| (الموضوع الأول) عناصر الإجابة | العلامة مجزأة | العلامة مجموع |
|---|---|---|
| **التمرين الأوّل: (04 نقاط)** | | |
| 1. أ - النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية لأن $\overrightarrow{AB}(9;-1;-1) \not\parallel \overrightarrow{AC}(3;-2;1)$ | 0,25 | 04 نقاط |
| ب - النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ من نفس المستوي لأن $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. | 0,5 | |
| جـ - من ب - أو $2\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ ينتج $D$ مرجّح $\{(A;2),(B;-1),(C;2)\}$ | 0,25 | |
| د - $D$ منتصف $[AE]$ ومنه $E(-1;3;6)$. | 0,25 | |
| هـ - $\vec{n}_{(\mathcal{P})}=\overrightarrow{AD}$ و $D\in(\mathcal{P})$ أو $MA=ME$ ومنه: $x+y-z+1=0$. | 0,25 | |
| 2. $(\Gamma)$ هي سطح الكرة ذات المركز $D$ ونصف القطر $AD$ حيث $AD=ED=\sqrt{3}$. | 0,5 | |
| 3 أ - $F\in(\mathcal{P})$. | 0,25 | |
| ب - $[AE]$ و $[GH]$ متعامدتان، متقايستان ومتناصفتان في $D$ ومنه $AGEH$ مربع. | 0,25 | |
| $s(AGEH)=2AD^2=6ua$. | 0,25 | |
| 4. أ - $(AEH)$ معيّن بالشعاعين $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{DF}$ ، $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{DF}\perp\overrightarrow{AC}$. | 0,5 | |
| ب - $\overrightarrow{DN}=t.\overrightarrow{AC}$ إذن $\overrightarrow{DN}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا وبالتالي $N\in(\Delta)$. | 0,25 | |
| جـ - $v(t)=\frac{1}{3}DN\times s(AGEH)=2\sqrt{14t^2}=2\|t\|\sqrt{14}\ uv$ | 0,25 | |
| د - $N_1\left(3\sqrt{\frac{3}{14}};4-2\sqrt{\frac{3}{14}};5+\sqrt{\frac{3}{14}}\right)$ ، $N_2\left(-3\sqrt{\frac{3}{14}};4+2\sqrt{\frac{3}{14}};5-\sqrt{\frac{3}{14}}\right)$. | 0,25 | |
| **التمرين الثاني: (05 نقاط)** | | |
| 1. أ - تمثيل النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $H$ و $I$ في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$. | 0,5 | 03 نقاط |
| ب - $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ إذاً نسبة التشابه المباشر هي $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{5\pi}{4}$ زاوية له. | 0,5 | |
| 2. $z_G=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}i$. | 0,25 | |
| 3. أ - $\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}=-\frac{1}{3}i$. | 0,5 | |
| ب - $\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}$ هو عدد تخيلي صرف إذاً المستقيمان $(AH)$ و $(BC)$ متعامدان. | 0,5 | |
| جـ - $\frac{z_A-z_C}{z_H-z_B}=-i$ وهو تخيلي صرف ومنه $(BH)\perp(AC)$ ؛ بما أنّ ارتفاعات مثلث تتلاقى في نقطة واحدة فإنّ $H$ هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث $ABC$. | 0,75 | |

| عناصر الإجابة — تابع للموضوع الأول | العلامة مجزأة | العلامة مجموع |
|---|---|---|
| 4. $\frac{z_H - z_I}{z_H - z_G} = \frac{3}{2}$ وهو حقيقي ومنه $(GH)//(IH)$ إذن النقط $G$ ، $H$ و $I$ في استقامية. | 0,5 | 02 نقاط |
| 5. أ - $z_A + 1 + i = 1 + 2i$ ، إذاً $\lvert z_A + 1 + i \rvert = \sqrt{5}$ أي $A \in (\Gamma)$ . | 0,5 | |
| ب - $z = z_I + \sqrt{5}e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$ إذن $(\Gamma)$ هي دائرة مركزها $I$ ونصف قطرها $\sqrt{5}$ . | 0,25 | |
| جـ - إنشاء الدائرة $(\Gamma)$ من المركز $I$ وتمر بالنقطة $A$ . | 0,25 | |
| د - $\lvert z_B - z_I \rvert = \sqrt{5}$ ، $\lvert z_C - z_I \rvert = \sqrt{5}$ إذن $IB = IC = \sqrt{5}$ أي $B \in (\Gamma)$ و $C \in (\Gamma)$ . | 0,5 | |
| **التمرين الثالث: (04 نقاط)** | | |
| 1. أ - من أجل كل عدد طبيعي $k$ ، $2^{3k} \equiv 1[7]$ ومنه $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ و $2^{3k+2} \equiv 4[7]$ . | 0,5 | 04 نقاط |
| ب - $1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53} \equiv 0[7]$ | 0,5 | |
| 2. أ - 89 عدد أوّلي لأنه لا يقبل القسمة على 2،3،5،7 و $11^2 > 89$ . | 0,25 | |
| ب - $D_{7832} = \{1,2,4,8,11;22;44,88;89,178,356,712,979,1958,3916,7832\}$ | 0,5 | |
| جـ - باستعمال خوارزمية إقليدس أو تحليل 981 نجد $PGCD(981,977) = 1$ . | 0,25 | |
| 3. $x'^2 - y'^2 = 7832$ و $PGCD(x';y') = 1$ و $x' - y' \equiv 4[11]$ إذاً $(x';y') = (981;977)$ ومنه $(x;y) = (1962;1954)$ . | 0,5 | |
| 4. أ - باستعمال مبرهنة بيزو ، البرهان أنّ $a$ أوّلي مع $b \times c$ . | 0,25 | |
| ب - باستعمال الاستدلال بالتراجع، إثبات أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $PGCD(a;b^n) = 1$ . | 0,5 | |
| جـ - $p\gcd(981^{1954};977) = 1$ ؛ $p\gcd(981^{1954};977^{1962}) = 1$ ؛ $p\gcd(981^{1954};2^8) = 1$ ؛ من 4. أ. ينتج $p\gcd(1962^{1954};1954^{1962}) = 2^{1954} p\gcd(981^{1954};977^{1962} \times 2^8) = 2^{1954}$ | 0,75 | |
| **التمرين الرابع: (07 نقاط)** | | |
| 1. أ - $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} f(x) = 1 = f(1)$ ، ومنه الدالة $f$ مستمرة على يمين 0. | 0,5 | 02,75 نقطة |
| ب - $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} -x\ln x = 0$ . | 0,25 | |
| التفسير الهندسي: $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس في $A(0;1)$ معادلته $y = 1$ و $x \geq 0$ . | 0,25 | |
| 2. أ - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ . | 0,25 | |
| ب - من أجل $x \in ]0;+\infty[$ ، $f'(x) = -x(2\ln x + 1)$ + الإشارة | 0,5 | |
| $f$ متزايدة تماما على $[0;e^{-\frac{1}{2}}]$ ومتناقصة تماما على $[e^{-\frac{1}{2}};+\infty[$ | 0,25 | |
| جدول تغيرات الدالة $f$ . | 0,25 | |
| 3. أ - تبيين أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيدا $\alpha$ في المجال $]0;+\infty[$ . | 0,5 | |

| تابع للموضوع الأول — عناصر الإجابة | العلامة: مجزأة | العلامة: مجموع |
|---|---|---|
| ب - $f(1,531)\approx 0,002$ ؛ $f(1,532)\approx -0,001$ إذاً $f(1,532)<f(\alpha)<f(1,531)$ | 0,25 | 04,25 نقطة |
| 4. أ - الدالة $g$ زوجية لأن $\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة إلى 0 و $g(-x)=g(x)$ | 0,25 | |
| ب - إنشاء المنحنى $(\mathcal{C}_g)$ على المجال $[-2;2]$. | 1 | |
| 5. $x\mapsto \frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{9}$ هي الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto x^2\ln x$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم من أجل القيمة 1. | 0,75 | |
| 6. أ - $F(t)=\left(\alpha-\frac{1}{3}\alpha^3\ln\alpha+\frac{1}{9}\alpha^3\right)-\left(t-\frac{1}{3}t^3\ln t+\frac{1}{9}t^3\right)$. | 0,25 | |
| ب - من $\ln(\alpha)=\frac{1}{\alpha^2}$ ؛ $\ln(t)=\frac{1-f(t)}{t^2}$ إذاً $F(t)=\frac{-3t\,f(t)-t^3-6t+\alpha^3+6\alpha}{9}$. | 0,5 | |
| جـ - لدينا $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=1$ إذاً $\lim\limits_{t\overset{>}{\to}0}F(t)=\frac{\alpha^3+6\alpha}{9}$. | 0,25 | |
| 7. أ - القيمة المضبوطة للعدد $m$ حتى يكون $\mathcal{S}(m)=2\mathcal{A}$ هي: $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\alpha^3+6\alpha}{\pi}}$. | 0,5 | |
| ب - علما أنّ $3,140<\pi<3,142$ و $1,531<\alpha<1,532$ نجد: $1,344<m<1,346$. | 0,5 | |

| (الموضوع الثاني) — عناصر الإجابة | العلامة: مجزأة | العلامة: مجموع |
|---|---|---|
| **التمرين الأول: (04 نقاط)** | | |
| 1. الاقتراح الصحيح (أ) + التعليل (يمكن حساب $u_1$ في كل حالة أو $\frac{1}{2}u_n+3$ بدلالة $n$ ) | 1 | 04 نقاط |
| 2. الاقتراح الصحيح (ب) + التعليل ( $\lvert iz-1-i\rvert=3$ معناه $\lvert z-1+i\rvert=3$) | 1 | |
| 3. الاقتراح الصحيح (أ) + التعليل (يمكن استعمال خواص الموافقة بترديد 11) | 1 | |
| 4. الاقتراح الصحيح (ب) + التعليل (في التمثيل الوسيطي يمكن ملاحظة ان الشعاعين مرتبطان خطيا) | 1 | |
| **التمرين الثاني: (05 نقاط)** | | |
| 1. $z^2-2(1-\sqrt{3})z+8=0$ معناه $z\in\left\{(1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3});(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})\right\}$ | 1 | 03 نقاط |
| 2. أ - $\frac{z_B}{z_A}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{\frac{5\pi}{6}i}=e^{-\frac{7\pi}{6}i}$. | 0,75 | |
| ب - $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=-2\arg(z_A)=-\frac{7\pi}{6}$ ومنه $\arg(z_A)=\frac{7\pi}{12}$ | 0,75 | |
| جـ - $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. | 0,5 | |

| | | |
|---|---|---|
| 3. أ - حلول المعادلة $7x-2y=1$ هي كل الثنائيات $(2k+1;7k+3)$ مع $k\in\mathbb{Z}$. | 0,5 | 02 نقاط |
| ب - $7x=12(1+2y)$ ومنه $x$ مضاعف لـ12 حسب مبرهنة غوص. | 0,25 | |
| جـ - حلول المعادلة $7x-24y=12$ هي: $x=24k+12$ و $y=7k+3$ مع $k\in\mathbb{Z}$. | 0,5 | |
| د - $n=24k+12$ مع $k\in\mathbb{N}$. | 0,75 | |
| **التمرين الثالث: (04 نقاط)** | | |
| 1. $C\in(\Delta_1)\cap(\Delta_2)$ ومنه $C(3;-2;1)$ | 0,5 | 04 نقاط |
| 2. $(\Delta_1)$ و $(d)$ غير متوازيين وغير متقاطعين وعليه فهما ليسا من نفس المستوي | 0,5 | |
| 3. أ - $\begin{cases} x=3-\alpha-3\beta \\ y=-2+2\alpha+2\beta;(\alpha\in\mathbb{R});(\beta\in\mathbb{R}) \\ z=1-\alpha+3\beta \end{cases}$ وهو تمثيل وسيطي للمستوي $(\mathcal{P})$. | 0,5 | |
| ب - استنتاج أنّ $4x+3y+2z-8=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$. | 0,25 | |
| جـ - $C\in(\mathcal{P})$ و $\overrightarrow{BC}$ عمودي على المستوي $(\mathcal{P})$. | 0,25 | |
| 4. أ - $I\in(d)\cap(\mathcal{P})$ ومنه $I(1;0;2)$ ؛ $D\in(\Delta_2)\cap(IA)$ ومنه $D(0;0;4)$. | 0,75 | |
| ب - $I$ منتصف $[AD]$ لأن $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{ID}$ أو $I\left(\frac{x_A+x_D}{2};\frac{y_A+y_D}{2};\frac{z_A+z_D}{2}\right)$ | 0,25 | |
| 5. أ - $(BC)//(KG)$ حسب طاليس في $BIC$ نجد $\frac{IG}{IC}=\frac{1}{3}$ ومنه $G$ مرجح $\{(C;1),(I;2)\}$ وعليه $G$ مرجح $\{(C;1),(A;1),(D;1)\}$ أي $G$ مركز ثقل $ACD$. | 0,5 | |
| ب - $G\left(\frac{5}{3};-\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$ | 0,5 | |
| **التمرين الرابع (07 نقاط)** | | |
| 1. $f(0)=0=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)$ إذن الدالة $f$ مستمرة على يسار 0. | 0,25 | 02,50 نقاط |
| 2. $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}e^{\frac{1}{x}}-\lim\limits_{t\to-\infty}te^t=0$. | 0,25 | |
| التفسير الهندسي: $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس مواز لحامل محور الفواصل في المبدأ $O$. | 0,25 | |
| 3. أ - $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. | 0,25 | |
| ب - لكل $x\in]-\infty;0[$ : $f'(x)=\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$ ؛ $f'(x)>0$ | 0,5 | |
| $f$ متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$. | 0,25 | |
| جدول تغيرات الدالة $f$. | 0,25 | |
| 4. أ - $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{t\xrightarrow{<}0}\frac{e^t}{t}-e^t-\frac{1}{t}=\lim\limits_{t\xrightarrow{<}0}\frac{e^t-1}{t-0}-e^t=0$ | 0,25 | |
| ب - المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ بجوار $-\infty$ ، $y=x$ معادلة له. | 0,25 | |

| تابع للموضوع الثاني — عناصر الإجابة | العلامة مجزأة | العلامة مجموع |
|---|---|---|
| 5. أ - $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$ . | 0,25 | 04,50 نقاط |
| ب - لكل $x$ من المجال $]-\infty;0[$ : $g'(x)=e^{\frac{1}{x}}\times\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{x}$ ؛ $g'(x)<0$ | 0,5 | |
| $g$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$. | 0,25 | |
| جدول تغيّرات الدالة $g$ . | 0,25 | |
| 6. أ - من أجل كل $x$ من $]-\infty;0[$ ، $0<g(x)<1$ معناه $x<f(x)<0$ | 0,25 | |
| ب - $(\mathcal{C}_f)$ فوق $(\Delta)$ ؛ $f(0)=0$ إذاً يتقاطعان في المبدأ $O$. | 0,25 | |
| جـ - إنشاء المنحنى $(\mathcal{C}_f)$. | 0,5 | |
| 7. أ - باستعمال الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n<0$. | 0,75 | |
| ب - المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما لأنّ $u_n<f(u_n)<0$ | 0,25 | |
| جـ - المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 0 إذن هي متقاربة نحو $\ell$. | 0,25 | |
| بما أنّ $f$ مستمرة على $]-\infty;0[$ فإن $f(\ell)=\ell$ ومنه $\ell=0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$ . | 0,25 | |
| 8. أ - لكل $x$ من المجال $]-\infty;0[$ ، $h'_m(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)-m=\frac{f(x)}{x}-m$. | 0,25 | |
| ب - $h'_m(x)=0$ تكافئ $f(x)=mx$ و $x\neq 0$<br>إذا كان $m\in]0;1[$ فإن المعادلة $h'_m(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-\infty;0[$.<br>إذا كان $m\in]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$ فإن المعادلة $h'_m(x)=0$ لا تقبل حلا. | 0,5 | |