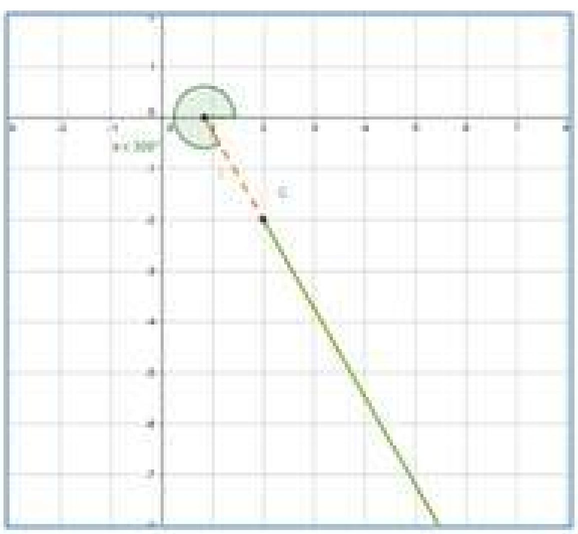
2) أ- كتابة z_A ; z_B ; z_C على الشكل الأسي $|z_A|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ و منه $z_A=2\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i}$

و $z_B=\overline{z_A}=2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{3}i}$ $z_C=2(1-i)$ و منه $|z_C|=2\sqrt{2}$ و منه $z_C=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

بما ان $|z_A|=|z_B|=|z_C|=2\sqrt{2}$ و منه النقط A ; B ; C تنتمي الى الدائرة (Ω) التي مركزها O و نصف قطرها $2\sqrt{2}$.

ب-تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخيلي صرفا

لدينا $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)=\frac{2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i}}{2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}=e^{\frac{7\pi}{12}i}$ و منه $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=e^{\frac{7n\pi}{12}}$ عدد تخيلي صرف يعني ان $\frac{7n\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+\pi k$ و k عدد صحيح و منه بالضرب في $\frac{12}{\pi}$ نجد $7n=6+12k$ أي ان $7n\equiv 6[12]$ و منه بالضرب في 5 نجد $35n\equiv 30[12]$ أي $-n\equiv 6[12]$ أي $n\equiv -6[12]$ و منه $n\equiv 6[12]$ إذن $n\equiv 6+12k'$ و k' عدد طبيعي .



ج- التحقق C تنتمي الى (Γ) : $z_C=z_C-k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ يعني

$-k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)=0$ ومنه $k=0$ بما انه عدد من $\mathbb{R}_-$ و منه C تنتمي الى (Γ).

$z=z_C-k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ يعني ان $z-z_C=-k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ و منه

$z-z_C=-ke^{\frac{2\pi}{3}i}$ و منه $z-z_C=ke^{\frac{5\pi}{3}i}$ أي ان

$\arg(z-z_C)=\frac{5\pi}{3}+2\pi k''$ و k'' عدد صحيح مجموعة النقط (Γ) هي نصف مستقيم .

3) تعيين طبيعة التحويل hor هو تشابه غير مباشر نسبته -2 و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ و مركزه O

(هو تشابه مباشر نسبته 2 و زاويته $\frac{5\pi}{3}$ و مركزه O) .

الأستاذ جواليل أحمد –تمنغست

صورة الدائرة (Ω) بالتحويل hor هي دائرة مركزها O و نصف قطرها هو $4\sqrt{2}=(2\sqrt{2})2$.

التمرين الرابع :

$f(x)=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$

1- أ- حساب النهايات : . $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)e^{-x+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3)e^{-x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^3}{e^{x-1}}=0$.

و منه $y=0$ معادلة للمستقيم المقارب الأفقي للمنحنى (C_f) جهة $+\infty$.

ب-إثبات أن عبارة المشتقة هي $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$:

نحسب المشتقة $f'(x)=(-3x^2+4x)e^{-x+1}-(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$ و منه $f'(x)=(x^3-5x^2+4x)e^{-x+1}$ أي ان $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$ محققة .

استنتاج اتجاه تغير الدالة f : إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x^2-5x+4)$

لدينا (x^2-5x+4) له جذرين هما 1 و 4

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
اشارة (x^2-5x+4)		+	|	+	0	—	0	+	
اشارة x		—	0	+		+		+	
اشارة $f'(x)$		—	0	+	0	—	0	+	

و منه f متزايدة على المجالين $[0;1]$ و $]4;+\infty[$ متناقصة على المجالين $]-\infty;0]$ و $[1;4]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		—	0	+	0	–	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	$-32e^{-3}$	↗	0

2- كتابة معادلة (T) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 هي $y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$f'(2)=-4e^{-1}$ و $f(2)=0$ و منه معادلة المماس (T) هي $y=-\dfrac{4}{e}x+\dfrac{8}{e}$.

3- h دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ $h(x)=x^2e^{-x+2}-4$

دراسة تغيرات الدالة h : $h'(x)=2xe^{-x+2}-x^2e^{-x+2}=x(2-x)e^{-x+2}$ إشارتها من إشارة $(2-x)$

و منه فهي موجبة على المجال $[0;2]$ و سالبة على المجال $]2;+\infty[$ و منه الدالة h متزايدة على المجال $[0;2]$ و متناقصة على المجال $]2;+\infty[$ و لدينا $h(2)=0$ إذن $h(2)=0$ قيمة حدية كبرى و منه $h(x)$ إشارتها سالبة .

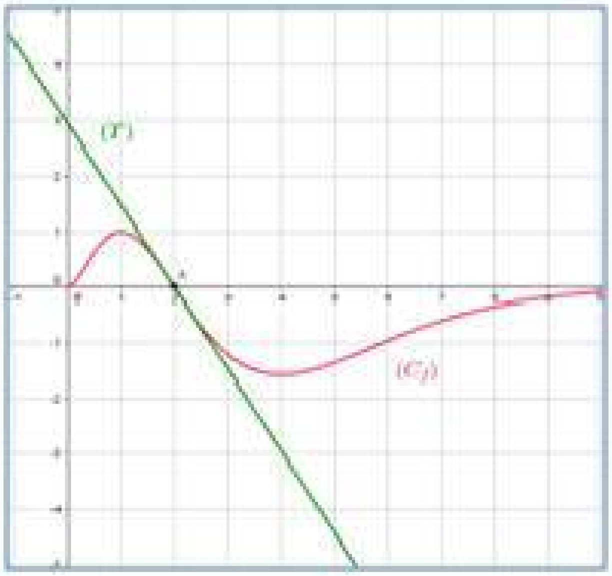
تحديد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $]0;+\infty[$:

$f(x)-y=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}+4e^{-1}x-8e^{-1}=-x^3e^{-x+1}+2x^2e^{-x+1}+4xe^{-1}-8e^{-1}$ و منه

$f(x)-y=-x^3e^{-x+1}+4x.e^{-1}+2x^2e^{-x+1}-8e^{-1}=-xe^{-1}(x^2e^{-x+2}-4)+2e^{-1}(x^2e^{-x+2}-4)$ أي ان

$f(x)-y=\left(x^2e^{-x+2}-4\right)(-x+2)e^{-x}$ أي ان $f(x)-y=h(x)(-x+2)e^{-x}$ بما أن إشارة $h(x)$ سالبة ومنه اشارة الفرق من إشارة $(x-2)$ أي ان (C_f) يقع فوق (T) على المجال $]0;2[$ و (C_f) يقع تحت (T) على المجال $]2;+\infty[$ و يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 2 .

4- رسم المنحنى البيقي (C_f) و المماس (T) :



5- المناقشة بيانيا :

المعادلة $f(x)=m(x-2)\ldots.(E)$ حلها هو ايجاد فواصل نقاط تقاطع (C_f) و المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=m(x-2)$.

لما $m\in\left]-\infty;-\frac{4}{e}\right]$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة (E) حل وحيد .

لما $m\in\left]-\frac{4}{e};0\right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في ثلاثة نقاط و منه للمعادلة (E) ثلاثة حلول.

لما $m=0$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة (E) حلين .

لما $m\in]0;+\infty[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة (E) حل وحيد .

6- لدينا $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ من السؤال رقم (1) بوضع $t=\frac{1}{x}$

و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}t=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}t=+\infty$ نجد $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{t\to 0}f(t)=0$.

المشتقة : هي $g'(x)=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$ و منه $g'(x)=-\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x^2}-5\frac{1}{x}+4\right)e^{-\frac{1}{x}+1}$ أي

$g'(x)=\frac{1}{x^4}\left(-1+5x-4x^2\right)e^{-\frac{1}{x}+1}$ و اشارته منه اشارة $\left(-1+5x-4x^2\right)$ و لها جذرين هما 1 و $\frac{1}{4}$

و منه g متزايدة على المجال $\left[\frac{1}{4};1\right]$ و متناقصة على المجالين $[1;+\infty[$; $\left]0;\frac{1}{4}\right]$

و $g\left(\frac{1}{4}\right)=f(4)$; $g(1)=f(1)$

جدول تغيرات الدالة g

x	0		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-32e^{-4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

الاستاذ جوالبل أحمد – تمنغست
انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الاول :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 7u_n + 8 \end{cases}$$

1) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n = 7^{n+1} - 4$

التحقق $3u_0 = 7^1 - 4 = 3$ و $3u_0 = 3\times 1 = 3$ محققة

نفرض صحة $3u_n = 7^{n+1} - 4$ و لنبرهن صحة $3u_{n+1} = 7^{n+2} - 4$

$3u_n = 7^{n+1} - 4$ و $3u_{n+1} = 3[7u_n + 8]$ أي ان $3u_{n+1} = 7(3u_n) + 24$ و منه $3u_{n+1} = 7[7^{n+1} - 4] + 24$ أي ان

$3u_{n+1} = 7^{n+2} - 28 + 24$ أي ان $3u_{n+1} = 7^{n+2} - 4$ و هو المطلوب

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n = 7^{n+1} - 4$

2) أ-حساب المجاميع $S_n = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^n = \dfrac{7^{n+1} - 1}{7 - 1} = \dfrac{1}{6}\left(7^{n+1} - 1\right)$.

$S_n' = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ يكافئ $3S_n' = 3u_0 + 3u_1 + 3u_2 + 3u_3 + \dots + 3u_n$ و $3u_n = 7^{n+1} - 4$ و منه

$3S_n' = [7 - 4] + [7^2 - 4] + [7^3 - 4] + \dots + [7^{n+1} - 4]$ يكافئ أن $3S_n' = [7 + 7 + 7 + \dots 7^{n+1}] - 4(n+1)$ هذا يعني ان

$3S_n' = 7S_n - 4(n+1)$ و منه $S_n' = \dfrac{7}{3}S_n - \dfrac{4}{3}(n+1)$ يكافئ $S_n' = \dfrac{7}{18}\left(7^{n+1} - 1\right) - \dfrac{4}{3}(n+1)$ أي ان

$S_n' = \dfrac{7^{n+2}}{18} - \dfrac{4}{3}n - \dfrac{31}{18}$.

ب-من ما سبق لدينا $S_n' = \dfrac{7^{n+2}}{18} - \dfrac{4}{3}n - \dfrac{31}{18}$ بالضرب في 18 نجد $18S_n' = 18\left[\dfrac{7^{n+2}}{18} - \dfrac{4}{3}n - \dfrac{31}{18}\right] = 7^{n+2} - 24n - 31$

أي أن $18S_n' = 7^{n+2} - 24n - 31$ و هو المطلوب .

3) أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 7^n على 5

$7^0 \equiv 1[5]$ و $7 \equiv 2[5]$ و $7^2 \equiv 4[5]$ و $7^3 \equiv 3[5]$ و $7^4 \equiv 1[5]$ و منه بواقي قسمة 7^n على 5 تشكل متتالية دورية و دورها 4

باقي قسمة 7^n على 5 لما n يكتب على الشكل $4k$ هو 1.

باقي قسمة 7^n على 5 لما n يكتب على الشكل $4k+1$ هو 2.

باقي قسمة 7^n على 5 لما n يكتب على الشكل $4k+2$ هو 4.

باقي قسمة 7^n على 5 لما n يكتب على الشكل $4k+3$ هو 3.

ب) تعيين العدد الطبيعي n حتى يكون S_n' قابلا للقسمة على 5 أي ان $S_n' \equiv 0[5]$ بما ان العددان 18 و 5 أوليان فيما بينهما نجد أن $S_n' \equiv 0[5]$ يكافئ $18S_n' \equiv 0[5]$ أي ان $7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 0[5]$

لدينا $7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 7^{n+2} + n - 1[5]$ لأن $31 \equiv 1[5]$ و $-24 \equiv 1[5]$

- لما $n = 4k$ فإن $7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 4 + 4k - 1[5]$ أي ان $7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 4k + 3[5]$

S_n يقبل القسمة على 5 يعني ان $4k+3\equiv 0[5]$ و منه $4k\equiv 2[5]$ أي ان $-k\equiv 2[5]$ و منه $k\equiv -2[5]$ إذن $k\equiv 3[5]$ و منه

$k=3+5k"$ بالتعويض نجد $n=12+20k"$ و $k"$ عدد طبيعي .

- لما $n=4k+1$ فإن $7^{n+2}-24n-31\equiv 3+4k+1-1[5]$ أي ان $7^{n+2}-24n-31\equiv 4k+3[5]$

S_n يقبل القسمة على 5 يعني ان $4k+3\equiv 0[5]$ و منه $4k\equiv 2[5]$ أي ان $-k\equiv 2[5]$ و منه $k\equiv -2[5]$ إذن $k\equiv 3[5]$ و منه

$k=3+5k"$ بالتعويض نجد $n=12+20k"$ و $k"$ عدد طبيعي .

- لما $n=4k+2$ فإن $7^{n+2}-24n-31\equiv 1+4k+2-1[5]$ أي ان $7^{n+2}-24n-31\equiv 4k+2[5]$

S_n يقبل القسمة على 5 يعني ان $4k+2\equiv 0[5]$ و منه $4k\equiv 3[5]$ أي ان $-k\equiv 3[5]$ و منه $k\equiv -3[5]$ إذن $k\equiv 2[5]$ و منه

$k=2+5k'$ بالتعويض نجد $n=10+20k'$ و k' عدد طبيعي

- لما $n=4k+3$ فإن $7^{n+2}-24n-31\equiv 2+4k+3-1[5]$ أي ان $7^{n+2}-24n-31\equiv 4k-1[5]$

S_n يقبل القسمة على 5 يعني ان $4k-1\equiv 0[5]$ و منه $4k\equiv 1[5]$ أي ان $-k\equiv 1[5]$ و منه $k\equiv -1[5]$ إذن $k\equiv 4[5]$ و منه

$k=4+5k_0$ بالتعويض نجد $n=19+20k_0$ و k_0 عدد طبيعي

التمرين الثاني :

1) تعيين المعادلة الديكارتية للمستوي (P) لدينا $\begin{cases} x=-t-2\lambda+2.....(1) \\ y=3t+4\lambda-3.......(2) \\ z=3t+4\lambda-1........(3) \end{cases}$ بطرح (3) من (2) نجد $y-z=-2$ هي

المعادلة الديكارتية للمستوي (P) .

2) أ-لدينا $x^2+y^2+z^2-2x\cos\alpha-2y\sin\alpha-z-\frac{3}{4}=0$ يكافئ $x^2-2x\cos\alpha+y^2-2y\sin\alpha+z^2-z-\frac{3}{4}=0$

أي ان $(x-\cos\alpha)^2-\cos^2\alpha+(y-\sin\alpha)^2-\sin^2\alpha+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=0$ و هذا يكافئ

$(x-\cos\alpha)^2+(y-\sin\alpha)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=2$ و منه (E_α) سطح كرة مركزه $w_\alpha\left(\cos\alpha\,;\,\sin\alpha;\frac{1}{2}\right)$ و نصف قطره $\sqrt{2}$.

ب-دراسة الوضع النسبي بين (E_α) و (P)

نحسب المسافة بين (P) و $w_\alpha\left(\cos\alpha\,;\,\sin\alpha;\frac{1}{2}\right)$ و هي $d(w_\alpha;P)=\frac{\left|\sin\alpha-\frac{1}{2}+2\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\sin\alpha+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{2}}$

المناقشة :

- لما $d(w_\alpha;P)=\sqrt{2}$ يعني ان $\dfrac{\left|\sin\alpha+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ يكافئ $\left|\sin\alpha+\frac{3}{2}\right|=2$ يكافئ $\begin{cases}\sin\alpha+\frac{3}{2}=2\\ \text{او}\\ \sin\alpha+\frac{3}{2}=-2\end{cases}$ و منه $\begin{cases}\sin\alpha=\frac{1}{2}\\ \text{او}\\ \sin\alpha=-\frac{7}{2}\end{cases}$

أي ان $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ لان المعادلة الثانية لا حل لها و $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ في المجال المعطى يعني أن $\alpha=\frac{\pi}{6}$ في هذه الحالة (E_α) و (P) متمسان في نقطة

- لما $d(w_\alpha;P)<\sqrt{2}$ يعني ان $\dfrac{\left|\sin\alpha+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{2}}<\sqrt{2}$ يكافئ $-2<\sin\alpha+\frac{3}{2}<2$ أي ان $-\frac{7}{2}<\sin\alpha<\frac{1}{2}$ أي ان

$-1\le\sin\alpha<\frac{1}{2}$ أي ان $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right[$ في هذه الحالة (P) و (E_α) متقاطعان في نقطتين

- لما $d(w_\alpha;P)>\sqrt{2}$ يعني ان $\alpha\in\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$ في هذه الحالة (P) و (E_α) غير متقاطعان .

3) حالة التماس يعني ان $\alpha=\frac{\pi}{6}$ و منه $w_\alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ و المستوى $(P): y-z=-2$ شعاعه الناظمي هو

$\overrightarrow{n}(0;1;-1)$ و هو شعاع توجيه المستقيم (D) و منه التمثيل الوسيطي للمستقيم هو $t\in IR$: $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ y=t+\frac{1}{2}\\ z=-t+\frac{1}{2}\end{cases}$

I نقطة تماس (P) و (E_α) هي نفسها نقطة تقاطع المستقيم (D) و المستوى (P)

بتعويض التمثيل الوسيطي في المعادلة الديكارتية نجد $t+\frac{1}{2}+t-\frac{1}{2}=-2$ أي $t=-1$ و منه نقطة التماس هي

$I\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

التمرين الثالث :

I) كتابة العدد $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2$ على الشكل الجبري $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2=\frac{25}{4}+5i-1=\frac{21}{4}+5i$

و منه الجذران التربيعيين للعدد المركب $\frac{21}{4}+5i$ هما $\left(\frac{5}{2}+i\right)$ و $\left(-\frac{5}{2}-i\right)$.

II) لدينا $z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $z_B=-\frac{3}{2}i$ و $z_C=-\overline{z_A}$ و $z_I=i$

1) الكتابة على الشكل الجبري : $z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{2}+\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]=\frac{3}{2}+1+i=\frac{5}{2}+i$

$$z_C = -\overline{z_A} = -\frac{3}{2} - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{2} - \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = -\frac{3}{2} - 1 + i = -\frac{5}{2} + i$$

2) كتابة على الشكل الأسي للعدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-\frac{5}{2} + i + \frac{3}{2}i}{\frac{5}{2} + i + \frac{3}{2}i}$ هذا يعني $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\frac{-\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i}{\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i}$ و منه

$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{2} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ أي $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

مما سبق نستنتج أن $(\vec{BA};\vec{BC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in Z$ و $BA = BC$ و منه المثلث ABC قائم في B و متساوي الساقين .

3) التشابه S : $S(B) = B$ و $S(A) = I$

أ) كتابة العبارة المركبة للتشابه S هي من الشكل $z' = az + b$ حيث

$$a = \frac{z_I - z_B}{z_A - z_B} = \frac{i + \frac{3}{2}i}{\frac{5}{2} + i + \frac{3}{2}i} = \frac{\frac{5}{2}i}{\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i} = \frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i+1}{2}$$

$$b = z_B - az_B = -\frac{3}{2}i - \left(\frac{i+1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}i\right) = -\frac{3}{2}i - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}i = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}i$$

$z' = \frac{1+i}{2}z - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}i$ هي العبارة المركبة .

و منه نسبة التشابه S هي $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و زاويته هي θ حيث

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$ و منه $\theta = \frac{\pi}{4}$

ب-التحويل T_n معرف كما يلي $T_n = \underbrace{SoSoSoSo...oS}_{n \text{ مرة}}$ هو تشابه زاويته هي $n\theta = \frac{n\pi}{4}$ و مركزه B

يكون T_n تحاكي لما $\frac{n\pi}{4} = k\pi : k \in Z$ أي ان $n = 4k\pi \; : k \in Z$ و هو التحاكي الذي مركزه B و نسبته

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

التمرين الرابع :

I) لدينا $g(x)=\frac{1}{x}-\ln(x)$.

1) دراسة اتجاه تغير الدالة g : $g'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$ و هي موجبة على $]0;+\infty[$ و منه g متناقصة على $]0;+\infty[$

2) إثبات أن للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد في المجال $]1,76\,;1,77[$: $g(1,77)=-0,006$ $g(1,76)=0,002$

بما أن الدالة g متزايدة و مستمرة على $]1,76\,;1,77[$ و $g(1,76)\times g(1,77)<0$ فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1,76\,;1,77[$.

إشارة الدالة g

x	0		α		$+\infty$
إشارة $g(x)$	||	$+$	0	$-$	

II) لدينا $\begin{cases} f(x)=\frac{x+1}{x-\ln x} & : \ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) إثبات أن f مستمرة عند 0 على اليمين $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{x-\ln x}=\lim\limits_{x\to 0}-\frac{1}{\ln x}=0=f(0)$ ومنه الدالة مستمرة على يمين 0.

حساب النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2-x\ln x}=\lim\limits_{x\to 0}-\frac{1}{x\ln x}=+\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0^-$ حسب النهاية بالمقارنة).

التفسير الهندسي للنتيجة هو أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا موازي لحامل محور التراتيب على يمين النقطة $O(0;0)$

2) إثبات إن $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-\ln x)^2}$: لدينا على المجال $]0;+\infty[$

$f'(x)=\frac{(x-\ln x)-\left(1-\frac{1}{x}\right)(x+1)}{(x-\ln x)^2}$ أي ان $f'(x)=\frac{x-\ln x-\frac{(x-1)(x+1)}{x}}{(x-\ln x)^2}$ و منه

$f'(x)=\frac{x-\ln x-\frac{x^2-1}{x}}{(x-\ln x)^2}=\frac{x-\ln x-x+\frac{1}{x}}{(x-\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}-\ln x}{(x-\ln x)^2}$ أي أن $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-\ln x)^2}$ و هو المطلوب .

3) حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{\ln x}{x}}=1$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

التفسير الهندسي : من ما سبق نستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=1$.

الاستاذ جواليل أحمد – تمنغست

جدول تغيرات الدالة

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	1

4) الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $h(x)=x-\ln x$

أ) إثبات أن h موجبة على المجال $]0;+\infty[$ لدينا $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$ و منه إشارة $h'(x)$ من إشارة $(x-1)$ و هي موجبة على المجال $]1;+\infty[$ و سالبة على المجال $]0;1]$ و منه h متزايدة على المجال $[1;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]0;1]$ و $h(1)=1$ هي قيمة حدية صغرى و منه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ فإن $h(x)>0$.

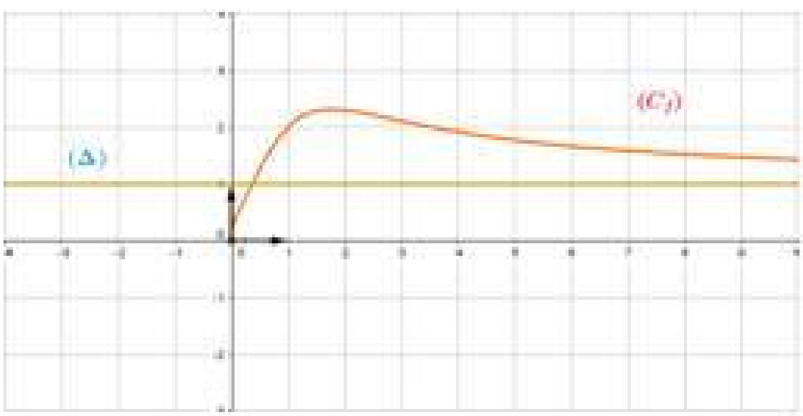
لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-y=\frac{x+1}{x-\ln x}-1=\frac{1+\ln x}{x-\ln x}$

و منه إشارته من إشارة $1+\ln x$

$1+\ln x=0$ يكافئ أن $x=\frac{1}{e}$ و $1+\ln x>0$ يكافئ أن $x>\frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
إشارة $f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	

ب) رسم المنحنى (C_f) :



5) لدينا $F(x)=\int_1^x f(t)dt$

- إثبات أن من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$: $\frac{1}{x}+1\leq f(x)\leq f(\alpha)$

من جدول التغيرات او من المنحنى البياني لدينا $f(\alpha)$ قيمة حدية كبرى أي ان $f(x)\leq f(\alpha)$......(1)

و لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$ فإن $\frac{x+1}{x-\ln x}\leq\frac{x+1}{x}$ أي ان $1+\frac{1}{x}\leq f(x)$......(2)

الأستاذ جوالبل أحمد – تمنغست

من (1) و (2) نجـــد أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$: $\frac{1}{x}+1 \leq f(x) \leq f(\alpha)$.

التفسير الهندسي لـــ $F(e)=\int_1^e f(t)dt$ و هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمان اللذان معادلاتيهما $x=1$ و $x=e$.

- حصر $F(e)$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$: $\frac{1}{x}+1 \leq f(x) \leq f(\alpha)$ و منه المكاملة نجد : $\int_1^e \left(\frac{1}{x}+1\right)dx \leq \int_1^e f(x)dx \leq f(\alpha)\int_1^e dx$

أي أن $[\ln x+x]_1^e \leq F(e) \leq f(\alpha)(e-1)$ و منه $e \leq F(e) \leq f(\alpha)(e-1)$

الاستاذ جوالبل أحمد – تمنغست
انتهى الموضوع الثاني