عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأول: (04,5 نقطة)		
1) أ) $\overrightarrow{AB}(1;-2;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-1;1)$ غير مرتبطين خطيا	0,25	04,5
ب) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ و $x+3y+5z-4=0$ معادلة للمستوي (ABC).	0,75	
2) أ) $(P):x+3y+z-6=0$ و الشعاعين $\vec{n}$ و $\vec{n}_P$ غير مرتبطين خطيا.	0,25×2	
ب) $D\in(\Delta)$ و $\vec{u}$ شعاع توجيه له.	0,50×2	
ج) $(\lambda\in\mathbb{R})$ ، $(\Delta)\begin{cases}x=-3\lambda+\frac{1}{2}\\ y=\lambda+2\\ z=-\frac{1}{2}\end{cases}$.	0,25	
د) $(H\in(\Delta))$ و $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$ و $d(A;(\Delta))=AH=\frac{\sqrt{14}}{4}$.	0,75	
3) أ) $G(-6;5;-1)$.	0,25	
ب) $(\Gamma):x^2+y^2+z^2+6x-6y-7=0$.	0,25	
$(\Gamma):(x+3)^2+(y-3)^2+z^2=25$.	0,25	
(Γ) سطح كرة مركزها $\Omega(-3;3;0)$ و نصف قطرها 5.		
ج) $d(\Omega;(ABC))=\frac{2}{\sqrt{35}}$ و $\frac{2}{\sqrt{35}}<5$ ، (Γ) يقطع (ABC) وفق دائرة.	0,25	
التمرين الثاني: (04,5 نقطة)		02,75
1) u_1 و u_2 حلا المعادلة $x^2-e^4\left(1+e^3\right)x+e^{11}=0$ ، $\Delta=\left[e^4\left(e^3-1\right)\right]^2$	0,50	
$u_1=e^4$ و $u_2=e^7$ و $q=e^3$ منه $u_1<u_2$	0,25	
2) أ) $u_n=e^{3n+1}$.	0,50	
ب) $S_n=\frac{(n+1)(3n+2)}{2}$.		
3) أ) $2S_n=a_n(3n-4)+14$.	0,50	
تبيان أن: $PGCD(2S_n,a_n)=PGCD(a_n,14)$.	0,25	
ب) القيم الممكنة لـ $PGCD(2S_n,a_n)$ هي 1 ، 2 ، 7 ، 14.	0,75	
ج) $n=14k+4$ و $k\in\mathbb{N}$.		

www.ency-education.com

عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
4. $\forall k \in \mathbb{N}$: | n | $3k$ | $3k+1$ | $3k+2$ | | الباقي | 1 | 2 | 4 |	0,50	01,75
5. $n=35p$ حيث $p \in \mathbb{N}$	0,75	
6. $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0[7]$.	0,50	
التمرين الثالث: (04,5 نقطة)		04,5
1.1) $z_1 = 2+i$ و $z_2 = 2-i$.	0,50	
ب) $z' = 1+i\sqrt{3}$ و $z'' = 1+i\left(\sqrt{3}-2\right)$	0,50	
1.2) $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.	0,25	
ب) $\theta = \frac{\pi}{12}$.	0,50	
جـ) $\left[\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right]^n = \cos\left(\frac{5n\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right)$.	0,25	
د) $n = 24p$ و $p \in \mathbb{N}$.	0,50	
1.3) $z_D = 1+i\left(\sqrt{3}-2\right)$	0,25	
ب) الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.	0,25	
جـ) $z_E = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$.	0,50	
- التشابه المباشر مركزه E نسبته 2 و $\frac{\pi}{2}$ زاوية له.	0,25	
1.4) $z_I = 2$.	0,25	
ب) $\left\|z_E - z_I\right| = 1$.	0,25	
(Γ) هي الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها 1.	0,25	
التمرين الرابع: (06,50 نقطة)		01
1) 1. $g'(x) = 2x + \frac{2}{x}$ ، g متزايدة تماما على المجال.	0,50	
2. المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقق : $0,52 < \alpha < 0,53$. $g(0,52) \approx -0,04$ و $g(0,53) \approx 0,01$	0,50	

www.ency-education.com

عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
3	0,25	05,50
II) 1. $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.	0,25×2	
2) $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$.	0,50	
ب) جدول تغيرات الدالة f.	0,25	
ج) $f(\alpha)=2\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)$ و $2,71<f(\alpha)<2,81$.	0,25×2	
3) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x]=0$ ، (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta): y=-x$.	0,25×2	
ب) وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).	0,25	
ج) $(T): y=-x+2\sqrt{e}$.	0,50	
4. إنشاء (T) و (Δ) و (C_f).	0,50	
5. المناقشة بيانيا: - إذا كان $m\le 0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا. - إذا كان $0<m<2\sqrt{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين. - إذا كان $m=2\sqrt{e}$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا. - إذا كان $m>2\sqrt{e}$ فإن المعادلة لا تقبل حلولا.	0,50	
III) 1. الدالة $h: x\mapsto f(x)+x$ موجبة تماما على المجال $\left[e^{n};e^{n+1}\right]$ من أجل كل عدد طبيعي n.	0,25	
2. u_n يشير إلى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=e$.	0,25	
3. $u_n=2n+4$.	0,50	
4. $S_n=n^2+5n+4$.	0,25	

www.ency-education.com

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأول: (05 نقاط)		
1) أ. $\overrightarrow{AB}(0;2;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;0;-1)$ ؛ $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$ ومنه $\alpha=1$ و $\beta=2$.	0,50	
ب . $(ABC):2x+y-2z+4=0$.	0,50	
2) أ. $\vec{n}\perp\vec{n}$ ، $\vec{n}\cdot\vec{n}_{(P)}=0$.	0,25	
ب . $\begin{cases}x=t\\ y=-4t\\ z=2-t\end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$ تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).	0,50	
جـ . المسافة بين النقطة D و المستقيم (Δ) . لدينا: $d(D;(Q))=4$ و $d(D;(P))=\sqrt{2}$ ومنه $d((\Delta);D)=\sqrt{4^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=3\sqrt{2}$	0,75	
3) أ. معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S): $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=4^2$.	0,25	
ب . إيجاد الطبيعة والخصائص المميزة لتقاطع المستوي (Q) وسطح الكرة (S) $d(D;(P))=\sqrt{2}<4$ إذن (S) و (P) يتقاطعان وفق دائرة مركزها نقطة تقاطع المستقيم العمودي على (P) والمار من D إذن إحداثياتها تحقق: $t=-1$ أي $(3+t)+0(4)+(1+t)-2=0$ وبالتالي $\omega(2;4;0)$ نصف قطرها : r يحقق $r=\sqrt{4^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$ أي $r=\sqrt{14}$.	0,25 0,50 0,25	05
4) أ . المجموعة (Γ): $MG_0=MG_1$ ومنه (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة $[G_0G_1]$	0,25	
ب. كتابة $\overrightarrow{CG_\lambda}$ بدلالة $\overrightarrow{CH}$: $\overrightarrow{CG_\lambda}=\frac{1}{1+e^\lambda}\overrightarrow{CH}$.	0,25	
جـ . مجموعة النقط G_λ لما $\lambda\in\mathbb{R}$: لدينا $\lambda\in\mathbb{R}$ إذن $\frac{1}{1+e^\lambda}\in]0;1[$. مجموعة النقط هي قطعة المستقيم $[CH]$ باستثناء طرفيها C و H	0,25 0,25	
د. G_λ منتصف القطعة المستقيمة $[CH]$ معناه $\overrightarrow{CG_\lambda}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CH}$ أي $e^\lambda=1$ فيكون بذلك $\lambda=0$.	0,25	
التمرين الثاني : (04 نقاط)		
I) 1) حل المعادلة $z^2-2z+2=0$: $S=\{1-i;1+i\}$	0,50	
2) إيجاد z_1 و z_2: $z_1=i\sqrt{2}$ و $z_2=-i\sqrt{2}$	0,50	01,50
II) 1) كتابة z_N على الشكل الأسي و استنتاج نوع المثلث BEC.	0,25	
$z_E=-1+i$ ، $z_N=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)=1e^{\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ ، المثلث BEC متقايس الساقين $BC=BE$	0,25	

www.ency-education.com

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
2) أ. $z'=z_A z+z_B$ ، $\lvert z_A\rvert=\sqrt{2}$ إذن S تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ وقيس زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة $\frac{z_B}{1-z_A}=\frac{2}{3}-i\frac{\sqrt{2}}{3}$	0,50 0,50	02,50
ب. $CD=\lvert z_D-z_C\rvert=\lvert -2\rvert=2$ إذن مساحة الدائرة 4π cm²	0,25	
جـ. (γ) هي الدائرة ذات المركز $C'(-\sqrt{2};0)$ صورة C ونصف قطرها $2\sqrt{2}$ مساحتها $(4\pi)(\sqrt{2})^2=8\pi$ cm²	0,50 0,25	
3) مجموعة النقط (δ) حيث $\frac{z_B-z}{z_C-z}$ حقيقيا سالبا تماما $\frac{z_B-z}{z_C-z}$ حقيقيا سالبا تماما معناه قيس الزاوية $(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MB})=\pi+2k\pi \quad / k\in\mathbb{Z}$ إذن (δ) القطعة المستقيمة $[CB]$ باستثناء طرفيها B و C.	0,50	
التمرين الثالث: (04 نقاط)		04
1) أ. دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 11 : $r\in\{1;3;4;5;9\}$	0,50	
دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 11 : $r'\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$	0,75	
ب. برهان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن: $2\times2016^{5n+4}+1437^{10n+4}$ تقبل القسمة على العدد 11. لدينا $2016\equiv3[11]$ إذن $2016^{5n+4}\equiv3^{5n+4}[11]$ ومنه: $2\times2016^{5n+4}\equiv8[11]$.....(1) لدينا $1437\equiv7[11]$ ومنه $1437^{10n+4}\equiv7^{10n+4}[11]$ أي: $1437^{10n+4}\equiv3[11]$.....(2) من (1) و (2) نجد : $2\times2016^{5n+4}+1437^{10n+4}\equiv0[11]$.	0,25 0,25 0,25	
2) أ. مجموعة حلول المعادلة (E): $(x;y)=(3k+2;7k+2) \quad ,k\in\mathbb{N}$	0,50	
ب. - القيم الممكنة للعدد d: $d\in\{1;2;4;8\}$. - تعيين كل الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d=4$. $(x;y)=(24k'+20;56k'+44) \quad ,k'\in\mathbb{N}$.	0,50 0,50	
جـ. $(x;y)=(30k+17;70k+37) \quad ,k\in\mathbb{N}$.	0,50	
التمرين الرابع: (07 نقاط)		01
1) أ. -1 إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=-1$.	0,25×2	
ب . اتجاه التغير: $\varphi'(x)=-(x-1)(x-2)e^{-x+1}$. الدالة φ متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;1]$ و $[2;+\infty[$ الدالة φ متزايدة تماما على المجال $[1;2]$.	0,25 0,25	

www.ency-education.com

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
جدول تغيرات الدالة φ .	0,25	06
2) بيّن أنّ المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلاً α يختلف عن 1	0,50	
3) إشارة $\varphi(x)$.	0,25	
II 1) أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$	0,25×2	
ب) $f'(x)=(3-2x)e^{-x+1}$. إشارة $f'(x)$: $-\infty$ $+$ $\frac{3}{2}$ $-$ $+\infty$	0,25	
الدالة f متزايدة تماما على $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$ و متناقصة تماما على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.	0,25	
جدول التغيّرات	0,25	
2) المنحنيين (C_f) و (C_g) لهما نفس المماس (T) أي: $\begin{cases} f(1)=g(1)=1 \\ f'(1)=g'(1)=1 \end{cases}$ و منه المنحنيين (C_f) و (C_g) لهما نفس المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1	0,25	
$(T): y=x$	0,25	
3) رسم (T) و (C_f)	0,50	
4) أ) تبيان أنّ: $f(x)-g(x)=\frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$	0,25	
ب. دراسة إشارة الفرق $f(x)-g(x)$: $-\infty$ $+$ $\frac{1}{2}$ $+$ 1 $+$ α $-$ $+\infty$	0,25	
- الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_g).	0,25	
جـ. الدالة: $3+\int_1^x f(t)dt=-(2x+1)e^{-x+1}$.	0,25	
د. المساحة : $A=\int_1^2\left(f(x)-g(x)\right)dx=3-\frac{5}{e}-\ln 3$.	0,25	
III 1) $f''(x)=(2x-5)e^{-x+1}$ و $f'''(x)=-(2x-7)e^{-x+1}$ ، $f^{(4)}(x)=(2x-9)e^{-x+1}$	0,25	
- التخمين: $f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$	0,25	
2) البرهان بالتراجع أنّ: من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$	0,50	
3) أ. حساب : $u_{k+1}+u_k=2(-1)^k$	0,25	
ب. $u_1+u_2+\cdots+u_{2n}=(u_1+u_2)+(u_3+u_4)+\cdots+(u_{2n-1}+u_{2n})=-2n$	0,25	

ملاحظة: تقبل جميع الطرق الممكنة للحل.

www.ency-education.com