التمرين رقم 1 الحل

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$،

لتكن النقط $A(1;1;0)$، $B(2;-1;1)$ و $C(-1;0;1)$

$D\left(\frac{1}{2};2;-\frac{1}{2}\right)$، $E(0;1;1)$ و $H\left(\frac{5}{4};\frac{7}{4};-\frac{1}{2}\right)$

والمستوى $(p)\begin{cases}x=1+\alpha+\beta\\ y=2-\alpha\\ z=-1+2\alpha-\beta\end{cases}$ حيث $\alpha;\beta$ وسيطان

1) أ) اثبات ان $A;B;C$ تعين مستويا

لدينا $\vec{AB}(1,-2,1)$ و $\vec{AC}(-2,-1,1)$ غير مرتبطان خطيا لأن

$\frac{-1}{-2}\neq\frac{-2}{1}$ ومنه $A;B;C$ تعين مستويا

ب) اثبات ان $\vec{n}(1,3,5)$ ناظمي للمستوي (ABC)

يعني ان $\vec{n}(1,3,5)$ عمودي على الاساس $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$

ومنه $\vec{n}.\vec{AB}=1-6+5=0$ و $\vec{n}.\vec{AC}=-2-3+5=0$

ومنه $\vec{n}(1,3,5)$ ناظمي للمستوي (ABC)

ومنه $(ABC): x+3y+5z+d=0$ لدينا

$A\in(ABC)$ يعني ان $A\in(ABC)$ ومنه $d=-4$ ومنه

$(ABC): x+3y+5z-4=0$

2) أ) معادلة ديكارتية ل (p)

$\begin{cases}x=1+\alpha+\beta.........(1)\\ y=2-\alpha.............(2)\\ z=-1+2\alpha-\beta....(3)\end{cases}$ من (2) نجد $\alpha=2-y$ و من (3) نجد

$\beta=-1+2\alpha-z$ نعوض في (1) نجد $(p): x=1+2-y+-1+4-2y-z$

ومنه $(p): x+3y+z-6=0$

المستويين (p) و (ABC) متقاطعان يعني ان $\vec{n}$ و $\vec{n}_{(p)}$ غير مرتبطان

خطيا ومنه $\vec{n}(1,3,5)$ و $\vec{n}_{(p)}(1,3,1)$ أي $\frac{1}{1}\neq\frac{1}{5}$

ومنه (p) و (ABC) متقاطعان

ب) ليكن (Δ) مستقيم تقاطع (p) و (ABC)

اثبات ان $D\in(\Delta)$ وهذا يعني ان $D\in(p)$ و $D\in(ABC)$

ومنه $D\in(p)$ يعني ان $(p): \frac{1}{2}+3(2)-\frac{1}{2}-6=0$ محققة

و $D\in(ABC)$ يعني ان $(ABC): \frac{1}{2}+3(2)-\frac{5}{2}-4=0$ محققة

اذن $D\in(\Delta)$

$\vec{u}(-3,1,0)$ شعاع توجيه (Δ) يعني ان $\vec{u}$ يعامد $\vec{n}$ شعاع ناظم (ABC)

ومنه $\vec{u}.\vec{n}=-3+3=0$ محققة

و كذلك $\vec{u}$ يعامد $\vec{n}_{(p)}$ شعاع ناظم (p)

ومنه $\vec{n}_{(p)}.\vec{u}=-3+3=0$ محققة

ومنه $\vec{u}(-3,1,0)$ شعاع توجيه (Δ)

ج) لدينا التمثيل الوسيطي ل (Δ) الذي يشمل $D\left(\frac{1}{2};2;-\frac{1}{2}\right)$ و

$\vec{u}(-3,1,0)$ شعاع توجيه له هو $k\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=\frac{1}{2}-3k\\ y=2+k\\ z=-\frac{1}{2}\end{cases}$

د) اثبات ان H هي المسقط العمودي ل $A(1;1;0)$ على المستقيم (Δ)

نثبت ان $H\in(\Delta)$ ومنه $\begin{cases}\frac{5}{4}=\frac{1}{2}-3k\\ \frac{7}{4}=2+k\\ -\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\end{cases}$ ومنه $k=-\frac{1}{4}$ ثابت (محققة)

و ان $\vec{AH}\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right)$ و $\vec{u}(-3,1,0)$ شعاع توجيه (Δ) متعامدان

ومنه $\vec{AH}.\vec{u}=-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=0$ (محققة)

ومنه H هي المسقط العمودي ل A على المستقيم (Δ)

استنتاج المسافة $d(A;(\Delta))$

$$d(A;(\Delta))=AH=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

ومنه $d(A;(\Delta))=AH=\frac{\sqrt{14}}{4}$

3) G مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-3);(C,2)\}$

نسمي (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\vec{EM}.\vec{GM}=11$

أ) تعيين احداثيات G

$\begin{cases}x_G=2-6-2\\ y_G=2+3\\ z_G=-3+2\end{cases}$ ومنه $G(-6;5;-1)$

ب) معادلة ديكارتية ل (Γ) ثم اثبات انها سطح كرة

لدينا $M(x,y,z)$ ومنه $\vec{EM}(x;y-1;z-1)$ و

$\vec{GM}(x+6;y-5;z+1)$

ومنه $\vec{EM}.\vec{GM}=x^2+6x+y^2-6y+5+z^2-1$

ومنه $x^2+6x+y^2-6y+z^2-7=0$

أي $(x+3)^2+(y-3)^2+z^2=(5)^2$

ومنه (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{EM}.\overrightarrow{GM}=11$

هي دائرة مركزها $w(-3;3;0)$ و نصف قطرها $r=5$

ج) الوضع النسبي بين (ABC) و (Γ)

لدينا $d(w;(ABC))=\frac{|1(-3)+3(3)+5(0)-4|}{\sqrt{1+9+25}}$ ومنه

$d(w;(ABC))=\frac{2\sqrt{35}}{35}$ أي $d(w;(ABC))<r$

ومنه (ABC) و (Γ) يتقاطعان في دائرة

التمرين رقم 2 الحل

I. الجزء

المتتالية (u_n) هندسية متزايدة تماما حدودها موجبة حدها الاول u_0 وأساسها q حيث $\begin{cases}\ln(u_1)+\ln(u_2)=11\\ u_1+u_2=e^4(1+e^3)\end{cases}$

1) حساب u_1 و u_2 ثم استنتاج q

لدينا $\begin{cases}\ln(u_1)+\ln(u_2)=11\\ u_1+u_2=e^4(1+e^3)\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\ln(u_1.u_2)=11\\ u_1+u_2=e^4(1+e^3)\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}u_1.u_2=e^{11}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)\\ u_1+u_2=e^4(1+e^3)..(2)\end{cases}$ ومنه $u_1+\frac{e^{11}}{u_1}=e^4(1+e^3)$

ومنه $u_1^2-u_1e^4(1+e^3)+e^{11}=0$ معادلة من الدرجة 2

ومنه $\Delta=e^8(1+e^3)^2-4e^{11}$ ومنه $\Delta=e^8\left[(1+e^3)^2-4e^3\right]$

ومنه $\Delta=e^8\left[1+e^6+2e^3-4e^3\right]=e^8\left[1+e^6-2e^3\right]$

ومنه $\Delta=\left[e^4(1-e^3)\right]^2$ نجد

$u_1=\frac{e^4(1+e^3)-e^4(1-e^3)}{2}=\frac{e^4(2e^3)}{2}$ ومنه $u_1=e^7$

او $u_1=\frac{e^4(1+e^3)+e^4(1-e^3)}{2}=e^4$ ومنه $u_1=e^4$

ومنه $u_2=\frac{e^{11}}{u_1}$ اذن $u_2=e^4$ او $u_2=e^7$

(u_n) هندسية متزايدة ومنه $u_1=e^4$ و $u_2=e^7$

الاساس q لدينا $u_n=u_p.q^{n-p}$ ومنه $u_2=u_1.q$ ومنه $q=e^3$

2) نضع $u_1=e^4$ و $q=e^3$

أ) كتابة u_n بدلالة n

لدينا $u_n=u_1.q^{n-1}$ ومنه $u_n=e^4.e^{3(n-1)}$ ومنه $u_n=e^1.e^{3n}$

وبالتالي $u_n=.e^{3n+1}$

ب) نضع $S_n=\ln(u_0)+\ln(u_1)+\ln(u_2)+\ldots+\ln(u_n)$

حساب S_n بدلالة n

ومنه $S_n=\ln(u_0\times u_1\times u_2\times\ldots\times u_n)$

$S_n=\ln(e^1\times e^4\times e^7\times\ldots\times e^{3n+1})$

ومنه $S_n=\ln(e^{1+4+7\ldots+3n+1})$

لاحظ ان $1+4+7\ldots+3n+1$ هي حدود منتابعة لمتتالية هندسية حدها الاول **1** واساسها **3** وحدها العام $3n+1$

ومنه $1+4+7\ldots+3n+1=(n+1)\frac{2+3n}{2}$

وبالتالي $S_n=(n+1)\frac{2+3n}{2}$

3) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $a_n=n+3$

أ) اثبات ان $PGCD(2S_n,a_n)=PGCD(a_n,14)$

لدينا $2S_n=(n+1)(2+3n)$ و $a_n=n+3$

ومنه $2S_n=3n^2+5n+2$

وبالتالي a_n يقسم $2S_n$ يعني ان

$3n^2+5n+2$	$n+3$
$3n^2+9n$	$3n-4$
$-4n+2$	
$-4n-12$	
14	

$3n^2+5n+2=(n+3)(3n-4)+14$

ومنه $2S_n-a_n(3n-4)=14$

ومنه $PGCD(2S_n,a_n)=PGCD(a_n,14)$

ب) القيم الممكنة ل $PGCD(2S_n,a_n)$

هي قواسم 14 حيث $14(1,2,7,14)$

ج) تعيين قيم n حيث $PGCD(2S_n,a_n)=7$

ومنه $a_n\equiv 0[7]$ او $S_n\equiv 0[7]$

ومنه $a_n\equiv 0[7]$ يكافئ ان $n+3\equiv 0[7]$ يكافئ $n\equiv -3[7]$

يكافئ $n\equiv 4[7]$ ومنه $n=7k+4\ldots k\in\mathbb{N}$

4) بواقي قسمة 2^n على 7 حيث n عدد طبيعي

n	0	1	2	3
r	1	2	4	1

عملية القسمة دورية دورها 3 ونكتب $2^{3k}\equiv 1[7]$

اذن بواقي 2^n على 7 حيث n عدد طبيعي كما يلي

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
r	1	2	4

5) نضع $b_n=3na_n-2S_n+1437^{2016}+1$

تعيين قيم n العدد الطبيعي التي تحقق $\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$

$b_n \equiv 0[7]$ يكافئ $3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1 \equiv 0[7]$

لدينا

باقي القسمة الاقليدية ل 1437^{2016} على 7

لدينا $2016 = 3\times 672$ اي من الشكل $2016 = 3\times k$

و لدينا $1437 = 7\times 205 + 2$ اي ان $1437 \equiv 2[7]$

ومنه $1437^{2016} \equiv 2^{3k}[7]$ نجد $1437^{2016} \equiv 1[7]$

ومنه $3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1 \equiv 0[7]$ يكافئ

$3n(n+3) - 3n^2 - 5n - 2 + 1 + 1 \equiv 0[7]$ يكافئ

$4n \equiv 0[7]$ بما ان 4 و 7 اوليان فيما بينهما فان $n \equiv 0[7]$

ومنه $\begin{cases} n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$ ومنه 7 و5 اوليان فيما بينهما اي $n \equiv 0[35]$

ومنه $n = 35k ... k \in \mathbb{N}$

6) اثبات ان $1437^{9n+1} - 3\times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0[7]$

لدينا $1437^{9n+1} \equiv 2[7]$ لان $9n+1$ من الشكل $3k+1$

وبالتالي $1437^{9n+1} \equiv 2[7]$

ولدينا $4^{12n+1} = (2)^{2(12n+1)} = 2^{24n+2}$ ومنه $4^{12n+1} \equiv 4[7]$

لان $24n+2$ من الشكل $3k+2$ ومنه $4^{12n+1} \equiv 4[7]$

ولدينا $52 \equiv 3[7]$

وبالتالي $1437^{9n+1} - 3\times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0[7]$ يكافئ

$2 - 12 + 3 \equiv 0[7]$ ومنه $-7 \equiv 0[7]$ محققة

التمرين رقم 3 الحل

1)

أ). حلول المعادلة $(z^2 - 4z + 5) = 0$ في $\mathbb{C}$

معادلة من الدرجة الثانية ومنه $\Delta = -4$

ومنه نجد $z_1 = 2+i$ ، $z_2 = 2-i$

ب) استنتاج حلول

المعادلة $\left(z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)^2 - 4z + 1 - 4i\left(1-\sqrt{3}\right) = 0$

تكافئ $\left(z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)^2 - 4z + 5 - 4 - 4i\left(1-\sqrt{3}\right) = 0$

تكافئ $\left(z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)^2 - 4\left(z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right) + 5 = 0$

ومنه $z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right) = 2+i$ أي $z = 1+i\sqrt{3}$

ومنه $z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right) = 2-i$ أي $z = 1-i\left(2-\sqrt{3}\right)$

2) θ عدد حقيقي حيث $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ و z_0 عدد مركب طويلته **1** وعمدته θ

أ) كتابة على الشكل الاسي $z = 1+i\sqrt{3}$

لدينا $\left|1+i\sqrt{3}\right| = 2$

$\arg\left(1+i\sqrt{3}\right)\begin{cases}\cos\theta = 1/2 \\ \sin\theta = \sqrt{3}/2\end{cases} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ الشكل الاسي

$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$

ب) تعيين θ علما ان $\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\overline{z_0}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

لدينا $z_0 = e^{i\theta}$ ومنه $\overline{z_0} = e^{-i\theta}$ ومنه $\frac{z_0}{\overline{z_0}} = e^{2i\theta}$ ومنه

$\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\overline{z_0}} = 2e^{i\pi/3} \times e^{2i\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $e^{i(2\theta+\pi/3)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

وبالتالي $2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ومنه $\theta = \frac{\pi}{12}$

ج) n عدد طبيعي من أجل قيمة θ المتحصل عليها

كتابة على الشكل الاسي $\left[\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right]^n$

ومنه $\left[\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right]^n$ يكافئ $\left[\frac{e^{i\pi/12} \times 2e^{i\pi/3}}{2}\right]^n$ يكافئ

$\left[\frac{e^{i\pi/12} \times 2e^{i\pi/3}}{2}\right]^n = e^{in\frac{5\pi}{12}}$ ومنه

$\left[\frac{e^{i\pi/12} \times 2e^{i\pi/3}}{2}\right]^n = \cos\left(n\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(n\frac{5\pi}{12}\right)$

د) تعيين قيم n حيث $\left[\frac{e^{i\pi/12} \times 2e^{i\pi/3}}{2}\right]^n$ حقيقي موجب تماما

يعني ان $n\frac{5\pi}{12} = 2\pi k$ ومنه $n = \frac{24}{5}k$ حيث k يقسم **5**

3) المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب

$z_A = 2-i$ ، $z_B = 2+i$ ، $z_C = 1+i\sqrt{3}$

أ) تعيين z_D لاحقة D مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$

ومنه $z_D = z_A - z_B + z_C = 2-i-2-i+1+i\sqrt{3}$

ومنه $z_D = 1-i\left(2-\sqrt{3}\right)$

ب) الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع يعني ان $z_A - z_B = z_C - z_D$

اي $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ و يكافئ $z_A - z_B = -2i$ و $z_C - z_D = -2i$ محققة

ومنه الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع

ج) Eالنقطة من المستوي المركب لاحقتها z_E حيث :

$$\begin{cases} \arg(z_E - z_A) - \arg(z_E - z_B) = \frac{\pi}{2} \\ \left|\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B}\right| = 2 \end{cases}$$

— اثبات ان $z_E = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$

لدينا $\arg(z_E - z_A) - \arg(z_E - z_B) = \frac{\pi}{2}$

يكافئ $\arg\left(\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$ ومنه $\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

ومنه $z_E - z_A = 2i(z_E - z_B)$ ومنه $z_E(1-2i) = z_A - 2iz_B$

نجد $z_E = \frac{2 - i - 4i + 2}{(1-2i)}$ ومنه

$z_E = \frac{4-5i}{(1-2i)} \frac{(1+2i)}{(1+2i)} = \frac{4 - 5i + 8i + 10}{5}$ ومنه $z_E = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$

— اثبات ان A هي صورة B بواسطة S تشابه مباشر يطلب عناصره

لدينا $\frac{z_A - z_E}{z_B - z_E} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $(z_A - z_E) = 2e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_E)$

العلاقة الاخيرة هي صيغة مركبة لتشابه مباشر مركزه ونسبته وزاويته

4) **M** نقطة من المستوي المركب لاحقتها z النقطة **I** منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$

أ) عن z_I لاحقة النقطة **I** لدينا $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{4}{2}$ ومنه $z_I = 2$

ب) α عدد حقيقي نسمي (Γ) مجموعة النقط **M** من المستوي المركب التي تحقق $z - z_I = e^{i\alpha}$

— التحقق ان **E** تنتمي الى المجموعة (Γ) : يعني ان $|z_E - z_I| = 1$

ومنه $|z_E - z_I| = \left|\frac{14}{5} + \frac{3}{5}i - 2\right| = \left|\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right|$ ومنه

ومنه $|z_E - z_I| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}}$ ومنه $|z_E - z_I| = 1$ اذن $E \in (\Gamma)$

— طبيعة المجموعة (Γ) هي دائرة مركزها **I** ذو اللاحقة z_I ونصف قطرها **1**

التمرين رقم 4 **الحل**

الحل: جزء1:

g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = 1 + x^2 + 2\ln x$

1) دراسة تغيرات الدالة g

نهاية الدالة g عند $+\infty$ و عند **0**

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[1 + x^2 + 2\ln x\right] = +\infty$ ومنه

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

و $\lim_{\substack{x\to0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x\to0 \\ >}}\left[1 + x^2 + 2\ln x\right] = -\infty$ ومنه

$\lim_{\substack{x\to0 \\ >}} g(x) = -\infty$

حساب $g'(x)$ ثم عين اشارتها واستنتج اتجاه تغير الدالة g

المشتقة: الدالة g تقبل الاشتقاق ودالتها المشتقة: $g'(x) = 2x + \frac{2}{x}$

ومنه $g'(x) = \frac{2x^2+2}{x}$ ومنه $g'(x) \geq 0$ اذن g متزايدة على $]0;+\infty[$

جدول التغيرات

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

2) بيان ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α ينتمي الى $]0.52;0.53[$

بما ان الدالة g متزايدة على المجال $]0;+\infty[$ ومستمرة فهي رتيبة على المجال $]0;+\infty[$ ما يعني انها كذلك مستمرة ورتيبة على المجال $]0.52;0.53[$

وبما ان $g(0.52) \simeq -0,037$ و $g(0.53) \simeq 0.011$

اي ان $g(0.52) \times g(0.53) \leq 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

$g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α ينتمي الى $]0.52;0.53[$

3) استنتاج اشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

لاحظ الجدول

$g(x) > 0$ على المجال $]\alpha;+\infty[$ و $g(x) < 0$ على المجال $]0;\alpha[$

الحل: جزء2:

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ ب: $f(x) = -x + \frac{3 + 2\ln x}{x}$

1) النهاية $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left[-x + \frac{3+2\ln x}{x}\right]$

ومنه $\lim_{x\to0} \frac{1}{x} \times \left[-x^2 + 3 + 2\ln x\right] = -\infty$ اي $\lim_{x\to0} f(x) = -\infty$

المنحنى (C_f) يقبل محور التراتيب كمقارب

ب) النهاية $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{3+2\ln x}{x}\right] = -\infty$

لان $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

2)

أ) بيان أن من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$ ثم استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

المشتقة : الدالة f تقبل الاشتقاق ودالتها المشتقة :

بوضع $f(x)=-x+\frac{3}{x}+\frac{2\ln x}{x}$ نجد $f'(x)=-1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^2}-\frac{2\ln x}{x^2}$

ومنه $f'(x)=\frac{1}{x^2}\left(-1-x^2-2\ln x\right)$ ومنه $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$

ب) اشارة المشتقة f' من اشارة $-g(x)$

ومنه $f'(x)<0$ على المجال $]\alpha;+\infty[$ اي f متناقصة على $]\alpha;+\infty[$

و $f'(x)>0$ على المجال $]0;\alpha[$ اي f متزايدة على $]0;\alpha[$

جدول تغيرات الدالة f .

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

ج) اثبات ان $f(\alpha)=2\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)$

لدينا $g(\alpha)=1+\alpha^2+2\ln(\alpha)$ ومنه $2\ln(\alpha)=-\left(1+\alpha^2\right)$

لان $g(\alpha)=0$ ولدينا $f(\alpha)=-\alpha+\frac{3+2\ln(\alpha)}{\alpha}$ ومنه

$f(\alpha)=-\alpha+\frac{3-\left(1+\alpha^2\right)}{\alpha}$ اي $f(\alpha)=-\alpha+\frac{2-\alpha^2}{\alpha}$

ومنه $f(\alpha)=\frac{-2\alpha^2+2}{\alpha}=-2\alpha+\frac{2}{\alpha}$ ومنه $f(\alpha)=2\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)$

ايجاد حصر ل $f(\alpha)$

لدينا $0.52<\alpha<0.53$ ومنه $-1.06<-2\alpha<-1.04 ...\boxed{1}$

لدينا $0.52<\alpha<0.53$ ومنه $3.77<\frac{2}{\alpha}<3,84...\boxed{2}$

بجمع (1) و(2) طرف لطرف نجد $2.71<f(\alpha)<2.80$

3)

أ) لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+2\ln x}{x}=0$

ومنه $(\Delta): y=-x$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ب) الوضع النسبي بين (C_f) و(Δ)

لدينا $f(x)-y=\frac{3+2\ln x}{x}$ ومنه $f(x)-y=0$ يعني ان

$3+2\ln x=0$ ومنه $x=e^{\frac{-3}{2}}$

x	0		$e^{\frac{-3}{2}}$		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	

لما $x=e^{\frac{-3}{2}}$ فان المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) يتقاطعان

لما $x\in\left]0;e^{-3/2}\right[$ المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ)

لما $x\in\left]e^{-3/2};+\infty\right[$ المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ)

ج) معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) الموازي ل (Δ)

يعني ان $f'(x)=-1$

$f'(x)=-1$ يكافئ $\frac{1}{x^2}\left(-1-x^2-2\ln x\right)=-1$ اي $\ln x=-\frac{1}{2}$

ومنه $x=e^{-\frac{1}{2}}$ اذن $(T): y=f'(e^{-\frac{1}{2}})\left(x-e^{-\frac{1}{2}}\right)+f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$

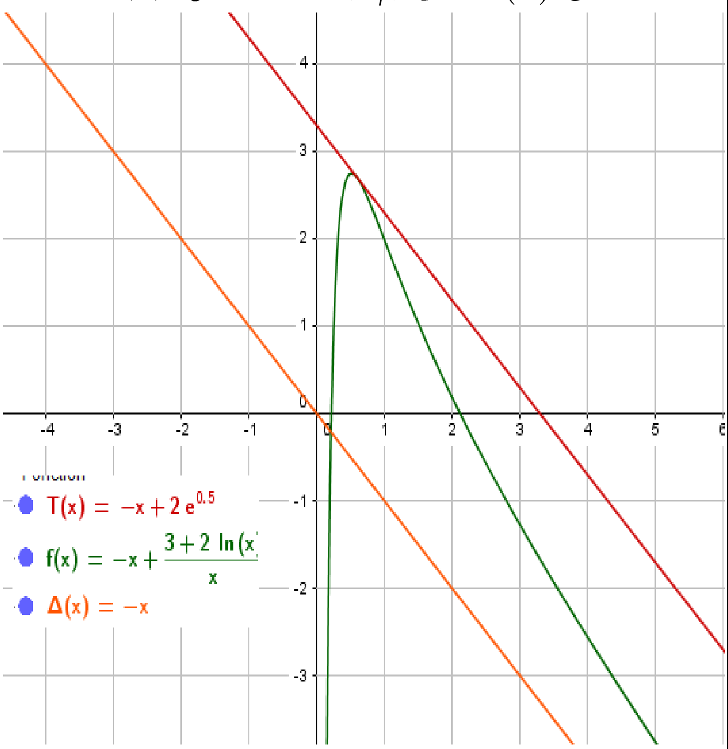
لدينا $f(e^{-\frac{1}{2}})=-e^{-\frac{1}{2}}+2e^{\frac{1}{2}}$ و $f'\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=-1$

ومنه $(T): y=-x+2e^{\frac{1}{2}}$

4) تعطى فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل

$0.22<x_0<0.23$ و $2,11<x_0<2,13$

الأنشاء المماس (T) المنحنى (C_f) المقارب المائل (Δ)



5) m وسيط حقيقي

المناقشة حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $3+2\ln x-mx=0$

ومنه $m=\frac{3+2\ln x}{x}$ ومنه $-x+m=-x+\frac{3+2\ln x}{x}$ اي $f(x)=-x+m$

الحلول هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=-x+m$ المناقشة مائلة

لما $m\in]-\infty;0[$ اي (C_f) يقطع (Δ_m) في نقطة المعادلة تقبل حل وحيد

لما $m\in]0;2e^{1/2}[$ اي (C_f) يقطع (Δ_m) في نقطتين المعادلة تقبل حلين

لما $m=2e^{1/2}$ اي (C_f) يقطع (Δ_m) في نقطة المعادلة تقبل حل وحيد

لما $m\in]2e^{1/2};+\infty[$ اي (C_f) لا يقطع (Δ_m) المعادلة لا تقبل حلول

الحلول بالالوان

الحل: جزء3:

من اجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left[f(x)+x\right]dx$

1) اثبات ان من أجل كل عدد طبيعي n فان $u_n>0$

لدينا $f(x)+x=\frac{3+2\ln x}{x}$ من اجل $x\in]0;+\infty[$ فان $\frac{3+2\ln x}{x}>0$ وبما ان $e^{n+1}>e^n$ فان $u_n>0$

2) التفسير الهندسي للعدد $u_0=\int_1^e\left[f(x)+x\right]dx$

هي المساحة المحصورة بين النحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

والمستقيمات ذات المعادلة $x=1$ و $x=e$

3) حساب u_n بدلالة n

$$u_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left[\frac{3+2\ln x}{x}\right]dx=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{3}{x}dx+\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{2\ln x}{x}dx$$

ومنه $u_n=\left[3\ln x\right]_{e^n}^{e^{n+1}}+\left[(\ln x)^2\right]_{e^n}^{e^{n+1}}$ ومنه

ومنه $u_n=3(n+1)-3n+(n+1)^2-n^2$ ومنه $u_n=2n+4$

4) حساب $S_n=u_0+u_1+....+u_n$

لدينا $u_n=2n+4$ صيغة متتالية حسابية اساسها 2 وحدها الاول 4

ومنه عدد الحدود $n+1$

ومنه $S_n=(n+1)\frac{4+2n+4}{2}$ ومنه $S_n=(n+1)(n+4)$

التمرين رقم 1 الحل

1) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$،
لتكن النقط $A(1;0;3)$، $B(1;2;4)$ و $C(0;0;2)$، $D(3;4;1)$

أ) تعيين $\alpha;\beta$ حتى يكون $\vec{u}(2;\alpha;-\beta)$ ناظمي للمستوي (ABC)
لدينا $\overrightarrow{AB}(0;2;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;0;-1)$ اساس (ABC)
لأنهما مستقلان خطيا أي $\frac{-1}{1}\neq\frac{0}{2}$ النقط $A;B;C$ تشكل مستو
ومنه $\begin{cases}\vec{u}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{u}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}2\alpha-\beta=0\\ -2+\beta=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=2\end{cases}$
اذن $\vec{u}(2;1;-2)$

ب) معادلة ديكارتية ل (ABC) شعاعه الناظمي $\vec{u}(2;1;-2)$ ويشمل $A(1;0;3)$ هي $(ABC):2x+y-2z+d=0$ حيث $d=4$
ومنه $(ABC):2x+y-2z+4=0$

2) ليكن المستويين ذو المعادلتين الديكارتيتين
$(p):x+z-2=0$ و $(Q):2x+y-2z+4=0$

أ) اثبات ان (p) و (Q) متعامدان
يعني ان $\vec{n}_{(p)}(1;0;1)$ و $\vec{n}_{(Q)}(2;1;-2)$ متعامدان ومنه
$\vec{n}_{(p)}.\vec{n}_{(Q)}=2-2=0$ ومنه (p) و (Q) متعامدان

ب) تمثيل وسيطي ل (Δ) مستقيم تقاطع (p) و (Q)
لدينا $\begin{cases}(p):x+z-2=0\\ (Q):2x+y-2z+4=0\end{cases}$ ومنه من اجل t وسيط حقيقي
نضع $x=t$ ومنه $z=2-t$ و $y=-4t$
ومنه $t\in\mathbb{R}$ $(\Delta):\begin{cases}x=t\\ y=-4t\\ z=2-t\end{cases}$

ج) المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ)
لتكن $H(x;y;z)$ مسقط D على المستقيم (Δ) ومنه $\vec{u}_{(\Delta)}.\overrightarrow{DH}=0$
لدينا $\vec{u}_{(\Delta)}(1;-4;-1);\overrightarrow{DH}(t-3;-4t-4;1-t)$ اذن
$\vec{u}_{(\Delta)}.\overrightarrow{DH}=0$ يكافئ $t-3+16t+16+t-1=0$ أي $t=-\frac{2}{3}$
ومنه $\overrightarrow{DH}\left(\frac{-11}{3};\frac{-4}{3};\frac{5}{3}\right)$
ومنه $DH=\sqrt{\left(\frac{-11}{3}\right)^2+\left(\frac{-4}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2}$ أي $DH=\sqrt{\frac{162}{9}}$
المسافة بين D والمستقيم (Δ) هي $d(D;(\Delta))=18$

3) (S) سطح كرة مركزها $D(3;4;1)$ وتمس المستوي (Q)
أي نصف قطرها هو $r=d(D;(Q))$
ومنه $r=\frac{|2(3)+1(4)-2(1)+4|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{12}{3}$ ومنه $r=4$

أ) معادلتها الديكارتية هي
$(S):(x-3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=16$

ب) طبيعة وعناصر تقاطع (Q) و (p)
لدينا $d(D;(p))=\frac{|1(3)+1(1)-2|}{\sqrt{1+1}}$ أي $d(D;(p))=\sqrt{2}$
بما ان $\sqrt{2}<2$ أي $d(D;(p))<r$
فان (Q) و (p) يتقاطعان وفق دائرة (C) نصف قطرها R حيث
$R=\sqrt{r^2-d(D;(p))^2}$ ومنه $R=\sqrt{14}$
مركز الدائرة (C) هو $w(x;y;z)$ مسقط D على (p)
المستقيم (wD) شعاع توجيهه هو $\vec{n}_{(p)}(1;0;1)$ ناظم المستوي (p)
ومنه تمثيل وسيطي ل (wD) الذي يشمل D هو $\begin{cases}x=3+k\\ y=4.....k\in\mathbb{R}\\ z=1+k\end{cases}$
بما ان $w\in(p)$ حيث $w(3+k;4;1+k)$ فان
$3+k+1+k-2=0$ أي $k=-1$ ومنه $w(2;4;0)$ مركز (C)

4) λ عدد حقيقي , G_λ نقطة من الفضاء حيث
$2\overrightarrow{G_\lambda A}-\overrightarrow{G_\lambda B}+e^\lambda\overrightarrow{G_\lambda C}=\vec{0}$

أ) تعيين (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق
$(1+e)\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+e\overrightarrow{MC}\right\|$
العلاقة $2\overrightarrow{G_\lambda A}-\overrightarrow{G_\lambda B}+e^\lambda\overrightarrow{G_\lambda C}=\vec{0}$ تبين ان G_λ مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,-1);(C;e^\lambda)\}$
ومنه من أجل $\lambda=0$
G_0 مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,-1);(C;1)\}$
ومنه من اجل M نقطة من الفضاء $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG_0}$
اذن $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2MG_0$
ومنه من أجل $\lambda=1$
G_1 مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,-1);(C;e)\}$
ومنه اجل M نقطة من الفضاء $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+e\overrightarrow{MC}=(1+e)\overrightarrow{MG_1}$
اذن $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+e\overrightarrow{MC}\right\|=(1+e)MG_1$

ومنه $(1+e)\|2\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\| = 2\|2\vec{MA}-\vec{MB}+e\vec{MC}\|$

يكافئ $(1+e)2MG_0 = 2(1+e)MG_1$ ومنه $MG_0 = MG_1$

(Γ) مجموعة النقط M من الفضاء هي مستوي محور القطعة $[G_0G_1]$

ب) H مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,-1)\}$

كتابة $\vec{CG_\lambda}$ بدلالة $\vec{CH}$

لدينا H مرجح يعني ان $2\vec{HA}-\vec{HB}=\vec{0}$

ولدينا $2\vec{G_\lambda A}-\vec{G_\lambda B}+e^\lambda\vec{G_\lambda C}=\vec{0}$ ومنه

$2\vec{G_\lambda A}-\vec{G_\lambda B}+e^\lambda\vec{G_\lambda C}=2\vec{HA}-\vec{HB}$

ومنه $e^\lambda\vec{G_\lambda C}=2(\vec{HA}-\vec{G_\lambda A})-\vec{HB}+\vec{G_\lambda B}$ ومنه

$e^\lambda\vec{G_\lambda C}=2(\vec{HG_\lambda})+\vec{G_\lambda H}$ ومنه $e^\lambda\vec{CG_\lambda}=\vec{G_\lambda H}$

ومنه $e^\lambda\vec{CG_\lambda}=\vec{G_\lambda C}+\vec{C_\lambda H}$ وبالتالي $e^\lambda\vec{CG_\lambda}+\vec{CG_\lambda}=\vec{C_\lambda H}$

نجد $\boxed{\vec{CG_\lambda}=\frac{1}{(e^\lambda+1)}\vec{CH}}$

ج) تعيين مجموعة النقط G_λ لما يتغير λ في المجموعة $\mathbb{R}$

لدينا $\vec{CG_\lambda}=\frac{1}{(e^\lambda+1)}\vec{CH}$ ومنه النقط $C;G_\lambda;H$ في استقامية

وبما ان $\frac{1}{(e^\lambda+1)}>0$ يعني ان G_λ تتوسط $[CH]$

ومنه مجموعة النقط G_λ لما يتغير λ في المجموعة $\mathbb{R}$ هي لقطعة المستقيمة $[CH]$ باستثناء النقطتين C و H

د) قيم λ حيث G_λ منتصف القطعة $[CH]$

G_λ منتصف القطعة $[CH]$ أي ان $\vec{CG_\lambda}=\frac{1}{2}\vec{CH}$

ولدينا $\vec{CG_\lambda}=\frac{1}{(e^\lambda+1)}\vec{CH}$

ومنه $\frac{1}{2}=\frac{1}{(e^\lambda+1)}$ أي $e^\lambda=1$ ومنه $\boxed{\lambda=0}$

التمرين رقم 2 الحل

I.

1) حلول المعادلة $z^2 2z+2=0$ في $\mathbb{C}$.

معادلة من الدرجة الثانية ومنه $\Delta=-4$

ومنه نجد $z_C=1+i$ ، $z_D=1-i$

2) ايجاد العددين المركبين z_1 و z_2 حيث $\begin{cases}2z_1-3z_2=5i\sqrt{2}....(1)\\ z_1+3z_2=-2i\sqrt{2}...(2)\end{cases}$ ،

بجمع (1) و (2) نجد $z_1=i\sqrt{2}$

نعوض في (2) نجد $z_2=-i\sqrt{2}$

II. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط A ، B و D,C ,H لواحقها على الترتيب

$z_A=i\sqrt{2}$ ، $z_B=-i\sqrt{2}$ ، $z_C=1+i$, $z_D=1-i$, $z_H=\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}$

حيث **E** تحقق: $\vec{DE}=2\vec{DO}$

1) كتابة z_H على الشكل الأسي واستنتاج طبيعة المثلث **BEC**

E تحقق: $\vec{DE}=2\vec{DO}$ يعني ان : $z_E-z_D=-2z_D$

ومنه $z_D=-z_E$ أي $\boxed{z_E=-1+i}$

ومنه $z_H=\frac{1+i+i\sqrt{2}}{-1+i+i\sqrt{2}}$ أي $z_H=\frac{1+i(1+\sqrt{2})}{-1+i(1+\sqrt{2})}$

ومنه $z_H=\frac{1+i(1+\sqrt{2})}{-1+i(1+\sqrt{2})}\left(\frac{-1-i(1+\sqrt{2})}{-1-i(1+\sqrt{2})}\right)$

نجد $z_H=\frac{1+2i(1+\sqrt{2})-(3+2\sqrt{2})}{4+2\sqrt{2}}$ ومنه

$z_H=\frac{i(1+\sqrt{2})-(1+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}}$ ومنه $z_H=\frac{(1-i)(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}$

نجد $\boxed{z_H=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}$

ومنه

$z_H=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $|z_H|=1$ و

$\arg(z_H)\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ $\theta=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$

ومنه الشكل الاسي هو $\boxed{z_H=e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

لدينا $z_H = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ومنه $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$

ومنه $\left|\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right| = 1$ اي ان $BC = BE$

و $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right) = -\frac{\pi}{4}$ أي $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BE}\right) = -\frac{\pi}{4}$

ومنه المثلث **BEC** متساوي الساقين

2) **S** تحويل نقطي يرفق بكل **M** لاحقتها **z** النقطة **M`** لاحقتها **z`** حيث:

$z' = z_A z + z_B$

أ) لدينا $z' = z_A z + z_B$ يكافئ $(S): z' = \left(i\sqrt{2}\right)z - i\sqrt{2}$

ونعلم ان صيغة تحويل مركب هي $(S): z' = az + b$

بما ان $a = \left(i\sqrt{2}\right)$ اي $a = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ فان :

S تشابه مباشر مركزه **w** وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ونسبته $k = \sqrt{2}$

لدينا $z_w = \frac{-i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{2}}$ ومنه $z_w = \frac{2 - i\sqrt{2}}{3}$ اي $z_w = \frac{2}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{3}$

ب) مساحة الدائرة (γ) التي مركزها C و قطرها CD

لدينا $CD = |z_D - z_C|$ ومنه $CD = |1 - i - 1 - i|$ ومنه $CD = 2$

ومنه $S_{(\gamma)} = \pi r^2$ اي $S_{(\gamma)} = 4\pi$...us

ج) تعيين (γ') صورة (γ) بواسطة التشابه **S**

لدينا C' لاحقتها $z_{C'}$ مركز (γ') نظيرة C بواسطة **S** هي :

$z_{C'} = \left(i\sqrt{2}\right)z_C - i\sqrt{2}$ ومنه $z_{C'} = -\sqrt{2}$

و بما ان نصف قطر (γ) هو $r = CD = 2$

فان r' هو نصف قطر (γ') حيث : $r' = |k|r$ ومنه $r' = 2\sqrt{2}$

مساحة (γ') هي $S_{(\gamma')}$ حيث : $S_{(\gamma)} = k^2 S_{(\gamma')}$

ومنه $S_{(\gamma)} = 8\pi$...us

3) تعيين (δ) مجموعة النقط M من المستوي (**M** تختلف عن **B** و**C**)

ذات اللاحقة **z** حيث $\frac{z_B - z}{z_C - z}$ حقيقي سالب

$\frac{z_B - z}{z_C - z}$ حقيقي سالب يعني ان $\frac{z_B - z}{z_C - z} = ke^{i\pi}$

ومنه $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2\pi k$

مجموعة النقط (δ) هي القطعة $[BC]$ المستقيمة عدا النقطتين B و C

التمرين رقم 3 الحل

(1

أ) بواقي قسمة 3^n على 11 حيث n عدد طبيعي

n	0	1	2	3	4	5
r	1	3	9	5	4	1

عملية القسمة دورية دورها 5 ونكتب $3^{5k} \equiv 1[11]$

اذن بواقي قسمة 3^n على 11 حيث n عدد طبيعي كما يلي

n	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
r	1	3	9	5	4

بواقي قسمة 7^n على 11 حيث n عدد طبيعي

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8	1

عملية القسمة دورية دورها 10 ونكتب $7^{10k} \equiv 1[11]$

اذن بواقي قسمة 7^n على 11 حيث n عدد طبيعي كما يلي

$n = 10k+$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8

ب) اثبات ان من اجل كل n عدد طبيعي

العدد: $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4} \equiv 0[11]$

لدينا $2016 \equiv 3[11]$ ومنه $2016^{5n+4} \equiv 3^{5n+4}[11]$ ومنه

$2016^{5n+4} \equiv 4[11]$

لدينا $1437 \equiv 7[11]$ ومنه $1437^{10n+4} \equiv 7^{10n+4}[11]$ ومنه

$1437^{10n+4} \equiv 3[11]$

ومنه $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4} \equiv 2 \times 4 + 3[11]$

أي $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4} \equiv 11[11]$

ومنه $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4} \equiv 0[11]$

2) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ ب: $7x - 3y = 8$

أ) ايجاد الحل الخاص $(x_0;y_0)$

نلاحظ ان $(2;2)$ حل خاص

بالتعويض في المعادلة نجد $7(2) - 3(2) = 14 - 6 = 8$

ومنه $(x_0;y_0) = (2;2)$ حل خاص للمعادلة (E)

حل المعادلة (E) لدينا

$\begin{cases} 7x - 3y = 8.....(1) \\ 7x_0 - 3x_0 = 8..(2) \end{cases}$ بطرح (2) من (1) نجد $7(x - x_0) = 3(y - y_0)$

لدينا 7 و 3 اوليان فيما بينهما ومنه 7 يقسم $3(y - y_0)$ اذن

$(y-y_0)=7k$ ومنه $y=7k+y_0$ نجد اذن $y=7k+2$

لدينا 7 و 3 اوليان فيما بينهما ومنه 3 يقسم $7(x-x_0)$ اذن

$(x-x_0)=3k$ ومنه $x=3k+x_0$ نجد اذن $x=3k+2$

ومنه حلول المعادلة (E) هي

$\{(x;y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \ / \ (3k+2;7k+2) \ / k\in\mathbb{N}\}$

ب) d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E)

– القيم المكنة لـ d

$PGCD(x;y)=d$ اي $PGCD(7k+2;3k+2)=d$

حسب خوارزمية اقليدس

$7k+2=2(3k+2)+(k-2)$

$7k+2$	$3k+2$
$6k+4$	2
$k-2$	

$3k+2$	$k-2$
$3k-6$	3
8	

و منه $PGCD(3k+2;k-2)=d$

يعني $3k+2=3(k-2)+8$

ومنه $PGCD(k-2;8)=d$

بما ان $d/8$ و $d/k-2$

فان $d/4(k-2)+1\times 8$ ومنه $d/4k$ اذن $d/4$

ومنه $PGCD(k-2;8)=d$ قيم d هي قواسم 4

– تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) حيث $d=4$

لدينا $PGCD(k-2;8)=4$ ومنه بوضع $k-2=4t$

يكون $PGCD(4t;8)=4PGCD(t;2)=4$ ومنه $PGCD(t;2)=1$

اي ان $t;2$ اوليان فيما بينهما ومنه $t=2\alpha+1$

ومنه $k=4t+2$ اي ان $k=8\alpha+6$ حيث

يعني ان $\{(x;y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \ / \ (56\alpha+44;24\alpha+20) \ / \alpha\in\mathbb{N}\}$

هي حلول المعادلة (E) حيث $d=4$

ج) تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) حيث

$2016^{7x}+1437^{3y}\equiv 0[11]$

ومنه $\{(x;y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \ / \ (3k+2;7k+2) \ / k\in\mathbb{N}\}$

لدينا $2016\equiv 3[11]$ ومنه $2016^{7x}\equiv 3^{7x}[11]$

لدينا $1437\equiv 7[11]$ ومنه $1437^{3y}\equiv 7^{3y}[11]$

اي ان $2016^{7x}+1437^{3y}\equiv 0[11]$ يكافئ $3^{21k+14}+7^{21k+6}\equiv 0[11]$

ومنه $3^{4(5k+3)+k+2}+7^{2(10k+3)+k}\equiv 0[11]$

تكافئ $3^{4(5k+3)}\times 3^{k+2}+7^{2(10k+3)}\times 7^{k}\equiv 0[11]$

تكافئ $4\times 3^{k}+4\times 7^{k}\equiv 0[11]$ ومنه

$4(3^{k}+7^{k})\equiv 0[11]$ ومنه $(3^{k}+7^{k})\equiv 0[11]$

أي البواقي التي مجموعها مضاعف 11 هي مع نفس الترتيب

n	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$	$5k+5$
r	1	3	9	5	4	1

$n=10k+$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8

ومنه $k=10\lambda+5$

الحلول هي $\{(x;y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \ / \ (30\lambda+17;70\lambda+37) \ / \lambda\in\mathbb{N}\}$

التمرين رقم 4 الحل

الحل: جزء 1:

φ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\varphi(x)=(x^2-x+1)e^{-x+1}-1$

1) دراسة تغيرات الدالة

أ) نهاية الدالة φ عند $+\infty$ و عند $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2-x+1)e^{-x+1}-1=+\infty$

ومنه $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=+\infty$

و ح ع ت $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2-x+1)e^{-x+1}-1$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2e^{-x+1}-xe^{-x+1}+e^{-x+1}-1)=-1$

لان $\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-x+1}=0; \lim_{x\to+\infty}xe^{-x+1}=0$ خواص

ومنه $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=-1$

ب) احسب $\varphi'(x)$ ثم عين اشارتها واستنتج اتجاه تغير الدالة φ

المشتقة: الدالة φ تقبل الاشتقاق ودالتها المشتقة:

$\varphi'(x)=(2x-1)e^{-x+1}-(x^2-x+1)e^{-x+1}$

ومنه $\varphi'(x)=(-x^2+3x-2)e^{-x+1}$

$\varphi'(x)=0$ يعني ان $-x^2+3x-2=0$ نجد حلي المعادلة $x=1$ و $x=2$ ومنه جدول الاشارة

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	0	+	0	-	

ومنه $\varphi'(x)\geq 0$ لما $x\in[1;2]$ ومنه φ متزايدة على المجال $[1;2]$

$\varphi'(x)\leq 0$ لما $x\in]-\infty;1]\cup[2;+\infty[$ ومنه الدالة φ متناقصة على المجال $x\in]-\infty;1]\cup[2;+\infty[$

جدول التغيرات الدالة φ

x	$-\infty$		1		2		α		$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	0	+	0	-		-	
$\varphi(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$3/e-1$	↘	0	↘	-1

لدينا $\varphi(1)=\left(1^2-1+1\right)e^{-1+1}-1=0$

و $\varphi(2)=\left(2^2-2+1\right)e^{-2+1}-1=3/e-1$

2) بيان ان المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل حل وحيد α ينتمي الى $]2.79;2.80[$

بما ان الدالة φ متناقصة على المجال $]2;+\infty[$ ومستمرة فهي رتيبة على المجال $]2;+\infty[$ ما يعني انها كذلك مستمرة ورتيبة على المجال $]2.79;2.80[$

وبما ان $\varphi(2.79)\simeq 0.001$ و $\varphi(2.8)\simeq -0.001$

اي ان $\varphi(2.79)\times\varphi(2.8)\leq 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $\varphi(x)=0$ تقبل حل وحيد α ينتمي الى $]2.79;2.80[$

أ) استنتاج اشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$

لاحظ الجدول

$\varphi(x)\geq 0$ على المجال $]-\infty;\alpha[$ و

$\varphi(x)<0$ على المجال $]\alpha;+\infty[$

الحل: جزء2:

الدالة f و g عدديتان معرفتان على المعرفة على $\mathbb{R}$

بـ: $f(x)=(2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$

1)

أ) النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(2x-1)e^{-x+1}\right]=-\infty$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

النهاية : ح ع ت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(2x-1)e^{-x+1}\right]$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2xe^{-x+1}-\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+1}=0$

لان $\lim\limits_{x\to+\infty} 2xe^{-x+1}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f .

المشتقة : الدالة f تقبل الاشتقاق ودالتها المشتقة :

$f'(x)=2e^{-x+1}-(2x-1)e^{-x+1}$ ومنه $f'(x)=(-2x+3)e^{-x+1}$

اشارة المشتقة f' من اشارة $-2x+3$ ومنه $-2x+3=0$ أي $x=3/2$

f متزايدة على المجال $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$ ومتناقصة على المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	--	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(3/2)$	↘	0

$f(\frac{3}{2})=(3-1)e^{-\frac{1}{2}}$ ومنه $f(\frac{3}{2})=2e^{-\frac{1}{2}}$

2) اثبات ان ل (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا في النقطة ذات الفاصلة 1

يعني ان $f'(1)=g'(1)$

لدينا الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي

$$g'(x)=\frac{2\left(x^2-x+1\right)-(2x-1)(2x-1)}{\left(x^2-x+1\right)^2}$$ ومنه

$$g'(x)=\frac{-2x^2+2x+1}{\left(x^2-x+1\right)^2}$$

لدينا $g'(1)=\dfrac{-2+2+1}{(1-1+1)^2}$ اي $g'(1)=1$

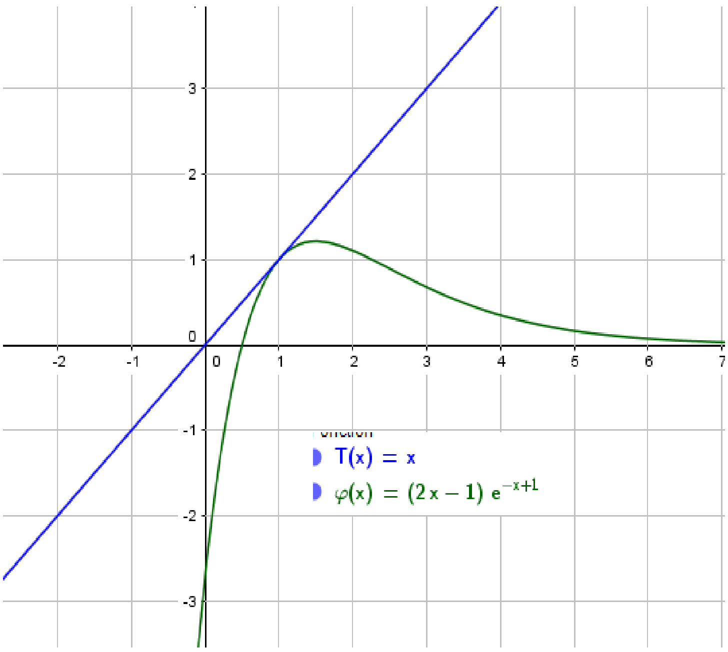
ولدينا $f'(1)=(-2+3)e^{-1+1}$ اي $f'(1)=1$

ومنه ل (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا في النقطة ذات الفاصلة 1

معادلته $(T): y=(x-1)+f(1)$ ومنه $f(1)=1$

$(T): y=x$

3) الأنشاء (C_f) و (T)



4)

أ) اثبات ان من اجل كل عدد x حقيقي فان:

$$f(x)-g(x)=\frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$$

لدينا $f(x)-g(x)=(2x-1)e^{-x+1}-\frac{2x-1}{x^2-x+1}$ توحيد المقامات

ينتج $f(x)-g(x)=\frac{(2x-1)e^{-x+1}(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$

ومنه $f(x)-g(x)=\frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$

ب) دراسة اشارة الفرق $f(x)-g(x)$ على $\mathbb{R}$ والوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_g)

لدينا اشارةالفرق من اشارة $\frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$

ومنه جدول الاشارة:

x	$-\infty$		$1/2$		0		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		+		+		+	0	-	
$2x-1$		-	0	+		+		+	
x^2-x+1		-	0	+	0	+	0	-	

الوضع النسبي

عند الفواصل $1/2$ و α و 0 (C_f) و (C_g) يتقاطعان

لما $x\in]-\infty;1/2[\cup]\alpha;+\infty[$ المنحنى (C_f) يقع تحت المنحنى (C_g)

لما $x\in]1/2;\alpha[$ المنحنى (C_f) يقع فوق المنحنى (C_g)

ج) باستعمال المكاملة بالتجزئة حساب بدلالة x $\int_1^x[f(t)]dt$

ومنه $\int_1^x[f(t)]dt=\int_1^x\left((2t-1)e^{-t+1}\right)dt$

حيث u و v دوال معرفة على $\mathbb{R}$

و بوضع $u(t)=2t-1$ و $v'(t)=e^{-t+1}$

ومنه $u'(t)=2$ و $v(t)=-e^{-t+1}$

ومنه $\int_1^x[f(t)]dt=\left[(1-2t)e^{-t+1}\right]_1^x-\int_1^x\left(-2e^{-t+1}\right)dt$

ومنه $\int_1^x[f(t)]dt=\left[(1-2t)e^{-t+1}\right]_1^x-\left[2e^{-t+1}\right]_1^x$

$$\int_1^x[f(t)]dt=(1-2x)e^{-x+1}+1-2e^{-x+1}+2$$

د) مساحة الحيز المحدد بين (C_f) و (C_g) والمستقيمات $x=1$ و $x=2$

هي A حيث :

على المجال $]1/2;\alpha[$ المنحنى (C_f) يقع فوق المنحنى (C_g) ومنه :

ومنه $A=\int_1^2[f(x)-g(x)]dx$

$$A=\int_1^2[f(x)]dx-\int_1^2[g(x)]dx$$

اولا $\int_1^2[f(x)]dx$

ومنه بما ان $\int_1^x[f(t)]dt=(1-2x)e^{-x+1}+1-2e^{-x+1}+2$

فان $\int_1^2[f(t)]dt=(1-4)e^{-1}+1-2e^{-1}+2$ ومنه

$$\int_1^2[f(x)]dx=\frac{-5}{e}+3$$

ثانيا $\int_1^2[g(x)]dx$

ومنه $\int_1^2[g(x)]dx=\int_1^2\left[\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right]dx$

اذن $\int_1^2[g(x)]dx=\left[\ln(x^2-x+1)\right]_1^2$

$$\int_1^2[g(x)]dx=\ln 3$$

ومنه $A=\frac{-5}{e}+3-\ln 3$ اي $A=0,062...ua$

الحل: جزء3:

1) حساب $f''(x)$ و $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$

لدينا f' تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه $f'(x)=(-2x+3)e^{-x+1}$

اي $f''(x)=-2e^{-x+1}-(-2x+3)e^{-x+1}$ ومنه $f''(x)=(2x-5)e^{-x+1}$

لدينا f'' تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه $f''(x)=(2x-5)e^{-x+1}$

اي $f^{(3)}(x)=2e^{-x+1}-(2x-5)e^{-x+1}$ ومنه $f^{(3)}(x)=(-2x+7)e^{-x+1}$

لدينا $f^{(3)}$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه $f^{(3)}(x)=(-2x+7)e^{-x+1}$

اي $f^{(4)}(x)=-2e^{-x+1}-(-2x+7)e^{-x+1}$ ومنه $f^{(4)}(x)=(2x-9)e^{-x+1}$

ومنه التخمين هو $f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{-x+1}$

2) برهان بالتراجع أن $f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{-x+1}$

لدينا بفرض $p(n)$ خاصية حيث

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{-x+1}$$

من اجل $n=1$ فان $f'(x)=(-2x+3)e^{-x+1}$ ومنه $p(1)$ صحيحة

بفرض الخاصية $p(n)$ صحيحة من اجل n أي

$f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{-x+1}$ ولنفرض صحة الخاصية

$p(n+1)$ من اجل أي ان $n+1$ أي ان

$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}\left[2x-(2n+3)\right]e^{-x+1}$

البرهان : نعلم ان $f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{-x+1}$

$f^{(n)}$ تقبل الاشتقاق ومنه

$f^{(n)\prime}(x)=2(-1)^n e^{-x+1}-(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{-x+1}$

ومنه $f^{(n)\prime}(x)=(-1)^n e^{-x+1}\left[2-2x+(2n+1)\right]$

ومنه $f^{(n)\prime}(x)=(-1)(-1)^n e^{-x+1}\left[2x-(2n+3)\right]$

ومنه الخاصية $p(n+1)$ صحيحة اذن

$f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{-x+1}$

3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n

غير معدوم ب $u_n=f^{(n)}(1)$

ومنه $u_n=(-1)^n(-2n+1)$

أ) حساب بدلالة k العدد الطبيعي غير المعدوم المجموع

u_k+u_{k+1} ومنه $u_k+u_{k+1}=(-1)^k(-2k+1)+(-1)^k(2k+1)$

ومنه $u_k+u_{k+1}=2(-1)^k$

ب) المجموع $S_n=u_1+u_2+....+u_{2n}$ بدلالة n

عدد الحدود هو $2n$

ومنه $S_n=u_1+u_2+u_3+u_3+....u_{2n-1}+u_{2n}$

اي $S_n=u_1+u_2+u_3+u_4+....u_{2n-1}+u_{2n}$ يكافئ

$S_n=2(-1)^1+2(-1)^3+....+2(-1)^{2n}$ يكافئ

$S_n=2(-1)^1+2(-1)^3+....+2(-1)^n$

ومنه $S_n=-2n$

لدينا $A=\int_1^2[f(x)]dx=\int_1^2(1+(x-1)\ln(x+1))dx$

ومنه $A=[x]_1^2+\left[\frac{1}{2}(x^2-2x-3)\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x\right]_1^2$

ومنه $A=1+\frac{-3}{2}\ln(3)-1+3-(-2\ln 2)-\frac{5}{4}$

ومنه $A\simeq 1.50u.a$

نهاية الحل