حلول موضوع اختبار بكالوريا 2010 في مادة الرياضيات

شعبة : اداب و فلسفة ، لغات اجنبية

من اعداد: الأستاذ ج حنيفي

مفتش التربية الوطنية لمادة الرياضيات

الموضوع الأوّل:

التمرين الأوّل:

1 : أ ــ تعيين باقي قسمة كل من a و b على 7 :

لدينا: $a = 2010 = 7 \times 287 + 1$ ؛ اي: باقي قسمة a على 7 هو 1 .

و لدينا: $b = 1431 = 7 \times 204 + 3$ ؛ اي: باقي قسمة b على 7 هو 3 .

ب ــ استنتاج باقي قسمة $a+2b$ على 7:

لدينا: $\begin{cases} a \equiv 1[7] \\ b \equiv 3[7] \end{cases}$ ، و يكون: $\begin{cases} a \equiv 1[7] \\ 2b \equiv 6[7] \end{cases}$ ، و منه : $a+2b \equiv 7[7]$ ؛ اي: $a+2b \equiv 0[7]$

اذن: باقي قسمة $a+2b$ على 7 هو 0 .

معناه: $a+2b$ يقبل القسمة على 7.

جـ ــ التحقق من انّ: $a^3 \equiv 1[7]$ و $b^3 \equiv 1[7]$:

لدينا: $\begin{cases} a \equiv 1[7] \\ b \equiv 3[7] \end{cases}$ ، فيكون: $\begin{cases} a^3 \equiv 1[7] \\ b^3 \equiv 27[7] \end{cases}$ ، و لدينا : $27 \equiv 6[7]$ ، اذن: $\begin{cases} a^3 \equiv 1[7] \\ b^3 \equiv 6[7] \end{cases}$.

استنتاج انّ: $a^3 + b^3 \equiv 0[7]$:

لدينا: $\begin{cases} a^3 \equiv 1[7] \\ b^3 \equiv 6[7] \end{cases}$.

و منه : $a^3 + b^3 \equiv 7[7]$ ؛ اي: $a^3 + b^3 \equiv 0[7]$.

2 : تعيين الأعداد الطبيعية n التي تحقق $n + 2010^3 \equiv 1431[7]$:

لدينا: $1431 \equiv 3[7]$ و $2010^3 \equiv 1[7]$

فيكون: $n + 1 \equiv 3[7]$

و يكون: $n \equiv 2[7]$

اذن: $n \equiv 7k + 2 \ ; \ k \in \mathbb{N}$

استنتاج قيم n الأصغر من او تساوي 16 :

لدينا $n \leq 16$ ، فيكون: $7k + 2 \leq 16$

و يكون: $7k \leq 14$

و منه: $k \leq 2$

اذن: $k \in \{0 \ ; \ 1 \ ; \ 2\}$

و منه : $k \in \{2 \ ; \ 9 \ ; \ 16\}$

التمرين الثاني:

(I

1: تعيين الأساس r و الحد الأول u_0:

لدينا: $\begin{cases} u_{10} = 31 \\ u_{15} = 46 \end{cases}$ ، فيكون: $\begin{cases} u_0 + 10r = 31 \;......(1) \\ u_0 + 15r = 46 \;......(2) \end{cases}$

بطرح (1) من (2) ، يكون: $15r - 10r = 46 - 31$.

و يكون: $5r = 15$

و منه: $r = \dfrac{15}{5}$

اذن: $r = 3$

و بالتعويض بـــ $r = 3$ في (1) ، نجد: $u_0 + 10 \times 3 = 31$ ، و يكون: $u_0 + 30 = 31$

و منه: $u_0 = 31 - 30$

اذن: $u_0 = 1$

2: كتابة u_n بدلالة n :

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ، و منه: $u_n = 1 + 3n$

3: اثبات انّ 6028 حدّ من حدود المتتالية (u_n):

لنحل المعادلة $u_n = 6028$ ، فيكون: $1 + 3n = 6028$ ، و يكون: $3n = 6028 - 1$

و يكون: $3n = 6027$

و منه : $n = \dfrac{6027}{3}$

و يكون: $n = 2009$

اذن: 6028 حدّ من حدود المتتالية (u_n) و هو الحدّ u_{2009} (اي: الحد الذي رتبته 2010)

4: حساب المجموع $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots u_{2009}$

لدينا: $S = \dfrac{(2009 - 0 + 1)}{2}(u_0 + u_{2009})$ ، و يكون: $S = \dfrac{2010}{2}(1 + 6028)$

و منه: $S = 1005 \times 6029$ ، اذن: $S = 6059145$

(II

1: اثبات انّ المتتالية (v_n) هندسية و تعيين اساسها q و حدها الأول v_0:

لدينا: $v_n = 2 \times 8^n$ ، و منه: $v_{n+1} = 2 \times 8^{n+1}$

فيكون: $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2 \times 8^{n+1}}{2 \times 8^n} = \dfrac{2 \times 8 \times 8^n}{2 \times 8^n} = 8$

و منه: $v_{n+1} = 8v_n$

اذن : المتتالية (v_n) هندسية ، اساسها $q = 8$ و حدها الأول $v_0 = 2 \times 8^0 = 2 \times 1$ ، اي: $v_0 = 2$.

2: حساب حساب المجموع $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots v_n$

لدينا: $S' = v_0 \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ ، فيكون: $S' = 2\dfrac{8^{n+1} - 1}{8 - 1}$ ، اذن: $S' = \dfrac{2}{7}(8^{n+1} - 1)$.

التمرين الثالث:

لدينا: $f(x)=2x^3-9x^2+12x-5$

1: حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3)=-\infty$

2: دراسة تغيرات الدالة f :

من اجل كلّ عدد حقيقي x ، لدينا: $f'(x)=6x^2-18x+12$

لدينا: $f'(x)=0$ يعني $6x^2-18x+12=0$

و يكون: $x^2-3x+2=0$

لدينا: $\Delta=(-3)^2-4(1)(2)=9-8=1$

انّ $\Delta\succ 0$ ، فتقبل المعادلة حلين متكايزين ، هما: $x_1=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1$ و $x_1=\frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2$.

x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3: اثبات انّ $I\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ نقطة انعطتف:

من اجل كلّ عدد حقيقي x ، لدينا: $f''(x)=12x-18$

لدينا: $f''(x)=0$ يعني $12x-18=0$ ، و منه: $x=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$

و منه: من اجل $x\in\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$ يكون $f''(x)\prec 0$

و من اجل $x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ يكون $f''(x)\succ 0$

اذن: (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي $I\left(\frac{3}{2};f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ ، و يكون : $I\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

4: معادلة المماس (Δ) في النقطة I :

لدينا : $y=f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)$

و لدينا: $f'\left(\frac{3}{2}\right)=6\times\frac{9}{4}-18\times\frac{3}{2}+12=\frac{27}{2}-27+12=\frac{27}{2}-15$

و يكون: $f'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27-30}{2}=-\frac{3}{2}$

فتكون معادلة (Δ): $y=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}$

و يكون: $y=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{1}{2}$

اذن: $(\Delta):y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}$

5: التحقق انّ $f(x)=(x-1)^2(2x-5)$

لدينا: $(x-1)^2(2x-5)=(x^2-2x+1)(2x-5)=2x^3-5x^2-4x^2+10x+2x-5$

و يكون: $(x-1)^2(2x-5)=2x^3-9x^2+12x-5=f(x)$ **(و هو المطلوب)**

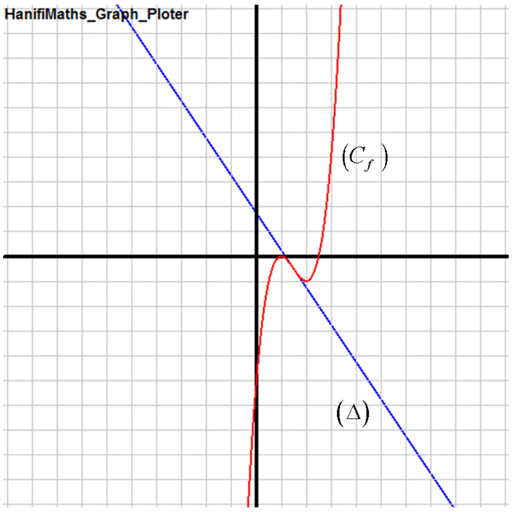
استنتاج تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل:

لدينا: $f(x)=0$ يعني $(x-1)^2(2x-5)=0$

و منه: $x-1=0$ او $2x-5=0$

و يكون: $x=1$ او $x=\frac{5}{2}$

اذن: (C_f) يتقاطع مع حامل محور الفواصل في نقطتين هما: $A(1;0)$ و $B\left(\frac{5}{2};0\right)$.



حلول موضوع اختبار بكالوريا 2010 في مادة الرياضيات

شعبة : اداب و فلسفة ، لغات اجنبية

من اعداد: الأستاذ ج حنيفي

مفتش التربية الوطنية لمادة الرياضيات

الموضوع الثاني:

التمرين الأوّل:

1: باقي القسمة الإقليدية للعدد -203 على 5 هو: 2 .

لأنّ : $-203=5(-41)+2$.

2: اذا كان باقي قسمة x على 7 هو 5 ، فانّ باقي قسمة $2x+5$ على 7 هو: 1

لأنّ: اذا كان $x\equiv5[7]$ يكون: $2x\equiv10[7]$ ، و منه: $2x\equiv3[7]$ ، و يكون: $2x+5\equiv8[7]$ ، اي: $2x+5\equiv1[7]$

3:أ ــ الدالة g متزايدة تماما $\mathbb{R}$.

لأنّ: من اجل كلّ عدد حقيقي x ، يكون $g'(x)=3x^2+3$ و نلاحظ $g'(x)\succ0$

ب ــ (C_g) يقبل نقطة انعطاف احداثياها $(0;4)$.

لأنّ: $g''(x)=6x$ تنعدم عند 0 مغيرة اشارتها و $g(0)=4$

التمرين الثاني:

1: أ ــ تعيين $f'(1)$ و $f'(-1)$:

نلاحظ من الشكل انّ (C_f) يقبل في النقطتين اللتين فاصلتاهما 1 و -1 مماسين يوازيان محور الفواصل.

اذن: $f'(1)=0$ و $f'(-1)=0$

ب: تعيين صورتي العددين -2 و -1 بالدالة f :

من الشكل ينتج: $f(-2)=0$ و $f(-1)=-4$.

جــ: جدول تغيرات الدالة f:

x	-2		-1		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-4	↗	0	↘	-4

2: المقارنة بين العددين $f\left(\frac{3}{2}\right)$ و $f\left(\sqrt{3}\right)$:

انّ العددين $\frac{3}{2}$ و $\sqrt{3}$ ينتميان الى المجال $]1;2[$ ، و الدالة f متناقصة تماما على $]1;2[$.

و بما انّ $\sqrt{3} \succ \frac{3}{2}$ ، فانّ: $f\left(\sqrt{3}\right) \prec f\left(\frac{3}{2}\right)$.

4: كيفية رسم مماس للمنحني (C_f) في النقطة $A(0;-2)$:

لدينا: $f'(0)=3$

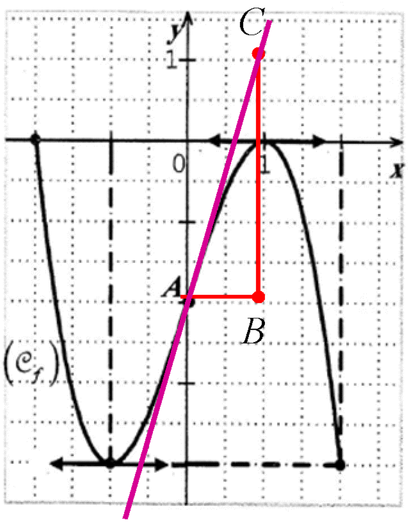
اذن ميل هذا المماس هو 3.

لإنشاء هذا المماس ، نتبع الخطوتين التاليتين:

ننشيء نقطة B بحيث المستقيم (AB) يوازي محور الفواصل و تكون B على يمين A و يكون $AB=1$.

ننشيء نقطة C بحيث المستقيم (BC) يوازي محور التراتيب و تكون C اعلى من B و يكون $BC=3$.

عندئذ يكون المستقيم (AB) هو المماس المطلوب.



التمرين الثالث:

1: أ ــ تعيين الأساس q و الحد الأول u_0:

لدينا: $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_4 = 48 \end{cases}$ ، و لكن: $u_4 = u_1 \times q^3$ ، فيكون: $48 = 6q^3$

و يكون: $q^3 = \frac{48}{6} = 8$ ، اذن: $\boxed{q = 2}$

و لدينا: $u_0 = \frac{u_1}{q}$، فيكون: $u_0 = \frac{6}{2}$ ، و منه: $\boxed{u_0 = 3}$

ب ــ استنتاج عبارة الحد العام u_n :

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ ، فيكون: $u_n = 3 \times 2^n$

2: أ ــ اثبات انّ 768 حد للمتتالية (u_n):

لدينا: $u_n = 768$ يعني $3 \times 2^n = 768$

و يكون: $2^n = \frac{768}{3} = 256$

و منه: $n = 8$.

اذن: العدد 768 حد للمتتالية (u_n) و هو الحد u_8 (اي هو الحد التاسع).

ب ــ حساب المجموع $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_7$

لدينا: $S = u_0 \frac{q^8 - 1}{q - 1}$ ، فيكون: $S = 3\frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 3(256 - 1) = 3 \times 255$ ، اذن: $S = 756$.

3: أ ــ حساب v_1 ، v_2 و v_3 :

لدينا: $v_{n+1} = 2v_n - 1$

فيكون: $v_1 = 2v_0 - 1 = 2 \times 4 - 1 = 7$ ، $v_2 = 2v_1 - 1 = 2 \times 7 - 1 = 13$ ، $v_3 = 2v_2 - 1 = 2 \times 13 - 1 = 25$.

ب ــ البرهان انّ: $v_n = 3 \times 2^n + 1$

بداية التراجع: من اجل $n = 0$ يكون: $v_0 = 3 \times 2^0 + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$ (محققة)

فرض التراجع: لنفرض انّ: $v_n = 3 \times 2^n + 1$

برهان التراجع: لنبرهن انّ: $v_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 1$

لدينا: $v_{n+1} = 2v_n - 1$

فيكون: $v_{n+1} = 2(3 \times 2^n + 1) - 1$ ، و يكون: $v_{n+1} = 3 \times 2 \times 2^n + 2 - 1$

و منه: $v_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 1$ (و هو المطلوب)

جــ: حساب المجموع $S' = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_7$

لدينا: $v_n = 3 \times 2^n + 1$ ، و منه $v_n = u_n + 1$

فيكون: $S' = (u_n + 1) + (u_n + 1) + (u_n + 1) + ... + (u_n + 1)$

و يكون: $S' = (u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_7) + 8$

اذن: $S' = S + 8$ ، فيكون: $S' = 756 + 8 = 764$

مع تحيات الأستاذ ج حنيفي