حل الموضوع الأول

التمرين 1 :

1 أ- نشر العبارة $(5x^2+6)(x+1)$:

$$(5x^2+6)(x+1)=5x^3+5x^2+6x+6 \quad ... \quad (1)$$

ب- إيجاد علاقة تربط بين x و y :

من جهة ، لدينا : $A=(5x^2+6)(2+2y) \quad ... \quad (2)$

ومن جهة أخرى ، لدينا : $A=\overline{5566}=5x^3+5x^2+6x+6 \quad ... \quad (3)$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $x+1=2+2y$ ومنه : $\boxed{x=2y+1}$

ب- حساب x و y :

لدينا : A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل $A=\overline{5566}$

وبالتالي فإن $x>6$ ، ونعلم أن x عدد أوّلي أصغر من 12

نستنتج أن : $x\in\{7;11\}$.

- عندما $x=7$ وبالتعويض في المعادلة $x=2y+1$ نجد : $y=3$.
- عندما $x=11$ وبالتعويض في المعادلة $x=2y+1$ نجد : $y=5$.

إذن : $(x;y)\in\{(7;3),(11;5)\}$.

- كتابة العدد A في نظام التعداد العشري :
- من أجل : $(x;y)=(7;3)$ نجد : $A=2008$
- من أجل : $(x;y)=(11;5)$ نجد : $A=7332$

2 أ- تعيين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584 :

تحليل العدد 584 إلى جداء عوامل أولية : $584=2^3\times 73$

نستنتج أن مجموعة الأعداد المطلوبة هي $\{1;2\}$.

ب- تعيين الأعداد الطبيعية a و b التي تحقق الشروط :

تذكير : إذا كان $PGCD(a;b)=d$ فإنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما بينهما بحيث : $a=d\times a'$ و $b=d\times b'$.

نفرض أن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b أي $PGCD(a;b)=d$

يمكن كتابة الجملة $\begin{cases}a+b=32\\ a^2+b^2=584\end{cases}$ كما يلي : $\begin{cases}da'+db'=32\\ (da')^2+(db')^2=584\end{cases}$

ومنه : $\begin{cases}d(a'+b')=32\\ d^2(a'^2+b'^2)=584\end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases}d \mid 32\\ d^2 \mid 584\end{cases}$

وحسب السؤال ② الفرع - أ- نستنتج أن : $d \in \{1;2\}$

- الحالة الأولى $d=1$:

تكتب الجملة $\begin{cases} d(a'+b')=32 \\ d^2(a'^2+b'^2)=584 \end{cases}$ عندئذ كما يلي : $\begin{cases} (a'+b')=32 \\ (a'^2+b'^2)=584 \end{cases}$

من $a'+b'=32$ ينتج $b'=32-a'$ وبالتعويض في $a'^2+b'^2=584$

نجد $2a'^2-64a'+440=0$ وبالقسمة على 2 ينتج $a'^2-32a'+220=0$

وبحل هذه المعادلة الأخيرة نحصل على : $a'=10$ أو $a'=22$

ومنه : $(a';b')\in\{(10;22),(22;10)\}$

وبالتالي : $(a;b)\in\{(10;22),(22;10)\}$

وبما أن $a>b$ نستنتج أن : $(a;b)=(22;10)$

- الحالة الثانية $d=2$:

بإتباع نفس الطريقة السابقة نجد : $(a';b')\in\{(5;11),(11;5)\}$

وبالتالي : $(a;b)\in\{(10;22),(22;10)\}$

وبما أن $a>b$ نستنتج أن : $(a;b)=(22;10)$

خلاصة : توجد ثنائية وحيدة $(a;b)$ حيث $a>b$ وتحقق $\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$

هي : $\boxed{(a;b)=(22;10)}$

التمرين الثاني :

① أ- حساب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء :

نسمي A الحادثة : « الحصول على 3 كريات بيضاء »

ومنه : $P(A)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{4}{120}=\dfrac{1}{30}$

ب- حساب احتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء :

نسمي B الحادثة : « الحصول على الأقل على كرية حمراء »

« الحصول على الأقل على كرية حمراء » معناه : « الحصول على : (كرية حمراء و كريتان غير حمراوين) أو (كريتان حمراوان و كرية غير حمراء) أو (ثلاث كريات حمراء) » .

ومنه : $P(B)=\dfrac{C_6^1\times C_4^2+C_6^2\times C_4^1+C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{36+60+20}{120}=\dfrac{116}{120}=\dfrac{29}{30}$

طريقة أخرى :

نسمي $\overline{B}$ الحادثة العكسية للحادثة B أي : $\overline{B}$ هي الحادثة : « الحصول على 3 كريات بيضاء » أي أن $\overline{B}$ هي الحادثة A ومنه : $P(\overline{B})=P(A)=\frac{1}{30}$.

إذن : $P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(A)=1-\frac{1}{30}=\frac{29}{30}$

(2) أ- القيم التي يأخذها المتغيّر العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 .

- قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X :

$P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$. $P(X=1)=\frac{C_4^1\times C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$

$P(X=2)=\frac{C_4^2\times C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$. $P(X=3)=P(A)=\frac{1}{30}$

إذن :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$	$\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$	$\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$	$\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$

- حساب الأمل الرياضي $E(X)$:

$$E(X)=x_0P_0+x_1P_1+x_2P_2+x_3P_3$$
$$=0\times\frac{20}{120}+1\times\frac{60}{120}+2\times\frac{36}{120}+3\times\frac{4}{120}=\frac{144}{120}=\frac{6}{5}=1.2$$

(3) حساب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء مرتين بالضبط :

سحب 3 كريات بيضاء من الكيس هي تجربة برنولي حيث أن المخرج S هو :

« الحصول على 3 كريات بيضاء » ومنه : $P=\frac{1}{30}$ ($P(S)=P(A)=\frac{1}{30}$) .

الخمس سحبات هي سحبات مستقلة ، و هذا يعني أننا أمام مخطط برنولي .

تذكير : $P(X=k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$

احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء مرتين بالضبط هو $P(X=2)$ حيث :

$$P(X=2)=C_5^2P^2(1-P)^{5-2}=10\times\left(\frac{1}{30}\right)^2\times\left(\frac{29}{30}\right)^3=\frac{10\times 29^3}{30^5}\approx 0.01$$

التمرين الثالث :

1 أ- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) :

تذكير : تكون $M(x;y;z)$ نقطة من (AB) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث : $\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AB}$. لدينا : $\overrightarrow{AB}(-2;1;-3)$ ومنه التمثيل الوسيطي التالي :

$$\begin{cases} x=2-2t \\ y=1+t \\ z=2-3t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

ب- إثبات أن (D) و (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي :

$\vec{u}(3;-1;2)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D) و $\overrightarrow{AB}(-2;1;-3)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (AB) . الشعاعان $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطيا (لا يوجد عدد حقيقي t بحيث $\overrightarrow{AB}=t\,\vec{u}$) ، نستنتج أن المستقيمين (D) و (AB) غير متوازيين وهذا يعني أنهما إما من نفس المستوي ومتقاطعان ، وإما ليسا من نفس المستوي .

لنبيّن أن المستقيمين (D) و (AB) غير متقاطعين :

للبحث عن نقط تقاطع (D) و (AB) نقوم بحل الجملة :

$$\begin{cases} 2+3t=2-2t' \\ 1-t=1+t' \\ 2t=2-3t' \end{cases}$$

من المعادلتين الأولى والثانية لهذه الجملة نجد : $t=0$ و $t'=0$ وبتعويض هاتين القيمتين في المعادلة الثالثة نحصل على $2=0$ و هذا مستحيل .

نستنتج أن المستقيمين (D) و (AB) غير متقاطعين .

إذن : المستقيمان (D) و (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي .

2 أ- تبيان أن الشعاع $\vec{n}(1;5;1)$ عمودي على المستوي (P) :

طريقة : لإثبات أن $\vec{n}$ عمودي على (P) يكفي إثبات أنه عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ باعتبارهما شعاعي توجيه للمستوي (P) .

لدينا : $\vec{n}(1;5;1)$ ، $\overrightarrow{AB}(-2;1;-3)$ و $\vec{u}(3;-1;2)$

ومنه : $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=1(-2)+5\times1+1(-3)=5-5=0$ وبالتالي : $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$

و $\vec{n}.\vec{u}=1\times3+5(-1)+1\times2=5-5=0$ وبالتالي : $\vec{n}\perp\vec{u}$

إذن : $\vec{n}$ عمودي على المستوي (P) أي أن $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (P) .

ب- كتابة معادلة للمستوي (P) :

$\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (P) وبالتالي فإن معادلة (P) من الشكل :

$x+5y+z+d=0$ حيث d عدد حقيقي .

وبما أن (AB) محتوى في (P) فإن $A\in(P)$ ومنه : $2+5\times1+2+d=0$

وبالتالي : $d=-9$.

إذن : معادلة للمستوي (P) هي : $\boxed{x+5y+z-9=0}$

جـ- تبيان أن المسافة بين نقطة M من (D) والمستوي (P) مستقلة عن موضع M:

تذكير : المسافة بين النقطة A ذات الإحداثيات $(x_0; y_0; z_0)$ والمستوي (P) ذي المعادلة $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب $d(A;(P))$ حيث :

$$\boxed{d(A;(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

ومنه : $d(M;(P))=\dfrac{|2+3t+5(1-t)+2t-9|}{\sqrt{1+25+1}}=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

إذن : $d(M;(P))=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ وهي ثابتة لا تتعلق بموضع النقطة M .

د- تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) مع المستوي (yoz) :

معادلة للمستوي (yoz) هي : $x=0$

لدينا : $\begin{cases} x=0 \\ x+5y+z-9=0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x=0 \\ 5y+z-9=0 \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} x=0 \\ z=-5y+9 \end{cases}$

وبوضع $y=\lambda$ نحصل على تمثيل وسيطي لـ (Δ) : $\begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=-5\lambda+9 \end{cases} \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

التمرين الرابع :

1 أ- دراسة تغيرات الدالة f :

- $f(1)=3$ و $f(2)=\dfrac{9}{4}$
- حساب $f'(x)$: $f'(x)=\dfrac{x^2-5}{2x^2}$
- إشارة $f'(x)$:

x	1		$\sqrt{5}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

إذن : الدالة f متناقصة على $[1;\sqrt{5}]$ ومتزايدة على $[\sqrt{5};5]$.

• جدول تغيرات الدالة f على المجال $[1;5]$:

x	1		$\sqrt{5}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	$\sqrt{5}$	$\nearrow$	3

ب- إنشاء المنحني (C) والمستقيم (Δ) : انظر الشكل .

2 أ- حساب u_1 و u_2 : $u_1=3$ و $u_2=\frac{7}{3}$.

ب- تمثيل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل : انظر الشكل .

ننطلق من الفاصلة $u_0=5$ ، ترتيب النقطة من المنحني (C) الموافق لهذه الفاصلة يعطينا u_1 . نقوم بنقل العدد u_1 إلى محور الفواصل ومن أجل هذا ، نستعمل (Δ).
وبالتالي فإن u_2 هو ترتيب النقطة من المنحني (C) ذات الفاصلة u_1 .
نقوم بنقل العدد u_2 إلى محور الفواصل ومن أجل هذا ، نستعمل المستقيم (Δ).

3 أ- البرهان بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \sqrt{5}$:

نسمي p_n الخاصية " $u_n \geq \sqrt{5}$ "

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $u_0 \geq \sqrt{5}$ أي : $5 \geq \sqrt{5}$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_n \geq \sqrt{5}$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $u_{n+1} \geq \sqrt{5}$

من فرضية التراجع : $u_n \geq \sqrt{5}$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $[\sqrt{5}; 5]$
نستنتج أن : $f(u_n) \geq f(\sqrt{5})$ أي : $u_{n+1} \geq \sqrt{5}$ (لأن : $f(\sqrt{5})=\sqrt{5}$ و $f(u_n)=u_{n+1}$) وعليه فإن : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \sqrt{5}$.

ب- تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$:

تذكير : (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$ معناه : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}-u_n \leq 0$

من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا : $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=-\frac{u_n^2-5}{2u_n}$

من السؤال (3) الفرع - أ- وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \sqrt{5}$

ومنه : $u_n^2 \geq (\sqrt{5})^2$ أي : $u_n^2 \geq 5$ ... (1)

كذالك : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n \geq \sqrt{5}$ ومنه : $u_n > 0$

وبالتالي : $2u_n > 0$ ... (2)

من (1) و (2) نستنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $-\frac{u_n^2-5}{2u_n} \leq 0$

أي : $u_{n+1}-u_n \leq 0$.

إذن : المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

طريقة أخرى :

تذكير : (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$ معناه : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

من السؤال (3) الفرع - أ- نستنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$

وبالتالي : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{u_n^2}\right)$

ومن السؤال (3) الفرع - أ- وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \sqrt{5}$

ومنه : $u_n^2 \geq (\sqrt{5})^2$ أي : $u_n^2 \geq 5$ وبالتالي : $\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{1}{5}$ ومنه : $\frac{5}{u_n^2} \leq \frac{5}{5}$

أي : $\frac{5}{u_n^2} \leq 1$ ومنه : $1+\frac{5}{u_n^2} \leq 1+1$ أي : $1+\frac{5}{u_n^2} \leq 2$

وأخيرا : $\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{u_n^2}\right) \leq 1$ أي : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

إذن : المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

- تقارب المتتالية (u_n) :

تذكير : كل متتالية محدودة من الأعلى ومتزايدة أو محدودة من الأسفل ومتناقصة هي متتالية متقاربة .

من السؤال ③ الفرع - أ- وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \sqrt{5}$
وهذا يعني أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل .
ومن السؤال ③ الفرع - ب- وجدنا أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.
نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة (متناقصة ومحدودة من الأسفل).

④ أ- البرهان أنه ، من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}-\sqrt{5} \leq \frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}\right)$:

من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ،

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-\sqrt{5} &= \frac{1}{2}\left(u_n+\frac{5}{u_n}\right)-\sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(u_n+\frac{5}{u_n}-2\sqrt{5}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}+\frac{5}{u_n}-\sqrt{5}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{u_n}-\sqrt{5}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}\right)+\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{u_n}-1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}\right)-\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{u_n-\sqrt{5}}{u_n}\right)
\end{aligned}$$

ومن السؤال ③ الفرع - أ- وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \sqrt{5}$

ومنه : $\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{u_n-\sqrt{5}}{u_n}\right) \geq 0$. نستنتج أن : $u_{n+1}-\sqrt{5} \leq \frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}\right)$.

إذن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}-\sqrt{5} \leq \frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}\right)$.

ب- استنتاج أن $u_n-\sqrt{5} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\sqrt{5}\right)$:

من السؤال السابق وجدنا أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ،

$$u_{n+1}-\sqrt{5} \leq \frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}\right)$$

$$\begin{cases} u_1-\sqrt{5} \le \frac{1}{2}\left(u_0-\sqrt{5}\right) : n=0 \text{ من أجل} \\ u_2-\sqrt{5} \le \frac{1}{2}\left(u_1-\sqrt{5}\right) : n=1 \text{ من أجل} \\ u_3-\sqrt{5} \le \frac{1}{2}\left(u_2-\sqrt{5}\right) : n=2 \text{ من أجل} \\ \vdots \\ u_{n-1}-\sqrt{5} \le \frac{1}{2}\left(u_{n-2}-\sqrt{5}\right) \\ u_n-\sqrt{5} \le \frac{1}{2}\left(u_{n-1}-\sqrt{5}\right) \end{cases}$$

بالضرب طرف في طرف ثم اختزال الحدود المتشابهة نحصل على :

$$\boxed{u_n-\sqrt{5} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\sqrt{5}\right)}$$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

تذكير بمبرهنة الحصر : (u_n)، (v_n) وَ (w_n) ثلاث متتاليات عددية ، l عدد حقيقي .

إذا كان ابتداء من رتبة معيّنة ، $v_n \le u_n \le w_n$ وكانت $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

تذكير : إذا كان $-1<q<+1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$ وبالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

من السؤال 3 الفرع - أ- وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \ge \sqrt{5}$

وبالتالي : $u_n-\sqrt{5} \ge 0$.

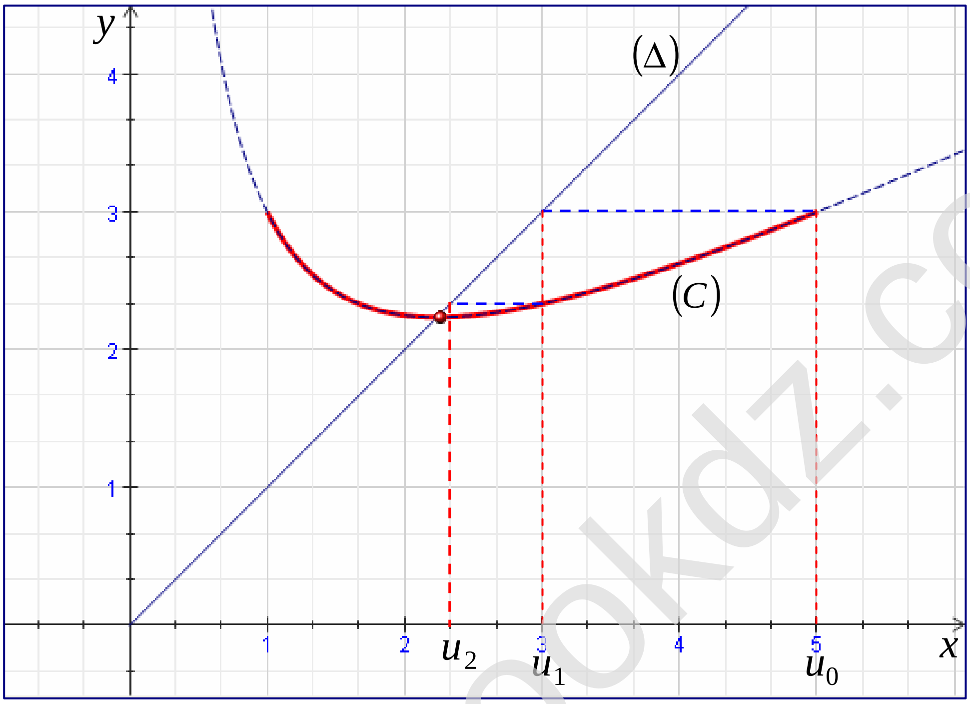
ومن السؤال 4 الفرع - ب- وجدنا أن : $u_n-\sqrt{5} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\sqrt{5}\right)$

ومنه : $0 \le u_n-\sqrt{5} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\sqrt{5}\right)$ وبما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

نستنتج أن : $0 \le \lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n-\sqrt{5}\right) \le 0$ وحسب مبرهنة الحصر نستنتج أن :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n-\sqrt{5}\right)=0$. إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\sqrt{5}$

● الرسم :



حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1 حل المعادلة $(45+45i)f(z)=23+45i-2z$:

لدينا : $(45+45i)f(z)=23+45i-2z$

ومنه : $(45+45i)\times\dfrac{z-i}{z-1}=23+45i-2z$

ومنه : $(45+45i)(z-i)=(23+45i-2z)(z-1)$

وبعد النشر والتبسيط والترتيب نحصل على المعادلة : $2z^2+20z+68=0$

وبالقسمة على 2 نجد : $z^2+10z+34=0$ ... (E)

مميز المعادلة (E) هو : $\Delta=-36=36i^2=(6i)^2$.

بما أن المميز هو عدد حقيقي سالب فإن هذه المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما $z'=-5-3i$ وَ $z''=-5+3i$

إذن : المعادلة المعطاة تقبل حلين هما : $z'=-5-3i$ وَ $z''=-5+3i$.

2 أ- تعيين مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا تماما :

طريقة أولى :

تذكير : التفسير الهندسي لـ $\left|\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right|$ وَ $\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)$:

إذا كانت A ، B وَ M صور الأعداد المركبة z_A ، z_B وَ z على الترتيب

حيث $z\neq z_B$ فإن :

$$\begin{cases}\left|\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right|=\dfrac{AM}{BM}\\ \arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)=(\overrightarrow{BM};\ \overrightarrow{AM})[2\pi]\end{cases}$$

لتكن النقطتان A وَ B صورتي العددين المركبين $z_A=1$ وَ $z_B=i$ على الترتيب

لدينا : $f(z)=\dfrac{z-i}{z-1}=\dfrac{z-z_B}{z-z_A}$

($f(z)$ حقيقي سالب تماما) يكافئ ($\arg(f(z))\equiv\pi\,[2\pi]$ و $z\neq z_A$ و $z\neq z_B$)

ومنه : $(\overrightarrow{AM}\,;\,\overrightarrow{BM})=\pi+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ وَ $M\neq A$ وَ $M\neq B$.

أي : $(\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB})=\pi+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ وَ $M\neq A$ وَ $M\neq B$.

إذن : مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا هي القطعة المستقيمة $[AB]$ ما عدا النقطتين A و B (أي : القطعة المفتوحة $]AB[$) .

● طريقة ثانية :

كتابة $f(z)$ على الشكل الجبري : نضع $z=x+iy$ حيث $(x;y)\in\mathbb{R}^2$.

$$f(z)=\frac{z-i}{z-1}=\frac{x+iy-i}{x+iy-1}=\frac{x+i(y-1)}{(x-1)+iy}\times\frac{(x-1)-iy}{(x-1)-iy}$$

$$=\frac{x^2+y^2-x-y+i\,(1-x-y)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$=\frac{x^2+y^2-x-y}{(x-1)^2+y^2}+\frac{(1-x-y)}{(x-1)^2+y^2}\,i$$

إذن : $f(z)=\dfrac{x^2+y^2-x-y}{(x-1)^2+y^2}+\dfrac{(1-x-y)}{(x-1)^2+y^2}\,i$

تذكير : ($f(z)$ حقيقي سالب تماما) يكافئ ($\operatorname{Im}(f(z))=0$ و $R\acute{e}(f(z))<0$)

ومنه : $\begin{cases}\dfrac{(1-x-y)}{(x-1)^2+y^2}=0\\[2mm]\dfrac{x^2+y^2-x-y}{(x-1)^2+y^2}<0\end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases}-x-y+1=0\\x^2+y^2-x-y<0\\(x-1)^2+y^2\neq0\end{cases}$

وأخيرا : $\begin{cases}-x-y+1=0\\\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2<\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\\(x\,;\,y)\neq(1;0)\end{cases}$

- مجموعة النقط M من المستوي حيث $-x-y+1=0$ هي المستقيم (AB) .

- مجموعة النقط M من المستوي حيث $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2<\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ هي القرص الدائري (C) الذي مركزه النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ ونصف قطره $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- تقاطع (AB) و (C) هي القطعة المفتوحة $]AB[$.

إذن : مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا هي القطعة المستقيمة $[AB]$ ما عدا النقطتين A و B (أي : القطعة المفتوحة $]AB[$) .

ب- حساب z_0 بحيث يكون $|f(z_0)|=1$ و $\arg(f(z_0))=\frac{3\pi}{2}$:

بما أن : $|f(z_0)|=1$ و $\arg(f(z_0))=\frac{3\pi}{2}$ فإن : $f(z_0)=e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i$

وبحل المعادلة : $\frac{z_0-i}{z_0-1}=-i$ نجد : $\boxed{z_0=1+i}$

3 أ- طبيعة المثلث ABC :

$AB=|z_B-z_A|=|i-1|==\sqrt{2}$ ، $AC=|z_C-z_A|=|z_0-1|=|i|=1$

وَ $BC=|z_C-z_B|=|z_0-i|=|1|=1$.

نلاحظ أن : $AC^2+BC^2=AB^2$ وَ $AC=BC$ ، نستنتج أن المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين .

- طريقة ثانية : يمكن الوصول إلى نفس النتيجة بملاحظة أن :
$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=0$ و $CA=CB$.

- طريقة ثالثة : المثلث ABC متساوي الساقين وَ قائما في C لأن :

$\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=i$ و $\begin{cases}|i|=1\\ \arg(i)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}CB=CA\\ (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

($\left|\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right|=\frac{CA}{CB}$ وَ $\arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)=(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})$)

ب- تعيين النقطة D نظيرة النقطة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) :

معادلة (AB) هي : $-x-y+1=0$ وبالتالي : $\overrightarrow{AB}(1;-1)$ شعاع توجيه له .

تكون النقطة D نظيرة للنقطة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) إذا وفقط إذا كان :
$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ وَ منتصف القطعة $[CD]$ تنتمي إلى المستقيم (AB) .

وبحل الجملة : $\begin{cases} 1(x_D-1)-1(y_D-1)=0 \\ -\dfrac{x_C+x_D}{2}-\dfrac{y_C+y_D}{2}+1=0 \end{cases}$ نحصل على : $\begin{cases} x_D=0 \\ y_D=0 \end{cases}$

إذن : $D(0;0)$ أي أن نظيرة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) هي النقطة O .

- استنتاج طبيعة الرباعي $ACBD$:

بما أن النقطتين C و D متناظرتين بالنسبة إلى المستقيم (AB) فإن $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$
أي أن قطري الرباعي $ACBD$ متعامدان ، وزيادة على ذلك فهما متقايسان لأن :
$AB=CD=\sqrt{2}$. نستنتج أن الرباعي $ACBD$ هو مربع .

التمرين الثاني :

1 تعيين α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية :

تذكير : تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث :
من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=q.v_n$

لدينا : $u_{n+1}=3u_n+2n+1$ ولدينا : $v_n=u_n+\alpha n+\beta$

ومنه : $v_{n+1}=u_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=3u_n+2n+1+\alpha n+\alpha+\beta$
$=3u_n+(\alpha+2)n+1+\alpha+\beta$

ومن جهة أخرى ، لدينا : $q\,v_n=q\,u_n+q\alpha n+q\beta$

وبالتالي : $3u_n+(\alpha+2)n+1+\alpha+\beta=q\,u_n+q\alpha n+q\beta$

بالمطابقة : $\begin{cases} 3=q \\ \alpha+2=q\alpha \\ 1+\alpha+\beta=q\beta \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} q=3 \\ \alpha+2=3\alpha \\ 1+\alpha+\beta=3\beta \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} q=3 \\ \alpha=1 \\ \beta=1 \end{cases}$

إذن : من أجل $\alpha=\beta=1$ تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=3$ وحدّها الأول $v_0=1$.

2 كتابة v_n بدلالة n : $v_n=v_0\times q^n=1\times 3^n=3^n$

- استنتاج u_n بدلالة n :

من المساواة : $v_n=u_n+n+1$ نستنتج أن : $u_n=v_n-n-1=3^n-n-1$

3 حساب المجموع S_n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \times \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right)$$

- حساب المجموع S'_n :

نضع : $u_n = v_n + (-n-1) = v_n + w_n$ حيث : $v_n = 3^n$ وَ $w_n = -n-1$

واضح أن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=3$ وحدّها الأول $v_0 = 1$.

كذلك : (w_n) متتالية حسابية أساسها $q' = -1$ وحدّها الأول $w_0 = -1$.

ومنه :

$$\begin{aligned} S'_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ &= (v_0 + w_0) + (v_1 + w_1) + \ldots + (v_n + w_n) \\ &= (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (w_0 + w_1 + \cdots + w_n) \end{aligned}$$

ونعلم أن : $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = S_n = \frac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right)$

وَ $w_0 + w_1 + \cdots + w_n = \frac{n+1}{2}\left(w_0 + w_n\right) = -\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

إذن : $S'_n = \frac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right) - \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} - (n+1)(n+2) - 1\right)$

4 أ- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 :

$3^0 \equiv 1[5]$ ، $3^1 \equiv 3[5]$ ، $3^2 \equiv 4[5]$ ، $3^3 \equiv 2[5]$ ، $3^4 \equiv 1[5]$.

من العلاقة : $3^4 \equiv 1[5]$ نستنتج أن: $(3^4)^k \equiv 1^k [5]$ أي : $3^{4k} \equiv 1[5]$ مع $k \in \mathbb{N}$

$3^{4k+1} \equiv 3[5]$ ، $3^{4k+2} \equiv 4[5]$ ، $3^{4k+3} \equiv 2[5]$

إذن : بواقي قسمة 3^n على 5 دورية ودورها 4 ونلخصها في الجدول الآتي :

في هذا الجدول يدلّ k على عدد طبيعي .

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
البواقي	1	3	4	2

ب- تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها u_n مضاعفا للعدد 5 :

لدينا : $u_n = 3^n - n - 1$ ومنه : $u_n \equiv 0[5]$ يكافئ $3^n - n - 1 \equiv 0[5]$

ـ إذا كان $n = 4k$: $3^{4k} - 4k - 1 \equiv 0[5]$ ومنه : $1 - 4k - 1 \equiv 0[5]$

أي : $-4k\equiv 0[5]$ وبالتالي : $k\equiv 0[5]$ ومنه : $k\equiv 5k'$ حيث : $k'\in \mathbb{N}$

في هذه الحالة يكون : $n=20k'$ حيث : $k'\in \mathbb{N}$.

- إذا كان $n=4k+1$: $3^{4k+1}-(4k+1)-1\equiv 0[5]$

ومنه : $3-4k-2\equiv 0[5]$ أي : $-4k\equiv -1[5]$ وبما أن : $-4\equiv 1[5]$

و $-1\equiv 4[5]$ ينتج : $k\equiv 4[5]$ ومنه : $k\equiv 5k'+4$ حيث : $k'\in \mathbb{N}$

في هذه الحالة يكون : $n=20k'+17$ حيث : $k'\in \mathbb{N}$.

- إذا كان $n=4k+2$: $3^{4k+2}-(4k+2)-1\equiv 0[5]$

ومنه : $4-4k-3\equiv 0[5]$ أي : $-4k\equiv -1[5]$ وبما أن : $-4\equiv 1[5]$

و $-1\equiv 4[5]$ ينتج : $k\equiv 4[5]$ ومنه : $k\equiv 5k'+4$ حيث : $k'\in \mathbb{N}$

في هذه الحالة يكون : $n=20k'+18$ حيث : $k'\in \mathbb{N}$.

- إذا كان $n=4k+3$: $3^{4k+3}-(4k+3)-1\equiv 0[5]$

ومنه : $2-4k-4\equiv 0[5]$ أي : $-4k\equiv 2[5]$ وبما أن : $-4\equiv 1[5]$

ينتج : $k\equiv 2[5]$ ومنه : $k\equiv 5k'+2$ حيث : $k'\in \mathbb{N}$

في هذه الحالة يكون : $n=20k'+11$ حيث : $k'\in \mathbb{N}$.

التمرين الثالث :

(1) كتابة معادلة للمستوي (P_2) :

لدينا : $\begin{cases} x=1+2\alpha+\beta \\ y=1+\alpha \\ z=5+\alpha+\beta \end{cases}$ أي : $\begin{cases} y=1+\alpha \\ x=1+2\alpha+\beta \\ z=5+\alpha+\beta \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} \alpha=y-1 \\ x=1+2(y-1)+\beta \\ z=5+y-1+\beta \end{cases}$ أي : $\begin{cases} \alpha=y-1 \\ \beta=x-2y+1 \\ z=4+y+x-2y+1 \end{cases}$

وبتبسيط المعادلة الثالثة نحصل على المعادلة : $x-y-z+5=0$

إذن : معادلة للمستوي (P_2) هي : $x-y-z+5=0$

(2) تعيين $\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$:

معادلة للمستوي (P_1) هي : $x+2y-z-2=0$ ومنه : $\overrightarrow{n_1}(1;2;-1)$

معادلة للمستوي (P_2) هي : $x-y-z+5=0$ ومنه : $\overrightarrow{n_2}(1;-1;-1)$

(3) تبيان أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان :

لدينا : $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=1\times1+2(-1)+(-1)(-1)=2-2=0$ ومنه : $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$

إذن : المستويان (P_1) و (P_2) متعامدان .

4 أ- حساب d_1 و d_2 :

تذكير : المسافة بين النقطة A ذات الإحداثيات $(x_0;y_0;z_0)$ والمستوي (P) ذي المعادلة $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب $d(A;(P))$ حيث :

$$\boxed{d(A;(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

ومنه :
$$\begin{cases} d_1=\dfrac{|3+2\times1-1-2|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3} \\ d_2=\dfrac{|3-1\times1-1+5|}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3} \end{cases}$$

ب- استنتاج المسافة d_3 بين النقطة A والمستقيم (Δ) تقاطع (P_1) و (P_2) :

نعلم أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان و (Δ) مستقيم تقاطعهما . النقطة A لا تنتمي إلى (P_1) ولا تنتمي إلى (P_2) .

المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) هي الطول AH حيث H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) .

لتكن A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_2) ، وبالتالي فإن المثلث $AA'H$ قائم في A' ، وحسب مبرهنة فيثاغورث :

$$d_3^{\,2}=AH^2=d_1^{\,2}+d_2^{\,2}=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2=\frac{114}{9}$$

إذن : $d_3=\dfrac{\sqrt{114}}{3}$

5 أ- تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) بدلالة الوسيط الحقيقي λ :

لدينا : $\begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ x-y-z+5=0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x=z-2y+2 \\ (z-2y+2)-y-z+5=0 \end{cases}$

وبالتالي : $\begin{cases} x=z-2y+2 \\ y=\dfrac{7}{3} \end{cases}$ وأخيرا : $\begin{cases} x=z-2\times\dfrac{7}{3}+2=z-\dfrac{8}{3} \\ y=\dfrac{7}{3} \end{cases}$

وبوضع $z=\lambda$ نحصل على التمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases} x=\lambda-\frac{8}{3} \\ y=\frac{7}{3} \\ z=\lambda \end{cases} \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

ب- حساب AM^2 بدلالة λ :

لدينا : $\overrightarrow{AM}(x-3\,;y-1;\,z-1)$

ومنه :

$$\begin{aligned} AM^2 &=(x-3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \\ &=\left(\lambda-\frac{8}{3}-3\right)^2+\left(\frac{7}{3}-1\right)^2+(\lambda-1)^2 \\ &=2\lambda^2-\frac{40}{3}\lambda+\frac{314}{9} \end{aligned}$$

- استنتاج ثانية المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) :

المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) هي أقصر مسافة بين A و (Δ) ، هذه المسافة هي AH حيث H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) .

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(\lambda)=2\lambda^2-\frac{40}{3}\lambda+\frac{314}{9}$

* دراسة اتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(\lambda)=4\lambda-\frac{40}{3}$

($f'(\lambda)=0$) يكافئ ($4\lambda-\frac{40}{3}=0$) ومنه : $\lambda=\frac{10}{3}$

الدالة f متناقصة على $]-\infty;\frac{10}{3}]$ ومتزايدة على $[\frac{10}{3};+\infty[$ وتقبل قيمة صغرى من أجل $\lambda=\frac{10}{3}$. عندئذ تكون المسافة AM صغرى (أصغرية) .

النقطة الموافقة لهذه القيمة الصغرى هي $H\left(\frac{2}{3};\frac{7}{3};\frac{10}{3}\right)$.

وبالتالي فإن : $AH=\sqrt{\left(\frac{2}{3}-3\right)^2+\left(\frac{7}{3}-1\right)^2+\left(\frac{10}{3}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{114}}{3}$

إذن : $AH=\frac{\sqrt{114}}{3}$ (لاحظ أن $d_3=AH=\frac{\sqrt{114}}{3}$)

التمرين الرابع :

(1) دراسة تغيّرات الدالة f :

- النهايات : $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- حساب $f'(x)$: $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}$
- إشارة $f'(x)$: من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x) > 0$.

إذن : الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

- جدول التغيرات :

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

(2) أ- تبيان أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته $y = x$:

- بما أن : $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty$ نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x = -1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

- تذكير : إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي : $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ وكانت $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ فإن المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$.

لدينا : $f(x) = x - \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$ وهي من الشكل $f(x) = ax + b + \varphi(x)$

وبما أن $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{\sqrt{x+1}} = 0$ نستنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب- دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) :

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f(x)-x=-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$ وبالتالي فإن إشارة الفرق $f(x)-x$ هي إشارة $-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$. وبما أنه ، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}<0$ نستنتج أن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (D).

3 أ- تبيان أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $1.3<x_0<1.4$:

تذكير بمبرهنة القيم المتوسطة . إذا كان :

❶ f مستمرة على المجال $[a;b]$ ؛

❷ f رتيبة تماما على المجال $[a;b]$ ؛

❸ $f(a)\times f(b)<0$.

تحليليا : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 من المجال $]a;b[$.

هندسيا : المنحنى الممثل للدالة f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]a;b[$.

من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أنها مستمرة ومتزايدة تماما على $[1.3;1.4]$ ، زيادة على ذلك : $f(1.3)=-0.01$ و $f(1.4)=0.10$ وبالتالي : $f(1.3)\times f(1.4)<0$. نستنتج أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث : $1.3<x_0<1.4$.

ب- تعيين معادلة (Δ) مماس للمنحنى (C_f) عند نقطة تقاطعه مع محور التراتيب :

تذكير : معادلة مماس المنحنى الممثل لدالة f عند النقطة ذات الفاصلة a هي :

$$y=f'(a).(x-a)+f(a)$$

- تعيين نقطة تقاطع (C_f) مع محور التراتيب :

من أجل : $x=0$ نجد : $f(0)=-2$ وبالتالي (C_f) يقطع محور التراتيب في النقطة $B(0;-2)$.

- كتابة معادلة المماس (Δ) عند النقطة B :

معادلة (Δ) من الشكل : $y=f'(a).(x-a)+f(a)$ حيث :

$f(a)=f(0)=-2$ وَ $f'(a)=f'(0)=2$ ومنه : $y=2(x-0)-2$.

إذن : معادلة المماس (Δ) هي $y=2x-2$.

جـ- رسم (Δ) و (C_f) : انظر الشكل .

④ إيجاد F الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغيّر x :

تذكير : إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I وكان ، من أجل كل x من I ، $u(x)>0$ تكون $2\sqrt{u}+c$ ($c\in\mathbb{R}$) دالة أصلية للدالة $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ على I .

لدينا : $f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ و $I=]-1;+\infty[$.

الدالة f مستمرة على $]-1;+\infty[$ وبالتالي فهي تقبل دوالا أصلية على هذا المجال

الدالة $u:x\mapsto x+1$ قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ ومن أجل كل x من هذا المجال : $u'(x)=1$ ، يمكن أن نكتب : $-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ على الشكل $-2\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$

ونعلم أن $2\sqrt{u}$ هي دالة أصلية للدالة $\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

إذن : مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $]-1;+\infty[$ هي الدوال :

$F(x)=\frac{1}{2}x^2-2\times2\sqrt{x+1}+c$ حيث c ثابت حقيقي .

ونعلم أن $F(0)=0$ ومنه : $c=4$.

إذن : $F(x)=\frac{1}{2}x^2-4\sqrt{x+1}+4$

⑤ تبيان كيفية إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) :

تذكير : $|f(x)|=\begin{cases} f(x) & ;\ f(x)\geq 0 \\ -f(x) & ;\ f(x)\leq 0 \end{cases}$

ومنه : $g(x)=\begin{cases} f(x) & ;\ x\in[x_0;+\infty[\\ -f(x) & ;\ x\in]-1;x_0] \end{cases}$

- إذا كان $x\in[x_0;+\infty[$ فإن $g(x)=f(x)$ ومنه : (C_g) ينطبق على (C_f) .

- إذا كان $x\in]-1;x_0]$ فإن $g(x)=-f(x)$ ومنه : (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل .

- رسم (C_g) : انظر الشكل .

⑥ المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة $g(x)=m^2$:

- إذا كان : $m^2=0$ أي : $m=0$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا موجبا .
- إذا كان : $m^2=2$ أي : $m\in\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$ فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما موجب والآخر معدوم .
- إذا كان : $0<m^2<2$ أي : $m\in\left]-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين .
- إذا كان : $m^2>2$ أي : $m\in\left]-\infty;-\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2};+\infty\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

● الرسم :