تصحيح اختبار مادة الرياضيات شعبة رياضيات : بكالوريا 2012

الموضوع الأول

التمرين الأول

1) لدينا $\Delta=\left(-\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times1=-2=\left(i\sqrt{2}\right)^2$ ومنه

$$z\ =\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\ }=\frac{1+i}{\sqrt{\ }},\quad z_2=\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{\ }=\frac{1-i}{\sqrt{\ }},$$

2) **لدينا** $z_A=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ، $z_B=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ و $z_C=z_A+z_B=\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\frac{1-i}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

أ- $\boxed{z_A=e^{i\frac{\pi}{4}}}$ ، $\boxed{z_B=e^{-i\frac{\pi}{4}}}$ و $\boxed{\frac{z_A}{z_B}=\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\frac{\pi}{2}}}$

ب - **العبارة المركبة للدوران الذي مركزه** O وزاويته $\frac{\pi}{4}$ هي $z'=e^{i\frac{\pi}{4}}z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}z$ وعليه

$z_{A'}=e^{i\frac{\pi}{4}}z_A=e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\frac{\pi}{4}}=e^{i\frac{\pi}{2}}\boxed{=i}$ و $z_{B'}=e^{i\frac{\pi}{4}}z_B=e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{-i\frac{\pi}{4}}=e^0=1$ و

$$z_{C'}=e^{i\frac{\pi}{4}}z_C=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}=\boxed{1+i}$$

جـ- لدينا $z_{C'}-z_{B'}=1+i-1=i=z_{A'}-z_O$ ومنه $\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{B'C'}$ وهذا يعني أن الرباعي $OA'C'B'$ متوازي أضلاع كما أن $\frac{z_{A'}-z_O}{z_{B'}-z_O}=\frac{i-0}{1-0}=i$ وعليه $\left|\frac{z_{A'}-z_O}{z_{B'}-z_O}\right|=|i|=1$ و $arg\left(\frac{z_{A'}-z_O}{z_{B'}-z_O}\right)=arg(i)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ أي أن $OA'=OB'$ و $\left(\overrightarrow{OB'},\overrightarrow{OA'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

وعليه $OA'C'B'$ متوازي أضلاع فيه ضلعان متتاليان متقايسان وفيه زاوية قائمة فهو إذن مربع . يمكن أن نثبت كذلك أنه متوازي أضلاع قطراه متعامدان ومتناصفان .

طبعا يمكن أن يكون الإثبات باستعمال تقايس الأشعة والجداء السلمي .

3) أ- $|z-z_A|=|z-z_B|$ معناه $\left|x+iy-\frac{1-i}{\sqrt{\ }}\right|=\left|x+iy-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right|$ أي أن

$$\left|\frac{\sqrt{2}(x+iy)-1+i}{\sqrt{\ }}\right|=\left|\frac{\sqrt{2}(x+iy)-1-i}{\sqrt{\ }}\right| \text{ وعليه}$$

أي $\left|\sqrt{2}(x+iy)-1+i\right|=\left|\sqrt{2}(x+iy)-1-i\right|$

وبالتالي $\left|\sqrt{2}x-1+i\left(\sqrt{2}y+1\right)\right|=\left|\sqrt{2}x-1+i\left(\sqrt{2}y-1\right)\right|$

$\left(\sqrt{2}x-1\right)^2+\left(\sqrt{2}y+1\right)^2=\left(\sqrt{2}x-1\right)^2+\left(\sqrt{2}y-1\right)^2$ **أي أن** $\left(\sqrt{2}y+1\right)^2=\left(\sqrt{2}y-1\right)^2$

ومنه $\left(\sqrt{2}y-1\right)^2-\left(\sqrt{2}y+1\right)^2=0$ وبالتالي

$\left[\left(\sqrt{2}y-1\right)-\left(\sqrt{2}y+1\right)\right]\left[\left(\sqrt{2}y-1\right)+\left(\sqrt{2}y+1\right)\right]=0$ أي أن $-2\sqrt{2}y=0$ ومنه $y=0$

وهذا يعني أن (Δ) هو محور الفواصل.

ب- إذا كان $z=x+iy$ حلا للمعادلة $\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2=i$ فإن z يحقق $\left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right|^2=|i|=1$ أي

$|z-z_A|=|z-z_B|$ وحسب السؤال 3)أ- نجد أن $y=0$ ($Im\,z=0$) ومنه z عدد حقيقي .

التمرين الثاني

1) أ- لدينا $\sqrt{2011}\approx 44.844$ الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{2011}$ هي

43,41,37,31,29,23,19,17,13,11,7,5,3,2

واضح أن 2011 **لايقبل القسمة عل كل من 2 ، 3 و5 كما أن**

بقسمة 2011 **على**	**7**	**11**	**13**	**17**	**19**	**23**	**29**	**31**	**37**	**41**	**43**
يكون الباقي هو	**2**	**9**	**9**	**5**	**16**	**10**	**10**	**27**	**13**	**2**	**33**

ومنه 2011 **لا يقبل القسمة على كل من الأعداد** ***43,41,37,31,29,23,19,17,13,11,7,5,3,2*** **ومنه** 2011 **عدد أولي** .

$2011=1432+579$ أي $579=2011-1432$

ب- لدينا $1432=2\times579+274$ أي $274=1432-2\times579$

$579=2\times274+31$ أي $31=579-2\times274=579-2\times(1432-2\times579)$

$$31=579-2\times1432+4\times579$$
$$=5\times579-2\times1432$$
$$=5\times(2011-1432)-2\times1432$$
$$=5\times2011-5\times1432-2\times1432$$
$$=5\times2011-7\times1432$$

ومنه $31=5\times2011-7\times1432$ **أي أن** $2011\times5-1432\times7=31$ **وهذا يعني أن** $(5;7)$ حل خاص للمعادلة (1) .

لدينا $\begin{cases}2011x-1432y=31\\2011\times5-1432\times7=31\end{cases}$ **ومنه** $2011(x-5)=1432(y-7)\cdots(*)$ **لدينا** 1432 يقسم $2011(x-5)$ **ولكن** 1432 **أولي مع** 2011 (**لأن** 2011 أولي فهو أولي مع كل عدد طبيعي ليس مضاعفا له وواضح أن 1432 **ليس مضاعفا لـ** 2011) **إذن حسب مبرهنة غوص** 1432 **يقسم** $x-5$ أي أنه يوجد عدد صحيح k **حيث** $x-5=1432k\cdots(**)$ **بتعويض** $(**)$ في $(*)$ **نجد أن** $y-7=2011k$ **أي أن حلول** المعادلة (1) **هي الثنائيات** $(1432k+5;\,2011k+7)$ **مع** $k\in\mathbb{Z}$.

2) أ- لدينا $2^1 \equiv 2[7]$, $2^2 \equiv 4[7]$, $2^3 \equiv 1[7]$ ومنه $\boxed{2^{3p} \equiv 1[7]}$ حيث $p \in \mathbb{N}$.

$\begin{cases} 2^{3p} \equiv 1[7] \\ 2^1 \equiv 2[7] \end{cases}$ معناه $\boxed{2^{3p+1} \equiv 2[7]}$ ، $\begin{cases} 2^{3p} \equiv 1[7] \\ 2^2 \equiv 4[7] \end{cases}$ معناه $\boxed{2^{3p+2} \equiv 4[7]}$ ، وعليه

إذا كان $n =$	$3p$	$3p+1$	$3p+2$
فإن باقي قسمة 2^n على 7 هو	1	2	4

لدينا $2011 = 7 \times 287 + 2$ ومنه $2011 \equiv 2[7]$ ولدينا أيضا $1432 \equiv 1[3]$ أي $1432^{2012} \equiv 1[3]$ بعبارة أخرى $1432^{2012} = 3q + 1$, $q \in \mathbb{N}$ ومنه $2011^{1432^{2012}} \equiv 2^{3q+1}[7]$ ومما سبق $2^{3p+1} \equiv 2[7]$ أي أن $2011^{1432^{2012}} \equiv 2[7]$ ولكون $0 \le 2 < 7$ فإن باقي قسمة $2011^{1432^{2012}}$ على 7 هو 2 .

ب- لدينا $\begin{cases} 2010 \equiv 1[7] \\ 2011 \equiv 2[7] \\ 1432 \equiv 4[7] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 2010^n \equiv 1[7] \\ 2011^n \equiv 2^n[7] \\ 1432^n \equiv 4^n[7] \end{cases}$ إذن $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 1 + 2^n + 4^n [7]$

بما أن $4^n = 2^n \times 2^n$ فإن :

إذا كان $n = 3p$ فإن $1 + 2^n + 4^n \equiv 1+1+1[7]$ وعليه $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 3[7]$.

إذا كان $n = 3p+1$ فإن $1 + 2^n + 4^n \equiv 1+2+4[7]$ وعليه $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7]$.

إذا كان $n = 3p+2$ فإن $1 + 2^n + 4^n \equiv 1+4+16[7]$ وعليه $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7]$.

وعليه : قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7]$ هي $n = 3p+1$ و $n = 3p+2$ حيث $p \in \mathbb{N}$ ، أي هي كل الأعداد الطبيعية باستثناء مضاعفات 3 ، بعبارة أخرى هي المجموعة $\mathbb{N} - 3\mathbb{N}$.

3) لدينا $N = \overline{2\gamma\alpha\beta}^9 = 2 \times 9^3 + \gamma \times 9^2 + \alpha \times 9 + \beta$ أي $N = 1458 + 81\gamma + 9\alpha + \beta$

ولدينا $\begin{cases} 2\beta = \alpha + \gamma \\ (\beta; \gamma) = (1432k + 5; 2011k + 7) \\ 0 \le \alpha < 9, 0 \le \beta < 9, 0 \le \gamma < 9, \end{cases}$ أي أن $(\alpha; \beta; \gamma) = (3; 5; 7)$ ويكون $N = 2057$.

ملاحظة1 : من المفروض أن تكون المعطيات كما يلي $N = \overline{2\beta\gamma\alpha}^9$ و $(\alpha; \gamma)$ حل للمعادلة (1) و γ, β, α بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية عندها يكون $(\alpha; \beta; \gamma) = (5; 6; 7)$ ونجد $N = 2012$ ، وهذا مايعطي نسقا جماليا للتمرين . (يظهر أن هناك خطأ مطبعيا لكنه لايؤثر بأي شكل على المضمون الرياضياتي للسؤال) .

ملاحظة2 : الجملة " متزايدة تماما " لا تمثل أي إضافة إلى المعطيات بل كان ينبغي إسقاطها .

ملاحظة 3 : الجملة " γ, β, α بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما " مبهمة فهي تحتمل كون $\alpha < \beta < \gamma$ لمن يقرأ الرموز بالعربية و تحتمل $\alpha > \beta > \gamma$ لمن يقرأ بالفرنسية .

التمرين الثالث :

1)لدينا $\overrightarrow{AB}(-3;4;0)$, $\overrightarrow{AC}(-1;2;2)$ نلاحظ أن $\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}}=\frac{-3}{-1}=3\neq\frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}}=\frac{4}{2}=2$ وهذا يعني أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ **غير مرتبطين خطيا ومنه النقط** A, B **و** C ليست في استقامية .

لدينا $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=4\times(-3)+3\times4+(-1)\times0=-12+12=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=4\times(-1)+3\times2+(-1)\times2=-4+6-2=0\end{cases}$ ومنه $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

2)بما أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ **غير مرتبطين خطيا و الشعاع** $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ **فإن** $\vec{n}$ **شعاع ناظمي للمستوي** (P) وتكون معادلة له هي $4x+3y-z+d=0$ **مع** $d\in\mathbb{R}$. **ولكون** $A\in(P)$ **فإن** $4\times3+3\times0-0+d=0$ **أي** $d=-12$ **ومنه معادلة ديكارتية للمستوي** (P) **هي** $\boxed{4x+3y-z-12=0}$.

3)أ- $M(x;y;z)\in(P')$ تكافيء $AM=BM$ **معناه** $AM^2=BM^2$ **أي** $(x-3)^2+y^2+z^2=x^2+(y-4)^2+z^2$ **وبالتالي** $x^2-6x+9+y^2=x^2+y^2-8y+16$ **وعليه** $6x-8y+7=0$ **وهي معادلة للمستوي** (P').

ب- $M(x;y;z)\in(P'')$ تكافيء $AM=CM$ **معناه** $AM^2=CM^2$ **أي** $(x-3)^2+y^2+z^2=(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2$ **وبالتالي** $x^2-6x+9+y^2+z^2=x^2-4x+4+y^2-4y+4+z^2-4z+4$ **وعليه** $2x-4y-4z+3=0$ **وهي معادلة للمستوي** (P'').

جـ- $M(x;y;z)\in(P')\cap(P'')$ **معناه** $\begin{cases}6x-8y+7=0\\2x-4y-4z+3=0\end{cases}$ **ومنه** $\begin{cases}6x-8y=-7\\2x-4y=4t-3\\z=t\end{cases}$ **بحل هذه الجملة نجد أن** $t\in\mathbb{R}$, $\begin{cases}x=-4t-\frac{1}{2}\\y=-3t+\frac{1}{2}\\z=t\end{cases}$ **وهو تمثيل وسيطي للمستقيم** (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P') و (P'') .

4)الدائرة المحيطة بالمثلث ABC محتواة في المستوي (P) **وهذا يعني أن مركزها** ω **ينتمي إلى** (P) ، **ومن جهة أخرى لدينا** $\omega A=\omega B=\omega C$ وهذا يعني أن $\omega\in(P')\cap(P'')$ **أي أن** $\omega\in(\Delta)$ ، **إذن** $\omega\in(\Delta)\cap(P)$

لتكن $(x_0;y_0;z_0)$ إحداثيات ω **عندئذ** : $t\in\mathbb{R}$, $\begin{cases}x_0=-4t-\frac{1}{2}\\y_0=-3t+\frac{1}{2}\\z_0=t\\4x_0+3y_0-z_0-12=0\end{cases}$ **ومنه**

$4\left(-4t-\frac{1}{2}\right)+3\left(-3t+\frac{1}{2}\right)-t-12=0$ وبالتالي $-26t-\frac{25}{2}=0$ إذن $t=-\frac{25}{52}$ أي أن

$\omega\left(\frac{37}{26};\frac{101}{52};-\frac{25}{52}\right)$

التمرين الرابع : I)

1)من أجل كل عدد حقيقي x **لدينا** $g'(x)=-e^x-xe^x=-(1+x)e^x$ **ومنه**

$g'(x)>0$ **معناه** $x<-1$ **والدالة** g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1]$

$g'(x)<0$ **معناه** $x>-1$ **والدالة** g متناقصة تماما على المجال $[-1;+\infty[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	↗	$2+\frac{1}{e}$	↘	$-\infty$

2)من جدول تغيرات الدالة g **نلاحظ أنه على المجال** $]-\infty;-1]$ **تكون** $2<g(x)\leq 2+\frac{1}{e}$ **وعليه** $g(x)=0$ **لا تقبل حلا على هذا المجال . على المجال** $[-1;+\infty[$ **الدالة** g **مستمرة ورتيبة تماما ولدينا** $g(-1)=2+\frac{1}{e}$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ **مما يعني** (حسب مبرهنة القيم المتوسطة) أن المعادلة $g(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α **على هذا المجال وبالتالي على** $\mathbb{R}$ **. باستعمال حاسبة نجد أن** $g(0.8)\times g(0.9)\simeq 0.22\times(-0.21)<0$ **وعليه** $0.8<\alpha<0.9$.

3)

x	$-\infty$		α		
إشارة $g(x)$		$+$	0	$-$	

II) (1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}+\frac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}+\frac{2}{x}}=0$ ، **لأن** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ **هندسيا**

تعني هذه النتيجة أن المستقيم الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) .

2)أ- لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+2=-\infty$ **و** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ **ومنه** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

ب- $f(x)-(x+1)=\frac{2x+2}{e^x+2}-(x+\ )=\frac{2x+2-xe^x-2x-e^x-2}{e^x+2}=\frac{-xe^x-e^x}{e^x+2}$ وبما أن

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=0$ وهذا يعني أن المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحني (C_f).

3) وجدنا أن $f(x)-(x+1)=\frac{-xe^x-e^x}{e^x+}=-\frac{(x+1)e^x}{e}$ ومنه نستنتج أن

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
إشارة $f(x)-(x+1)$		$+$	0	$-$	

وعليه على المجال $]-\infty;-1[$ يكون (C_f) فوق (Δ') .

على المجال $]-1;+\infty[$ يكون (C_f) تحت (Δ') .

(C_f) و (Δ') يتقاطعان في النقة ذات الإحداثيين $(-1;0)$.

لدينا $f(x)-x=\frac{2-xe^x}{e\ \ +2}=\frac{g(x)}{e\ \ +2}$ ومن إشارة $g(x)$ المعينة سابقا نستنتج أن

(C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $]-\infty;\alpha[$ ويقع تحت (Δ) على المجال $]\alpha;+\infty[$. (C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقة ذات الإحداثيين $(\alpha;\alpha)$

4) أ- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x)=\frac{2(e^x+2)-e^x(2x+2)}{(e^x+2)}=\frac{2e^x+4-2xe^x-2e^x}{(e^x+\ \ )}$ أي أن

$f'(x)=\frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$ وعليه تكون إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$. ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

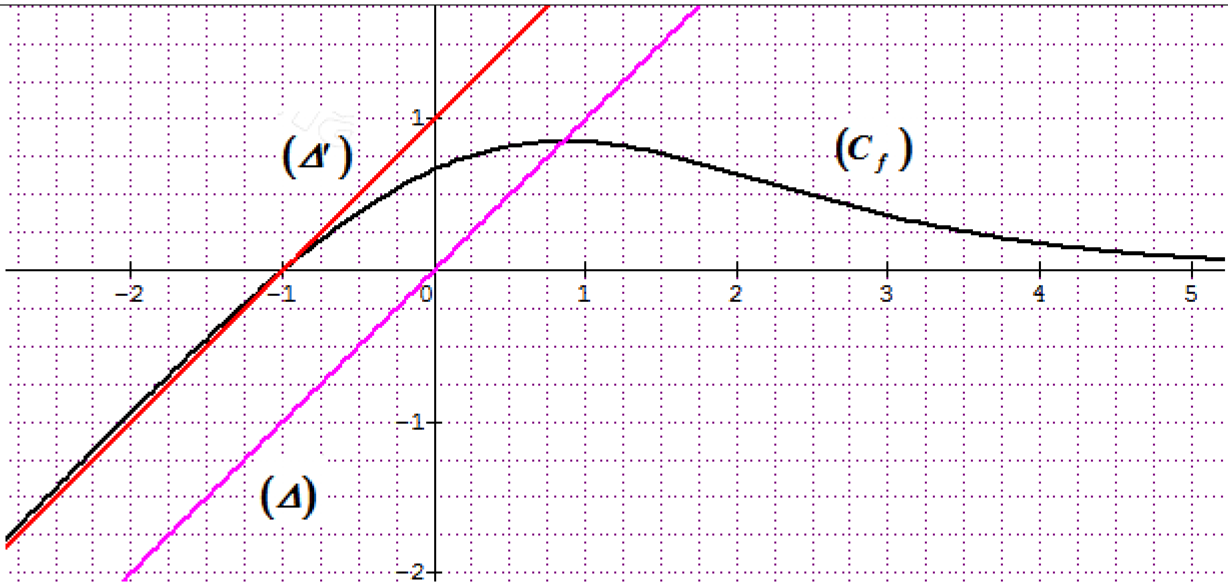
ب- لدينا $g(\alpha)=2-\alpha e^\alpha=0$ ومنه $e^\alpha=\frac{2}{\alpha}$ وعليه

يكون $f(\alpha)=\frac{2\alpha+2}{e^\alpha+2}=\frac{2\alpha+2}{\frac{2}{\alpha}+2}=\alpha$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	α	$\searrow$	0

5)



6) $f(x)=f(m)$ معناه $\begin{cases} y=f(x) \\ y=f(m) \end{cases}$ ومنه حلول المعادلة المعطاة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (d_m) الموازي لحامل محور التراتيب و الذي معادلة له $y=f(m)$. من جدول التغيرات ومن البيان نلاحظ أن

إذا كان $m\in]-\infty;-1]$ فإن $f(m)\in]-\infty;0]$ ، عندها المستقيم (d_m) يقطع (C_f) في نقطة واحدة وبالتالي المعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلا وحيدا في هذه الحالة .

إذا كان $m\in]-1;\alpha[$ فإن $f(m)\in]0;\alpha[$ ، والمعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلين متمايزين .

إذا كان $m=\alpha$ فإن $f(m)=f(\alpha)=\alpha$ والمعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلا مضاعفا ((d_α) مماس لـ (C_f))

إذا كان $m\in]\alpha;+\infty[$ فإن $f(m)\in]0;\alpha[$ ، والمعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلين متمايزين.

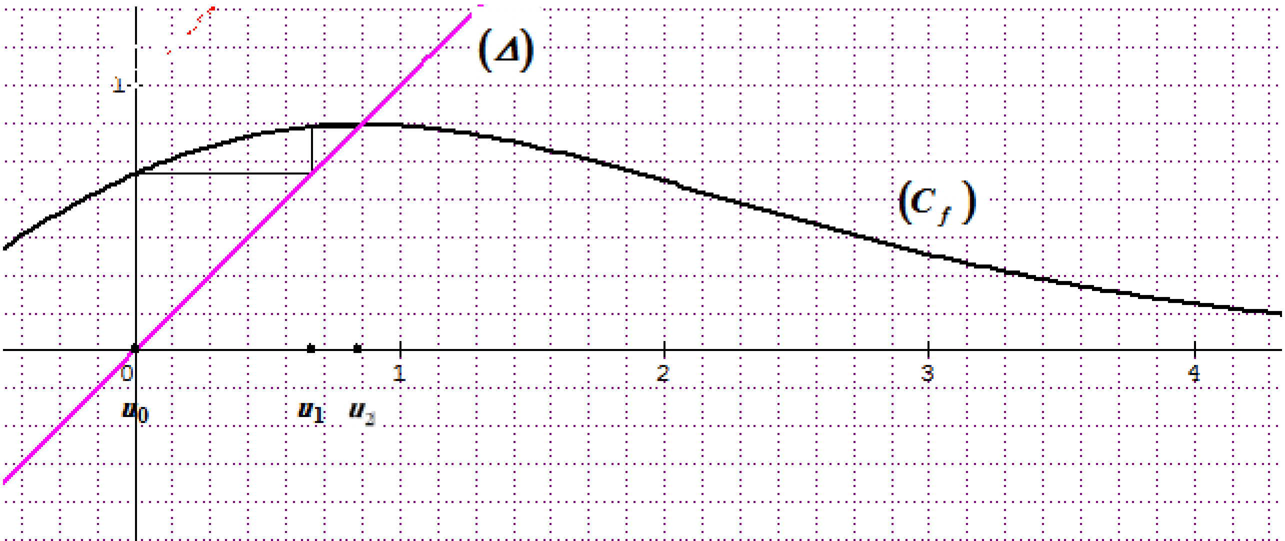
III)

1)لنثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le U_n<\alpha$

لدينا $0\le U_0=0<\alpha$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n=0$ ، نفرض الآن أن الخاصية $0\le U_n<\alpha$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n ، ونبرهن أن $0\le U_{n+1}<\alpha$. بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ و $0\le U_n<\alpha$ فإن $f(0)\le f(U_n)<f(\alpha)$ أي أن $0\le \frac{2}{3}=f(0)\le U_{n+1}=f(U_n)<f(\alpha)=\alpha$ وبالتالي $0\le U_{n+1}<\alpha$

إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le U_n<\alpha$.

2)



من الشكل يظهر أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما .

3) من السؤال II (3) وجدنا أن $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{e^{x}+2}$ وعليه

$$U_{n+1}-U_n=f(U_n)-U_n=\dfrac{g(U_n)}{U_n+2}$$

ومن إشارة $g(x)$ المعينة من السؤال I (3) ولكون $0\le U_n<\alpha$ نستنتج أن $U_{n+1}-U_n>0$ وعليه المتتالية (U_n) متزايدة تماما ، من جهة أخر ى المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى بالعدد α إذن فهي متقاربة .

لتكن ℓ هي نهاية المتتالية (U_n) ، لدينا $\lim U_{n+1}=\lim U_n=\ell$ ومنه $\ell-\ell=\dfrac{g(\ell)}{e^{\ell}+2}$ أي $g(\ell)=0$ ومن السؤال I (2) نجد أن $\ell=\alpha$.

المتتالية (U_n) متقاربة نحو α .

تصحيح اختبار مادة الرياضيات شعبة رياضيات : بكالوريا 2012

الموضوع الثاني

التمرين الأول

1) $\left(z^2+4\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$ معناه $z^2+4=0$ أو $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

بالنسبة للمعادلة $z^2+4=0$ واضح أنها تقبل حلين هما $z_1=2i\ ,\quad z_2=-2i\ ,$

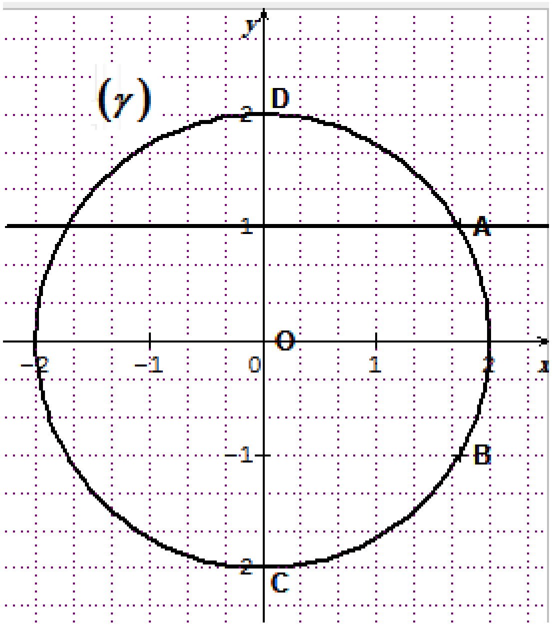
بالنسبة للمعادلة $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ ، نحسب المميز لدينا $\Delta=\left(-2\sqrt{3}\right)^2-4\times1\times4=-4=\left(2i\right)^2$ ومنه

$z_{\ }=\dfrac{2\sqrt{3}+2i}{2}=\sqrt{\ }+i\ ,\quad z_4=\dfrac{2\sqrt{3}-2i}{2}=\sqrt{3}-i\ ,$ ومنه

حلول المعادلة المعطاة هي $2i\ ,\ -2i$ و $\sqrt{3}+i\ ,\ \sqrt{3}-i\ ,$

2) **لدينا** $\left|z_A\right|=\left|\sqrt{3}+i\right|=2\ ,\ \left|z_B\right|=\left|\overline{z_A}\right|=2$ و $\left|z_C\right|=\left|-2i\right|=2\ ,\ \left|z_D\right|=\left|\overline{z_C}\right|=2$

إذن $\left|z_A\right|=\left|z_B\right|=\left|z_C\right|=\left|z_D\right|=2$ ومنه $OA=OB=OC=OD=2$ ، **إذن النقط** A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) التي مركزها O ونصف قطرها 2 .



لإنشاء النقطة A نرسم الدائرة (γ) والمستقيم الذي معادلة له $y=1$ عندئذ A **هي نقطة التقاطع التي فاصلتها موجبة .**

النقطة B **هي نظيرة** A **بالنسبة إلى حامل محور الفواصل .**

النقطتان C و D إحداثياتهما على الترتيب $(0;-2),(0;2)$.

3)أ- **لدينا** $\dfrac{z_A-z_C}{z_E-z_C}=\dfrac{\sqrt{3}+i+2i}{-\sqrt{3}+i+2i}=\dfrac{\sqrt{3}+3i}{-\sqrt{3}+3i}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

ب- **من السؤال السابق نجد** $z_A-z_C=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\left(z_E-z_C\right)$ **وهذا يعني أن النقطة** A **هي صورة النقطة** E **بالدوران الذي مركزه** C وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ (**عبارته** $z'+2i=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\left(z+2i\right)$ أو $z'=\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)z+\sqrt{3}-i$

جـ- **من** $\dfrac{z_A-z_C}{z_E-z_C}=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$ **نستنتج أن** $\left|\dfrac{z_A-z_C}{z_E-z_C}\right|=\left|e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right|=1$ و

ومنه $arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_E-z_C}\right)=arg\, e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$ أي $|z_A-z_C|=|z_E-z_C|$ أي $CA=CE$ و $ECA=\frac{\pi}{3}$

ومنه المثلث AEC متقايس الأضلاع .

د- التحويل $R\circ H$ هو تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

صورة الدائرة (γ) بالتحويل $R\circ H$ هي الدئرة (γ') التي مركزها O (مركز التشابه نقطة صامدة) ونصف قطرها 4 .

التمرين الثاني

1) **لدينا** $\overrightarrow{AC}(1;-1;0),\overrightarrow{AB}(0;-2;-1)$ **نفرض أن الشعاعين** $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ **مرتبطين خطيا ، عندئذ يوجد** $k\in\mathbb{R}$ **حيث** $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ **أي** $\begin{cases}1=0\times k\\-1=-2k\\0=-k\end{cases}$ **وهذا غير ممكن إذن** $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ **غير مرتبطين خطيا .**

وهذايعني أن النقط B,A **و** C ليست في استقامية فهي إذن تعين مستويا (P_1) . **الشعاعان** $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ **غير مرتبطين خطيا فهما يشكلان أساسا للمستوي** (P_1) **، وعليه لكل نقطة** $M(x;y;z)$ **من** (P_1) **يوجد عددان حقيقيان** λ,δ **حيث** $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\delta\overrightarrow{AC}$ **أي** $\begin{cases}x-1=0\times\lambda+\delta\\y-1=-2\lambda-\delta\\z-1=-\lambda+0\times\delta\end{cases}$ **أي**

$\begin{cases}x=1+\delta\\y=1-2\lambda-\delta\\z=1-\lambda\end{cases}$ **وهو تمثيل وسيطي للمستوي** (P_1) .

2) $M(x;y;z)\in(P_1)\cap(P_2)$ **معناه** $\begin{cases}x=1+\delta\\y=1-2\lambda-\delta\\z=1-\lambda\\x-2y-2z+6=0\end{cases}$ **أي**

$\begin{cases}x=1+\delta\\y=1-2\lambda-\delta\\z=1-\lambda\\1+\delta-2(1-2\lambda-\delta)-2(1-\lambda)+6=0\end{cases}$ **ومنه** $\begin{cases}x=1+\delta\\y=1-2\lambda-\delta\\z=1-\lambda\\\delta=-2\lambda-1\end{cases}$ **أي** $\begin{cases}x=-2\lambda\\y=2\\z=1-\lambda\end{cases},\lambda\in\mathbb{R}$

وهو تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) **مستقيم تقاطع المستويين** $(P_1),(P_2)$.

3) **لدينا** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}+\vec{i}-\vec{j}-2\vec{i}-\vec{k}=\vec{0}$ وهذا يعني أن النقطة O هي مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$.

4) **أ- بما أن النقطة** O هي مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$ **فإن** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO}$ **وعليه** $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=2\sqrt{3}$ **تكافيء** $\|\overrightarrow{MO}\|=2\sqrt{3}$ **أي** $OM=2\sqrt{3}$ **ومنه** (S) **هي سطح**

كرة مركزها O ونصف قطرها $2\sqrt{3}$ ، معادلة له هي $x^2+y^2+z^2=12$

ب- $M(x;y;z)\in(\Delta)\cap(S)$ معناه $\lambda\in\mathbb{R}$, ومنه $\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=2 \\ z=1-\lambda \\ x^2+y^2+z^2=12 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=2 \\ z=1-\lambda \\ (-2\lambda)^2+2^2+(1-\lambda)^2=12 \end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=2 \\ z=1-\lambda \\ (-2\lambda)^2+2^2+(1-\lambda)^2=12 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=2 \\ z=1-\lambda \\ 5\lambda^2-2\lambda-7=0 \end{cases}$ ومنه $D(2;2;2)$ و $E\left(-\frac{14}{5};2;-\frac{2}{5}\right)$.

ج- المثلث ODE متساوي الساقين $\left(OD=OE=2\sqrt{3}\right)$ لأن D و E نقطتان من (S) التي مركزها O ، إذن محور القطعة $[DE]$ يشمل O ، فإذا كانت F منتصف القطعة $[DE]$ فإن المسافة بين O و (Δ) هي المسافة OF ، لدينا $F\left(-\frac{2}{5};2;\frac{4}{5}\right)$ ومنه $OF=\sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2+(2)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{5}}$

المسافة بين O و (Δ) تساوي $\sqrt{\frac{24}{5}}$.

التمرين الثالث :

1)أ- لدينا $\boxed{u_0=16\equiv 2[7]}$, $u_1=6u_0-9\equiv 6\times 2-9[7]$ أي $\boxed{u_1\equiv 3[7]}$

$u_2=6u_1-9\equiv 6\times 3-9[7]$, أي $\boxed{u_2\equiv 2[7]}$, $u_3=6u_2-9\equiv 6\times 2-9[7]$, أي $\boxed{u_3\equiv 3[7]}$

$u_4=6u_3-9\equiv 6\times 3-9[7]$, أي $\boxed{u_4\equiv 2[7]}$.

ب- نلاحظ أن $\boxed{u_0\equiv 2[7]}$ ، $\boxed{u_2\equiv 2[7]}$ ، $\boxed{u_4\equiv 2[7]}$ نخمن أن $\boxed{u_{2k}\equiv 2[7]}$.

$\boxed{u_1\equiv 3[7]}$ ، $\boxed{u_3\equiv 3[7]}$ ، نخمن أن $\boxed{u_{2k+1}\equiv 3[7]}$. (أي $a=2$, $b=3$ المطلوبة في السؤال) .

2)أ- من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا $u_{n+2}=6u_{n+1}-9=6(6u_n-9)-9=36u_n-63$ ولكن $36\equiv 1[7]$ و $63\equiv 0[7]$ ومنه $_{n+2}\equiv {}_n[7]$

ب- $\boxed{u_{2k}\equiv 2[7]?}$ الخاصية محققة من أجل $k=0$ لأنه لدينا $\boxed{u_{2\times 0}=u_0\equiv 2[7]}$ (من السؤال1)ب- ، نفرض الآن أنه من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k}\equiv 2[7]$ ونبين أن $u_{2(k+1)}\equiv 2[7]$

لدينا $u_{2(k+1)}=u_{2k+2}\equiv u_{2k}[7]$ حسب السؤال 2)أ- ومن فرض التراجع لدينا $u_{2k}\equiv 2[7]$ إذن ; $u_{2(k+1)}\equiv 2[7]$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k}\equiv 2[7]$.

u

لدينا $u_{2k+1}=6u_{2k}-9\equiv 6\times 2-9[7]$ أي $u_{2k+1}\equiv 3[7]$.

3)أ- لدينا $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{9}{5}=6u_n-9-\frac{9}{5}=6u_n-\frac{54}{5}=6\left(u_n-\frac{9}{5}\right)=6v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية

أساسها 6 . وحدها الأول $v_0=u_0-\frac{9}{5}=16-\frac{9}{5}=\boxed{\frac{71}{5}}$.

ب- لدينا $v_n=\frac{71}{5}\times 6^n$ ومنه $\boxed{u_n=\frac{71}{5}\times 6^n+\frac{9}{5}}$ ،

ولكن $S_n=v_0+\frac{9}{5}+v_1+\frac{9}{5}+\dots+v_n+\frac{9}{5}=v_0+v_1+\dots+v_n+\frac{9}{5}(n+1)$

وعليه $v_0+v_1+\dots+v_n=v_0\frac{6^{n+1}-1}{6-1}=\frac{71}{5}\times\frac{6^{n+1}-1}{5}=\frac{71}{25}\times 6^{n+1}-\frac{71}{25}$

$S_n=\frac{71}{25}\times 6^{n+1}-\frac{71}{25}+\frac{9}{5}(n+1)=\boxed{\frac{71}{25}\times 6^{n+1}+\frac{9}{5}n-\frac{26}{5}}$.

التمرين الرابع

I (1)من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;3[$ لدينا $g'(x)=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{2x+1}{(x+\ )}$ وعليه الدالة

g متناقصة تماما على المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$ ومتزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2};3\right[$.

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}\frac{2(x+1)\ln(x+1)-x}{x+1}=\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ >}}\frac{2X\ln(X)-X+1}{}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x=0$

$g\left(-\frac{1}{2}\right)=2\ln\left(-\frac{1}{2}+1\right)-\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+1}=1-2\ln 2$ ، $g(3)=2\ln(3+1)-\frac{3}{3+1}=4\ln 2-\frac{3}{4}$

جدول تغيرات g

x	-1		$-\frac{1}{2}$		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1-2\ln 2$	$\nearrow$	$4\ln 2-\frac{3}{4}$

2)لدينا 0 $g(0)=2\ln(0+1)-\frac{0}{0+1}$ إذن الصفر هو حل للمعادلة $g(x)=0$ وهو الحل الوحيد على المجال

$\left[-\frac{1}{2};3\right]$ لأن الدالة g رتيبة تماما على هذا المجال . ومن جهة أخرى الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال

$\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$ وبالتالي على المجال $]-0.8;-0.7[$ و $g(-0.8)=2\ln(0.2)+\frac{0.8}{0.2}=2\ln(0.2)+4\simeq 0.78$ و

$g(-0.7)=2\ln(0.3)+\dfrac{0.7}{0.3}\simeq -0.07$ أي $g(-0.8)\times g(-0.7)<0$ وحسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة

$g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-0.8;-0.7[$ وبالتالي على المجال $\left]-1;-\dfrac{1}{2}\right[$.

الخلاصة : المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين هما الصفر والعدد α من المجال $]-0.8;-0.7[$.

3) إشارة $g(x)$

x	-1		α		0		3
إشارة $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4) أ- من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;3]$ لدينا $h'(x)=2g'(x)g(x)$.

ب- إشارة $h'(x)$

x	-1		α		$-\frac{1}{2}$		0		3
إشارة $g(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
إشارة $g'(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
إشارة $h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول تغيرات الدالة h

x	-1		α		$-\frac{1}{2}$		0		3
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1-4\ln 2+4\ln^2(2)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$16\ln^2(2)-6\ln 2+\frac{9}{16}$

II (1)

ليكن h عدد حقيقي غير معدوم $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{\frac{h^2}{\ln(h+1)}}{h}=\dfrac{h}{\ln(h+1)}$ ونعلم أن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$

ومنه $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\dfrac{h}{\ln(h+1)}=1$ وعليه الدالة h قابلة للاشتقاق عند الصفر و $h'(0)=1$ ،

وتكون معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند الصفر هي $y=1\times(x-0)+0$ أي $\boxed{y=x}$

2) أ- من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;0[\cup]0;3]$ لدينا

$$f'(x)=\frac{2x\ln(x+1)-x^2\times\frac{1}{x+1}}{[\ln(x+1)]^2}=\frac{x\left(2\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}\right)}{[\ln(x+1)]^2}=\frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$$

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-1;\alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;3]$.

ب- لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه $2\ln(\alpha+1)-\frac{\alpha}{\alpha+1}=0$ أي $\ln(\alpha+1)=\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}$

ولدينا $f(\alpha)=\frac{\alpha^2}{\ln(\alpha+1)}=\frac{\alpha^2}{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}}=2\alpha(\alpha+1)$

لدينا $\begin{cases}-0.8<\alpha<-0.7\\0.2<\alpha+1<0.3\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}1.4<-2\alpha<1.6\\0.2<\alpha+1<0.3\end{cases}$ وبالتالي $0.28<-2\alpha(\alpha+1)<0.48$ إذن

$-0.48<2\alpha(\alpha+1)<-0\ 28$ وأخيرا نجد أن $\boxed{-0.48<f(\alpha)<-0.28}$.

جـ- $f(3)=\frac{3^2}{\ln(3+1)}=\boxed{\frac{9}{2\ln 2}}$ ، بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\ln(x+1)=\lim\limits_{\substack{X\to0\\>}}\ln X=-\infty$ فإن $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=0}$.

جدول تغيرات الدالة f

x	-1		α		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$\frac{9}{2\ln 2}$

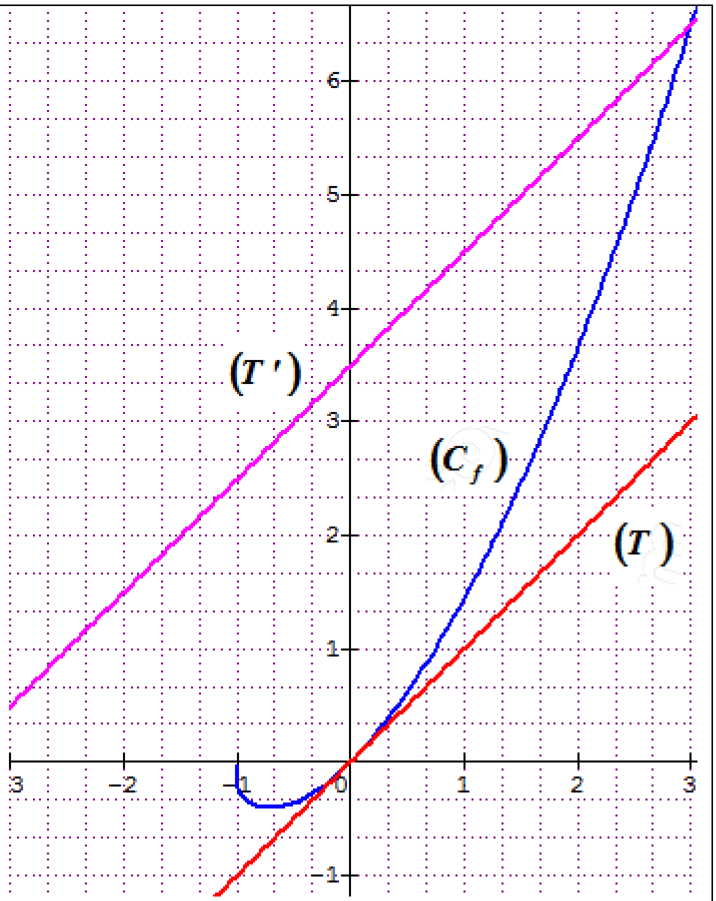
3)أ- نعرف على $]-1;3]$ الدالة k بـ $k(x)=x-\ln(x+1)$ ، عندئذ $k'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$ الدالة k متناقصة تماما على المجال $]-1;0]$ ومتزايدة تماما على $[0;3]$ ومنه $k(0)=0$ قيمة حدية صغرى للدالة k على $]-1;3]$ وبالتالي : من أجل كل x من المجال $]-1;3]$ ، $k(x)\ge 0$ أي $x-\ln(x+1)\ge 0$.

ب- لدينا $f(x)-x=\frac{x^2}{\ln(x+1)}-x=\frac{x(x-\ln(x+1))}{\ln(x+\ )}$ وجدنا أن $x-\ln(x+1)\ge 0$ ولكون x و $\ln(x+1)$ من نفس الإشارة ينتج أن $f(x)-x\ge 0$ أي أن المنحني (C_f) يقع فوق المماس (T) .

4) (T') يوازي (T) معناه معامل توجيه (T') يساوي 1 ، ومنه معادلة لـ (T') هي $y=x+d$ مع $d\in\mathbb{R}$ ، (T') يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3 معناه النقطة ذات الإحداثيين $\left(3;\frac{9}{2\ln 2}\right)$ تنتمي إلى (T') أي

$\frac{9}{2\ln 2}=3+d$ ومنه $d=\frac{9}{2\ln 2}-3$ أي أن $\boxed{y=x+\frac{9}{2\ln 2}-3}$ هي معادلة لـ (T') .

5)



6)حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y=x+m$ ،

إذا كان $m\in]-\infty;0[\cup\left]\frac{9}{2\ln 2}-3;+\infty\right[$ فإن المعادلة $f(x)=x+m$ لا تقبل حلا .

إذا كان $m=0$ فإن المعادلة $f(x)=x+m$ تقبل حلا مضاعفا .

إذا كان $m\in]0;1[$ فإن المعادلة $f(x)=x+m$ تقبل حلين متمايزين

إذا كان $m\in\left]1;\frac{9}{2\ln 2}-3\right]$ فإن المعادلة $f(x)=x+m$ تقبل حلا واحدا .