الحل المفصل لامتحان شهادة البكالوريا مادة الرياضيات شعبة الرياضيات لسنة 2014

حل الموضوع الأول

حل التمرين الأول:

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير

1)صحيح

التبرير: لدينا $A(2;1;-1)$ ، $B(-1;2;4)$ ، $C(0;-2;3)$ ومنه $\overrightarrow{AB}(-3;1;5)$ ، $\overrightarrow{AC}(-2;-3;-4)$
وعليه فإنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ ومنه النقط A ، B و C تعين مستو.

2)خطأ

التبرير: لأن $\big(A\notin(p)\big)$ وذلك لأن إحداثيات A لا تحقق معادلة (p) : $2(2)-(1)+2(-1)+1=2\neq 0$.

3)صحيح

التبرير: لدينا $A(2;1;-1)$ ، $C(0;-2;3)$، $D(1;1;-2)$ ومنه $\overrightarrow{AC}(-2;-3;4)$ ، $\overrightarrow{AD}(-1;0;-1)$
وعليه فإنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ ومنه النقط A ، C و D تعين مستو. هذا من جهة
ومن جهة أخرى: إحداثيات النقط A ، C و D تحقق معادلة $x-2y-z-1=0$.
$(2)-2(1)-(-1)-1=0$، $(0)-2(-2)-(3)-1=0$، $(1)-2(1)-(-2)-1=0$

4).صحيح

التبرير: إحداثيات كل من A و C تحقق التمثيل الوسيطي $\begin{cases}x=2t\\ y=-2+3t\\ z=3-4t\end{cases}$

$\begin{cases}2=2t\\ 1=-2+3t\;;\;t=1\\ -1=3-4t\end{cases}$ ، $\begin{cases}0=2t\\ -2=-2+3t\;;\;t=0\\ 3=3-4t\end{cases}$

1) خطأ

التبرير:

$$d\big(D;(p)\big)=\frac{|2(1)-(1)+2(-2)+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{2}{3}\neq\frac{3}{2}$$

2) صحيح

التبرير: لأن $E\in(p)$ وذلك لأن إحداثياتها تحقق معادلة (p):$(2(-2)-(-1)+2(1)+1=2\neq 0)$.
و لأن $(EC)\perp(p)$ وذلك لأن $\overrightarrow{EC}(2;-1;2)$ شعاع ناظمي للمستوي (p).

تبرير آخر: لأن $d\big(C;(p)\big)=EC$

$$d\big(C;(p)\big)=\frac{|2(0)-(-2)+2(3)+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=3;EC=\sqrt{(0+2)^2+(-2+1)^2+(3-1)^2}=3$$

3) **خطأ**

التبرير: لأن النقطة D ليست منتصف القطعة $[AC]$

حل التمرين الثاني:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $0 = (z - 1 - 2i)(z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3})$:

$(z-1-2i)(z^2-2(1+\sqrt{3})z+5+2\sqrt{3})=0$ معناه

$$\begin{cases} z-1-2i=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots e_1 \\ \text{أو} \\ z^2-2(1+\sqrt{3})z+5+2\sqrt{3}=0 \ldots e_2 \end{cases}$$

المعادلة e_1 حلها $z_0 = 1+2i$ و المعادلة e_2 نحلها باستعمال المميز المختصر حيث $\Delta' = -1 = i^2$ وحلاها هما $z_1 = 1+\sqrt{3}+i$ و $z_2 = 1+\sqrt{3}i-1$.

ومنه حلول المعادلة هي $S = \{1+2i; z_1 = 1+\sqrt{3}+i; z_1 = 1+\sqrt{3}-i\}$

2)

أ) تبيين أن $AB = CD$ و (AD) يوازي (BC)

$AB = |z_B - z_A| = |\sqrt{3} - i| = 2\,; CD = |z_D - z_C| = |-\sqrt{3} - i| = 2\,;\ AB = CD$

$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = -2i\,;\ z_{\overrightarrow{AD}} = z_D - z_A = -4i\,; \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}\,; (BC) // (AD)$

ب) التحقق أن $\frac{z_B+z_D}{2} \neq \frac{z_A+z_C}{2}$ واستنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$

$$\frac{z_B+z_D}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\,;\ \frac{z_A+z_C}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\,;\ \frac{z_B+z_D}{2} \neq \frac{z_A+z_C}{2}$$

استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$:

بما أن $\frac{z_A+z_C}{2} \neq \frac{z_B+z_D}{2}$ فإن قطرا الرباعي $ABCD$ ليسا متناصفين وبما أن $AB = CD$ و $(AD) // (BC)$ ف الرباعي $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين.

3) .

أ) تبيين أن $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B} = \frac{-\sqrt{3}-3i}{-\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}i(i+\sqrt{3})}{-\sqrt{3}+i} = \sqrt{3}i = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

بما أن $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ فإن $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ و $BD = \sqrt{3}AB$ ومنه النقطة D صورة النقطة A بتشابه مباشر الذي مركزه B ونسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

ب) تبيين أن المثلث ABD قائم

بما أن $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ فإن $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ ومنه أن المثلث ABD قائم في B

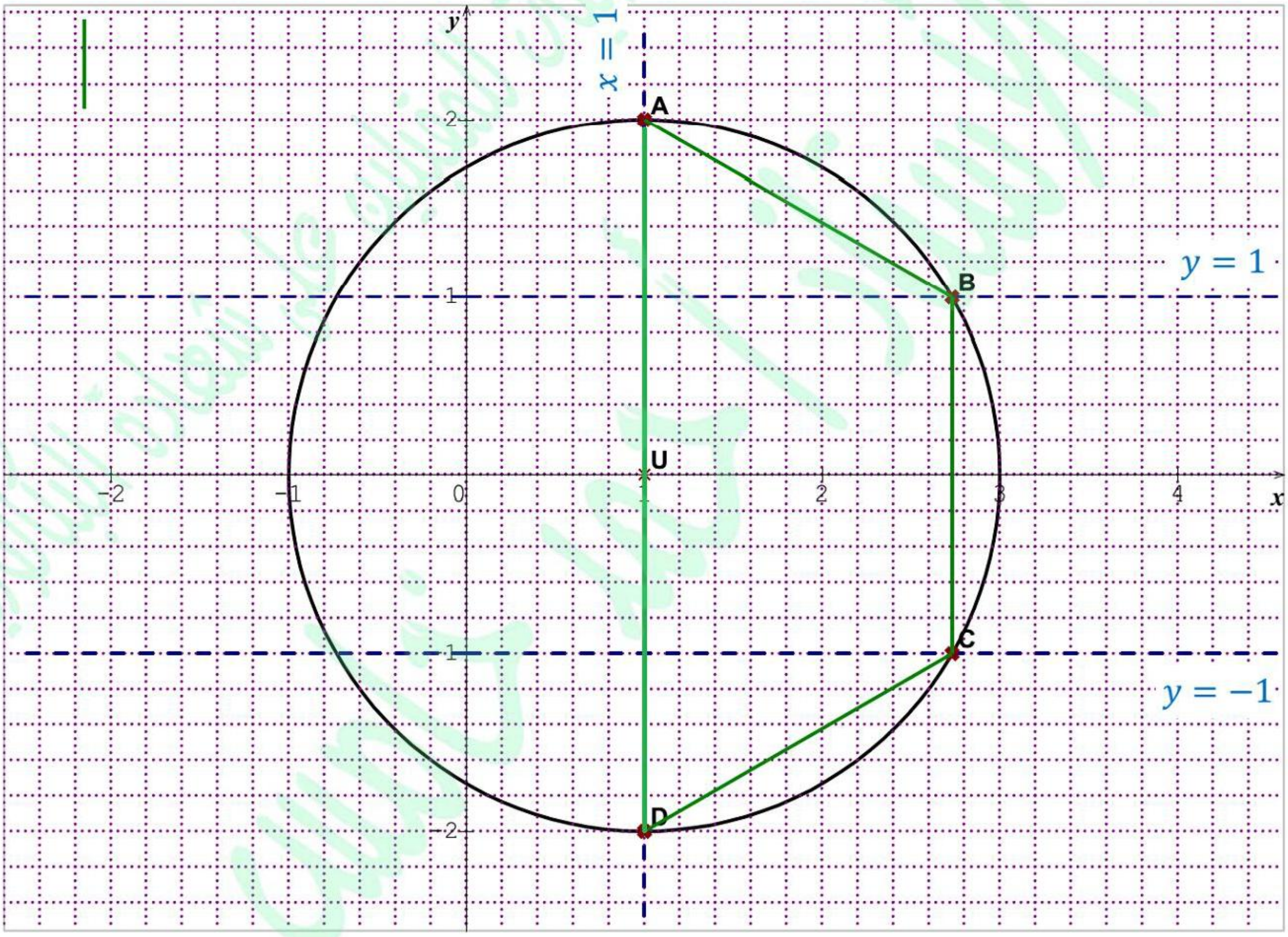
تبيين أن النقط A، B، C و D تنتمي الى نفس الدائرة مع تحديد مركزها و نصف قطرها

$$|z_A - 1| = |2i| = 2; |z_B - 1| = \left|\sqrt{3} + i\right| = 2; |z_C - 1| = \left|\sqrt{3} - i\right| = 2; |z_D - 1| = |-2i| = 2$$

بوضع النقطة U صورة العدد 1 نفسر ما سبق بأن: $AU = BU = CU = DU = 1$ ومنه النقط A، B، C و D تنتمي الى الدائرة نرمز لها (c) والتي مركزها U ونصف قطرها 2.

استنتاج إنشاء للرباعي $ABCD$

لدينا النقط A، B، C و D تنتمي الى الدائرة (c) التي مركزها U ونصف قطرها 2 حيث النقطتين A و D هما النقطتين من الدائرة (c) التي فاصلتيهما تساوي 1 (تقاطع الدائرة والمستقيم الذي معادلته $x = 1$)،النقطة B هي النقطة من الدائرة التي ترتيبها يساوي 1 وتنتمي إلى الربع الأول من الدائرة أما النقطة (c) (تقاطع الدائرة والمستقيم الذي معادلته $y = 1$ في الربع الأول منها) ، C هي النقطة من الدائرة التي ترتيبها يساوي -1 وتنتمي إلى الربع الرابع من الدائرة (c) (تقاطع الدائرة والمستقيم الذي معادلته $y = 1$ في الربع الرابع منها).



حل التمرين الثالث:

1) $2013x + 1962y = 54 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (E)$.

أ) حساب $PGCD(2013;1962)$

بما أن:

$2013 = 1962 \times 1 + 51; 1962 = 51 \times 38 + 24; 51 = 24 \times 2 + 3; 24 = 3 \times 8 + 0$

فإن:

$PGCD(2013;1962) = 3$

ب) استنتاج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}$

بما أن 54 يقبل القسمة على $PGCD(2013;1962)$ فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}$

ج) تبيين أنه إذا كانت $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 0[6]$

المعادلة (E) تكافئ: $671x - 654y = 18$

$(x;y)$ حل للمعادلة (E) معناه $671x - 654y = 18$ ومنه $671x = 654y + 18$ أي

$671x \equiv 654y + 18[6]$ وبما أن $671 \equiv 5[6]$ و $654 \equiv 0[6]$ و $18 \equiv 0[6]$ فإن $5x \equiv 0[6]$

وبما أن 5 و 6 أوليان فيما بينهما فانه حسب غوص منه $x \equiv 0[6]$

د) استنتاج الحل الخاص $(x_0;y_0)$ وحل المعادلة (E)

بما أن $74 < x_0 < 80$ و $x \equiv 0[6]$ فإن $x_0 = 78$ وبالتعويض في المعادلة (E) نجد $y_0 = 80$ أي الحل الخاص المطلوب هو $(x_0;y_0) = (78;80)$

حل المعادلة (E):

لدينا $\begin{cases} 671x - 654y = 18 \\ 671(78) - 654(80) = 18 \end{cases}$ وبالطرح: نجد $671(x-78) = 654(y-80)$ ومنه 654 يقسم $671(x-78)$ لكن 671 و 654 أوليان فيما بينهما ومنه حسب غوص 654 يقسم $(x-78)$ أي

$x = 654k + 78$ وبالتعويض في (E) نجد $y = 671k + 80$

(2

أ) القيم الممكنة لـ d:

$(x;y)$ حل للمعادلة (E) معناه $671x-654y=18$ ومنه قيم الممكنة لـ d هي قواسم العدد 18 أي

ب) تعيين العددين الطبيعيين a و b:

لدينا $671a-654b=18$ ومنه $(a;b)$ هي من شكل حلول المعادلة (E) أي $\boldsymbol{a=654k}$ و $\boldsymbol{b=671k+80}$ ولدينا أيضا $PGCD(a;b)=18$ ومنه:

$\begin{cases} a\equiv 0[18] \\ b\equiv 0[18]\end{cases}$ أي $\begin{cases} 654k+78\equiv 0[18] \\ 671k+80\equiv 0[18]\end{cases}$ أوبما أن $\begin{cases} 654\equiv 6[18] \\ 78\equiv 6[18] \\ 671\equiv 5[18] \\ 80\equiv 8[18]\end{cases}$ فإن:

$$\begin{cases} 6k+6\equiv 0[18]\ \dots\dots e_1 \\ 5k+8\equiv 0[18]\ \dots\dots e_2\end{cases}$$

$e_1+(-1)\times e_2$: $k-2\equiv 0[18]$ ومنه $k\equiv 2[18]$ أي $k=18\alpha+2$ حيث α عدد طبيعي

ومنه

$$a=654(18\alpha+2)+78=11772\alpha+1386$$
$$b=671(18\alpha+2)+80=12078\alpha+1422$$

حل التمرين الرابع:

ا. $\mathrm{g}(x)=(2-x)e^x-1;\ D_{\mathrm{g}}=\mathbb{R}$

1) دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{g}(x)=\lim_{x\to-\infty}2e^x-xe^x-1=-1\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\mathrm{g}(x)=\lim_{x\to+\infty}(2-x)e^x-1=-\infty$$

المشتق وإشارته:

الدالة g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$\mathrm{g}'(x)=-e^x+(2-x)e^x=(1-x)e^x$$

ومنه إشارة المشتق من إشارة $(1-x)$ وعليه $g'(x)>0$ من أجل $x\in]-\infty;1[$ و $g'(x)<0$ من أجل $x\in]1;+\infty[$ و $g'(1)=0$

اتجاه التغير الدالة g على $\mathbb{R}$:

بما أن $g'(x)\geq 0$ من أجل $x\in]-\infty;1]$ فإن الدالة متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1]$ و $g'(x)\geq 0$ من أجل $x\in[1;+\infty[$ فإن الدالة متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة g:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$e-1$	$\searrow$	$-\infty$

2) تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;1]$ وبصفة خاصة على المجال $]-1{,}2;-1.1[$ و لدينا $g(-1{,}2)\times g(-1{,}1)<0$ (لأن $g(-1{,}2)\simeq -0.03; g(-1{,}1)\simeq 0.03$). ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha\epsilon]0{,}7;0{,}8[$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;1]$ وبصفة خاصة على المجال $]1{,}8;1{,}9[$ و لدينا $g(1{,}8)\times g(1{,}9)<0$ (لأن $g(1{,}8)\simeq 0.2; g(1{,}9)\simeq -0.3$). ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد β حيث $\beta\in]1{,}8;1{,}9[$.

الخلاصة: المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $\alpha\epsilon]0{,}7;0{,}8[$ و $\beta\in]1{,}8;1{,}9[$.

3) إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

بما أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين هما α و β مع $\alpha<\beta$ ومن دراسة تغيرات الدالة g يمكن استنتاج إشارتها والتي تكون كمايلي:

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

II. $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$; $D_f=\mathbb{R}$

1) حساب نهاية f عند $-\infty$ و $+\infty$ وتفسير النتيجتين هندسيا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{e^x-x}=0\,;\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)}=1$$

تفسير النتيجتين هندسيا

بما أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي $(\boldsymbol{xx'})$ بجوار $-\infty$.

و بما أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=1$ بجوار $+\infty$.

2) تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\frac{g(x)}{(e^x-x)^2}$:

3) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\frac{e^{2x}-xe^x-e^{2x}+2e^x-1}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x(2-x)-1}{(e^x-x)^2}$$

ومنه من أجل كل عدد حقيقي x: $\boldsymbol{f'(x)=\frac{g(x)}{(e^x-x)^2}}$

استنتاج تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $\boldsymbol{f'(x)}$ من إشارة $\boldsymbol{g(x)}$ لأن $(e^x-x)^2>0$ من أجل كل عدد حقيقي x.

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;\alpha]$ و $[\beta;+\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;\beta]$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	1 $f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	1

4) تبيين أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$ واستنتاج حصر لـ $f(\alpha)$ و $f(\beta)$:

لدينا: $\begin{cases} f(\alpha) = \frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}-\alpha} \\ \text{و} \\ g(\alpha) = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} f(\alpha) = \frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}-\alpha} \\ \text{و} \\ (2-\alpha)e^{\alpha} - 1 = 0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} f(\alpha) = \frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}-x} \dots\dots\dots e_1 \\ \text{و} \\ e^{\alpha} = \frac{1}{2-\alpha} \dots\dots\dots e_2 \end{cases}$ بتعويض e_2 في e_1

نجد

$$f(\alpha) = \frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}-x} = \frac{\frac{1}{2-\alpha}-1}{\frac{1}{2-\alpha}-x} = \frac{\frac{1-2+\alpha}{2-\alpha}}{\frac{1-2\alpha+\alpha^2}{2-\alpha}} = \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2} = \frac{1}{\alpha-1}\ ;\ \boldsymbol{f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}}$$

استنتاج حصر لـ $f(\alpha)$ و $f(\beta)$:

لدينا $-1{,}1 > \alpha > -1{,}2$ ومنه $-2{,}1 > \alpha - 1 > -2{,}2$ وبالقلب نجد $\frac{1}{-2{,}2} > \frac{1}{\alpha-1} > \frac{1}{-2{,}1}$ ومنه

$$-0.48 < f(\alpha) < -0.45$$

لدينا $1{,}9 > \beta > 1{,}8$ ومنه $0{,}9 > \beta - 1 > 0{,}8$ وبالقلب نجد $\frac{1}{0{,}8} > \frac{1}{\beta-1} > \frac{1}{0{,}9}$ ومنه

$1.25 > f(\beta) > 1.11$. عبارة $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ نفسها لأن كلاهما يعدمان الدالة g.

4) حساب $f(1)$ ورسم المنحني (C_f)

$$f(1)=\frac{e^1-1}{e^1-1}=1$$

5) .

أ) حساب بدلالة λ العدد $a(\lambda)$

$$a(\lambda)=\int_1^{\lambda}[f(x)-1]\,dx=\int_1^{\lambda}\frac{e^x-1}{e^x-x}-1\,dx=[\ln(e^x-x)-x]_1^{\lambda}$$
$$=\ln\left(e^{\lambda}-\lambda\right)-\lambda-\ln(e-1)+1$$

$$\boldsymbol{a(\lambda)=\ln\left(e^{\lambda}-\lambda\right)-\lambda-\ln(e-1)+1}$$

ب) حساب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} a(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} \ln\left(e^{\lambda} - \lambda\right) - \lambda - \ln(e-1) + 1$$

$$= \lim_{\lambda \to +\infty} \ln\left(e^{\lambda} - \lambda\right) + \ln e^{-\lambda} - \ln(e-1) + 1$$

$$= \lim_{\lambda \to +\infty} \ln\left[e^{-\lambda}\left(e^{\lambda} - \lambda\right)\right] - \ln(e-1) + 1$$

$$= \lim_{\lambda \to +\infty} \ln\left(1 - \lambda e^{-\lambda}\right) - \ln(e-1) + 2 = -\ln(e-1) + 1$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} a(\lambda) = -\ln(e-1) + 1$$