(الموضوع الأول)

التمرين الأول :

- لدينا المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث : $\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} \end{cases}$

1) أ)- إثبات بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n > 1$

- خطوة البدأ : من أجل $n = 0$ لدينا $\begin{cases} u_0 = 13 \\ 13 > 1 \end{cases}$ ومنه $u_0 > 1$ محققة .
- خطوة التتابع : بفرض أن $u_k > 1$ صحيحة و نبرهن أن $u_{k+1} > 1$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي k

- لدينا من فرضية التراجع $u_k > 1$ من أجل كل $k \in \mathbb{N}$

ومنه $\frac{1}{5}u_k > \frac{1}{5}$ ومنه $\frac{1}{5}u_k + \frac{4}{5} > \frac{1}{5} + \frac{4}{5}$ و بذلك $u_{k+1} > 1$ محققة

توريث الخاصيةمن $u_k > 1$ إلى $u_{k+1} > 1$ من أجل كل عدد طبيعي k نستنتج أنه $\boxed{u_n > 1 \quad / \quad n \in \mathbb{N}}$.

ب)- إتجاه تغير المتتالية (u_n):

- ندرس إشارة من أجل كل عدد طبيعي n الفرق : $(u_{n+1} - u_n)$

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n = -\frac{4}{5}u_n + \frac{4}{5} = \frac{4}{5}(1 - u_n)$ فان $\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5}(1 - u_n)}$

و من جهة أخري لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$ ومنه $1 - u_n < 0$ فان $\frac{4}{5}(1 - u_n) < 0$

ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$ و بذلك (u_n) متناقصة تماما من أجل كل عدد طبيعي n.

2) (v_n) متتالية عددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = ln(u_n - 1)$

- إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية :

[$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية] معناه [من أجل كل عدد طبيعي n فان $v_{n+1} = v_n + r \ \ / r \in \mathbb{R}$]

- لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = ln(u_n - 1)$ ومنه

$$\left| \begin{aligned} v_{n+1} &= ln(u_{n+1} - 1) \\ v_{n+1} &= ln\left(\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1\right) \\ v_{n+1} &= ln\left(\frac{1}{5}u_n + \frac{1}{5}\right) \\ v_{n+1} &= ln\left[\frac{1}{5}(u_n - 1)\right] \\ v_{n+1} &= ln\frac{1}{5} + ln(u_n - 1) \end{aligned} \right.$$

إذا $v_{n+1} = v_n + ln\frac{1}{5}$

ومنه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\boxed{r = ln\frac{1}{5} = -ln5}$

و بما ان (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ فان الحد الأول $v_0 = ln(u_0 - 1) = ln(13 - 1)$ ومنه $\boxed{v_0 = ln12}$.

3) كتابة v_n بدلالة n :

لدينا (v_n) متتالية حسابية : $\begin{cases} v_0 = ln12 \\ r = -ln5 \end{cases}$ فان $\boxed{v_n = v_0 + n.r \ / \ n \in \mathbb{N}}$

و بذلك $v_n = ln12 - n\,ln5 = ln12 - ln5^n$ و منه $\boxed{v_n = ln\left(\frac{12}{5^n}\right) \quad / n \in \mathbb{N}}$

- التحقق من صحة عبارة u_n :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = ln(u_n - 1)$ فان $e^{v_n} = e^{ln(u_n-1)}$ ومنه $u_n - 1 = e^{v_n}$ ومنه $\boxed{u_n = 1 + e^{v_n} \;/ n \in \mathbb{N}}$

و لدينا من جهة أخرى $v_n = ln\left(\frac{12}{5^n}\right)$ فان $u_n = 1 + e^{ln\left(\frac{12}{5^n}\right)}$ بذلك $\boxed{u_n = 1 + \frac{12}{5^n} \;/ n \in \mathbb{N}}$.

- حساب نهاية u_n :

لدينا $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 5^n = +\infty \\ 1 > 5 \end{cases}$ فان $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{12}{5^n} = 0 \\ u_n = 1 + \frac{12}{5^n} \end{cases}$ و بذلك $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 1}$.

4) التحقق من صحة المساواة: $(u_0 - 1)(u_1 - 1)\times\cdots\times(u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = e^{v_n} + 1$ ومنه $u_n - 1 = e^{v_n}$

وبذلك
$$(u_0 - 1)(u_1 - 1)\times\cdots\times(u_n - 1) = e^{v_0} \times e^{v_1} \times\cdots\times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}$$

حيث :
$$\underbrace{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}_{\text{مج حدود م ت تا لية ح سابية}} = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2}\left(ln12 + ln\left(\frac{12}{5^n}\right)\right)$$
$$= \frac{n+1}{2} ln\left(\frac{12^2}{5^n}\right) = ln\left[\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^2\right]^{\frac{n+1}{2}} = ln\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$$

ومنه $(u_0 - 1)(u_1 - 1)\times\cdots\times(u_n - 1) = e^{ln\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}}$ و بذلك $\boxed{(u_0 - 1)(u_1 - 1)\times\cdots\times(u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1} \quad / n \in \mathbb{N}}$

◈ التمرين الثاني :

– من المعطيات نستخلص الجدول التالي :

الكيـــــس		اللــــــــــــون		
		حمراء R	خضراء V	المجموع
التـرقيـم	①	4	4	8
	②	1	3	4
	المجموع	5	7	12

- سحب **كرتين** من الكيس **في آن واحد** (توفيقة)

و بذلك عدد الإمكانيات الكلية هي :

إمكانية $\boxed{N = C_{12}^2 = \frac{12!}{2!\times(12-2)!} = \frac{12\times11}{2} = 66}$

- الحدث : A " سحب كرتنين من نفس اللون ".

- الحد ث : " سحب كرتين تحملان نفس الرقم ".

1) - التحقق أن $P(A) = \frac{31}{66}$:

- لدينا $A = \{(2R),(2V)\}$ ومنه عدد الإمكانية المحققة للحدث A هي $\boxed{N_A = C_5^2 + C_7^2 = 10 + 21 = 31}$

و بذلك $\boxed{P(A)=\frac{N_A}{N}=\frac{31}{66}}$.

- إحتمال الحدث B :

- - لدينا $B=\{(2_{(1)}),(2_{(2)})\}$ ومنه عدد الإمكانية المحققة للحدث B هي $\boxed{N_B=C_8^2+C_4^2=28+6=34}$

و بذلك $P(B)=\frac{N_B}{N}=\frac{34}{66}$ إذا $\boxed{P(B)=\frac{17}{33}}$.

2)- علما ان الكرتين المسحوبتين من نفس اللون حساب إحتمال ان تحملان نفس الرقم :

معناه حساب $P_A(B)$ حيث $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ أو $P_A(B)=\frac{N_{A\cap B}}{N_A}$

لدينا $A\cap B=\{(2R_{(1)}),(2V_{(1)}),(2V_{(2)})\}$ ومنه $N_{A\cap B}=C_4^2+C_4^2+C_3^2=6+6+3=15$

ومنه $P(A\cap B)=\frac{N_{A\cap B}}{N}$ ومنه $\boxed{P(A\cap B)=\frac{15}{66}}$

و بذلك $P_A(B)=\frac{15}{66}\times\frac{66}{31}$ إذا $\boxed{P_A(B)=\frac{15}{31}}$.

3) - X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات الحمراء المتبقية في الكيس :

- قيم المتغير العشوائي X :

لدينا $\begin{cases}(2V)\xrightarrow{X}5\\(1V,1R)\xrightarrow{X}4\\(2R)\xrightarrow{X}3\end{cases}$ ومنه $X\in\{3,4,5\}$.

- قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

- حساب $P(X=X_i)\quad / X_i\in\{3,4,5\}$

- $P(X=3)=P(2R)=\frac{C_5^2}{66}=\frac{10}{66}$ ومنه $\boxed{P(X=3)=\frac{5}{33}}$
- $P(X=4)=P(1V,1R)=\frac{C_7^1\times C_5^1}{66}=\frac{35}{66}$ ومنه $\boxed{P(X=4)=\frac{35}{66}}$
- $P(X=5)=P(2V)=\frac{C_7^2}{66}=\frac{21}{66}$ ومنه $\boxed{P(X=5)=\frac{7}{22}}$

X_i	3	4	5
$P(X=X_i)$	$\frac{5}{33}$	$\frac{35}{66}$	$\frac{7}{22}$

- حساب الامل الرياضياتي للمتغير العشوائي X :

لدينا $E(X)=\sum_{i=1}^{3}X_i\times P(X=X_i)=3\left(\frac{5}{33}\right)+4\left(\frac{35}{66}\right)+5\left(\frac{7}{22}\right)$

ومنه $\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{3}X_i\times P(X=X_i)=\frac{25}{6}\simeq 4.17}$

◈ التمرين الثالث :

I. حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(z-i)(z^2-4z+5)=0$:

$(z-i)(z^2-4z+5)=0$ تكافئ اما $z-i=0$ ومنه $z=i$

أو $z^2-4z+5=0$ نحسب المميز $\left|\begin{array}{l}a=1\\b=-4\\c=5\end{array}\right.$ $\Delta=b^2-4ac$ ومنه $\Delta=(-4)^2-4(1)(5)=-4=(2\,i)^2$

وبذلك المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين : $\begin{cases}z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\dfrac{4+2i}{2}=2+i\\ z_2=\overline{z_1}=2-i\end{cases}$

طريقة أخرى : $\begin{bmatrix}z^2-4z+5=0\\(z-2)^2-4+5=0\end{bmatrix}$ ومنه $\begin{matrix}(z-2)^2=-1\\(z-2)^2=i^2\end{matrix}$ وبذلك $\begin{cases}z-2=i\\z-2=-i\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}z=2+i\\z=2-i\end{cases}$

وبذلك حلول المعادلة هي $\{i\,,2-i\,,2+i\}$.

II. لدينا $A(z_A=i)$ ، $B(z_B=2-i)$ و $C(z_C=2+i)$

1) كتابة العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسي:

- لدينا $\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=\dfrac{2+i-i}{2+i-2+i}=\dfrac{2}{2i}=\dfrac{1}{i}=-i$ ومنه $\boxed{\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=-i}$

و نعلم أن $-i=e^{-\frac{\pi}{2}i}$ ومنه $\boxed{\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=e^{-\frac{\pi}{2}i}}$

- طبيعة المثلث ABC

لدينا $\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=e^{-\frac{\pi}{2}i}$ ومنه $\begin{cases}\dfrac{AC}{BC}=1\\ \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}AC=BC\\ BCA=90^\circ\end{cases}$ وبذلك نستنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم في النقطة A .

2) من اجل كل عدد مركب z مع $z\neq 2+i$ حيث $f(z)=\dfrac{i\,z-1-2i}{2\,z-4-2i}$

أ)- تعين مجموعة النقط (E) :

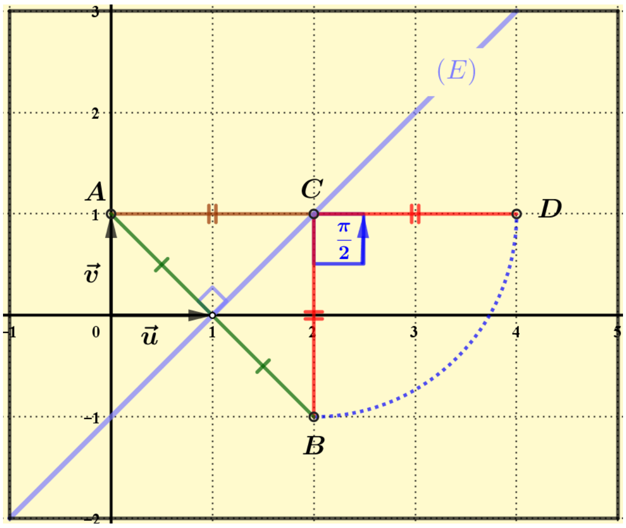
لدينا $M(z)\in(E)$ تكافئ $|f(z)|=\dfrac{1}{2}$ تكافئ $\left|\dfrac{i\,z-1-2i}{2\,z-4-2i}\right|=\dfrac{1}{2}$ ومنه $\dfrac{|i\,z+i^2-2i|}{|2\,z-4-2i|}=\dfrac{1}{2}$

ومنه $\dfrac{|i||z+i-2|}{2|\,z-2-i|}=\dfrac{1}{2}$ وبذلك $\dfrac{1\times|z-(2-i)|}{2|\,z-(2+i)|}=\dfrac{1}{2}$ ومنه $\dfrac{|z-z_A|}{|\,z-z_B|}=1$ ومنه $\begin{cases}|z-z_A|=|\,z-z_B|\\ z\neq z_B\end{cases}$

اذا $AM=BM$ وبذلك (E) هي مجموعة نقط محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

ب)- التحقق أن $\left[f(i)\right]^{1440}\in\mathbb{R}_+$:

- لدينا $f(i)=\dfrac{i(i)-1-2i}{2(i)-4-2i}=\dfrac{-1-1-2i}{2i-4-2i}=\dfrac{-2-2i}{-4}=\dfrac{1}{2}(1+i)$



ومنه

$$\left[f(i)\right]^{1440}=\left[\frac{1}{2}(1+i)\right]^{1440}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1440}\times(1+i)^{1440}$$
$$=\frac{1}{2^{1440}}\left[(1+i)^2\right]^{720}=\frac{1}{2^{1440}}\left[2i\right]^{720}$$
$$=\frac{1}{2^{1440}}\left[(2i)^2\right]^{360}=\frac{1}{2^{1440}}\left[-2^2\right]^{360}$$
$$=\frac{2^{720}}{2^{1440}}=\frac{1}{2^{720}}\in\mathbb{R}_+$$

☜ **أو:**

$$\left[f(i)\right]^{1440}=\left[\frac{1}{2}(1+i)\right]^{1440}=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right]^{1440}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1440}e^{1440\frac{\pi}{4}i}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{720}e^{360\pi i}=\frac{1}{2^{720}}\times e^{180(2\pi)i}=\frac{1}{2^{720}}\times 1=\frac{1}{2^{720}}\in\mathbb{R}_+$$

3) لدينا الدوران $r_{\left(C,\frac{\pi}{2}\right)}$.

أ- تعين z_D لاحقة النقطة D :

لدينا $\begin{cases} B(z_B)\xrightarrow{r_{\left(C,\frac{\pi}{2}\right)}}D(z_D) \\ D=r_{\left(C,\frac{\pi}{2}\right)}(B)\end{cases}$ ومنه $z_D=e^{\frac{\pi}{2}i}z_B+\left(1-e^{\frac{\pi}{2}i}\right)z_C$

ومنه $z_D=i(2-i)+(1-i)(2+i)=(1+2+1)+(2+1-2)i=4+i$ ومنه $\boxed{z_D=4+i \quad / \ D(4;1)}$

- التحقق ان النقط A ، D و C في استقامية :

☜- [A ، D و C في استقامية] معناه $\dfrac{z_D-z_C}{z_A-z_C}\in\mathbb{R}$

لدينا $\dfrac{z_D-z_C}{z_A-z_C}=\dfrac{4+i-2-i}{i-2-i}=-1\in\mathbb{R}$ و بذلك نستنتج أن النقط A ، D و C في استقامية .

☜ - **أو:** [A ، D و C في استقامية] معناه [$det\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}\right)=0$ أي الشعاعين $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا]

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4-2\\1-1\end{pmatrix}$ و منه $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}0-2\\1-1\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$

ومنه $det\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}\right)=\begin{vmatrix}2 & -2\\0 & 0\end{vmatrix}=(2)(0)-(0)(-2)=0$ و بذلك نستنتج أن النقط A ، D و C في استقامية .

☜ - **أو:** كذلك $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{CA}$ ومنه الشعاعين $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا و بذلك النقط A ، D و C في استقامية

☜ - **أو:** نلاحظ أنه $\Im m(D)=\Im m(A)=\Im m(C)=i$ فان $y_D=y_A=y_C=1$

وبذلك النقط A ، D و C تنتمي الى مستقيم واحد موازي لمحور الفواصل معادلته $y=1$

إذا نستنتج ان النقط A ، D و C في استقامية .

ب) استنتاج أن النقطة D صورة النقطة A بتحويل بسيط :

☜ لدينا النقط A ، D و C في استقامية حيث $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{CA}$

ومنه النقطة D نظيرة النقطة A بالنسبة للنقطة C .

☜ **أو:** لدينا $\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = -1$ ومنه $z_D - z_C = -(z_A - z_C)$ وبذلك $z_D = -z_A + 2z_C$

ومنه النقطة D نظيرة النقطة A بالنسبة للنقطة C .

التمرين الرابع :

لدينا الدالة f المعرفة على $\mathcal{D}_f =]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$

1) أ)- حساب النهايات :

- لدينا $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty \end{cases}$ نستنتج أن $\boxed{\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty}$

- لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} x-2 = 0^-$ فان $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{1}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} \ln x = \ln 2 \end{cases}$ نستنتج أن $\boxed{\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = -\infty}$.

- لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} x-2 = 0^+$ فان $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \frac{1}{x-2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \ln x = \ln 2 \end{cases}$ نستنتج أن $\boxed{\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = +\infty}$.

- من النهايات السابقة نستنتج ان $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لمحور التراتيب معادلة لكل منهما $(x=0)$ و $(x=2)$.

ب)- حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2 = +\infty$ فان $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x-2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$ نستنتج أن $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

2) دراسة إتجاه تغير الدالة f :

ندرس إشارة الدالة المشتقة الأولى $f'(x)$ على المجال $\mathcal{D}_f =]0;2[\cup]2;+\infty[$

من اجل كل عددحقيقي x من المجال $\mathcal{D}_f$ لدينا

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x-2} + \ln x\right)' = \left(\frac{1}{x-2}\right)' + (\ln x)'$$
$$= \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x} = \frac{-x + (x-2)^2}{x(x-2)^2} = \frac{-x + x^2 - 4x + 4}{x(x-2)^2}$$

ومنه $\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x-2)^2} \quad / \; x \in \mathcal{D}_f}$

- بما ان $x \in \mathcal{D}_f$ فان $x(x-2)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x^2 - 5x + 4)$

لدينا $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ a + b + c = 1 - 5 + 4 = 0 \end{cases}$ فان $\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4 \end{cases}$

x	0		1		2		4		$+\infty$
x^2-5x+4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

ومنه نستنتج ان f متناقصة تماما على المجال $[1;2[$ و المجال $]2;4]$ ومتزايدة تماما على المجال $]0;1]$ و المجال $[4;+\infty[$.

⌘ جدول تغيرات الدالة f :

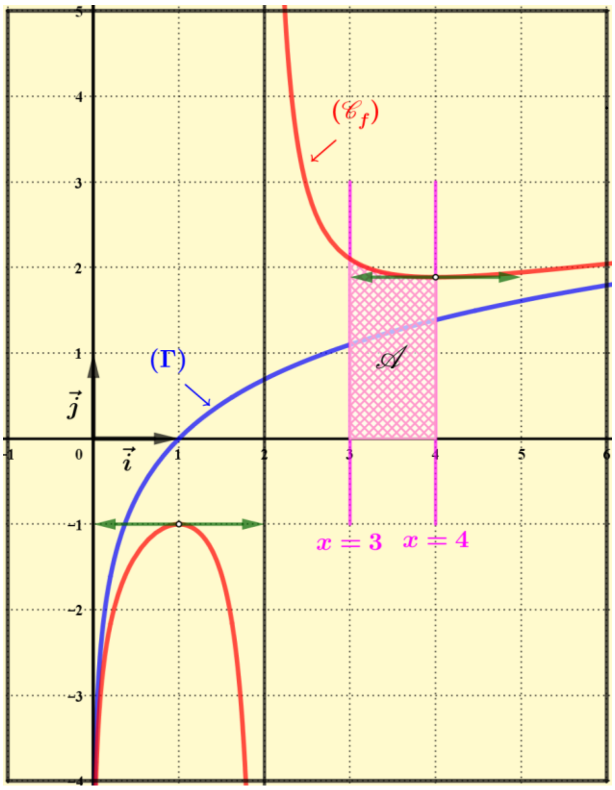
$f(1) = \frac{1}{1-2} + \ln 1 = -1$ و $f(4) = \frac{1}{4-2} + \ln 4 = \frac{1}{2} + \ln 4$

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}+\ln 4$	↗	$+\infty$

3) (Γ) هو المنحنى البياني للدالة $x \mapsto \ln x$.

أ) حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]$

✦ لدينا $\begin{cases} f(x)-\ln x=\dfrac{1}{x-2} \quad / x\in\mathcal{D}_f \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-2}=0 \end{cases}$ ومنه $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]=0}$



✦ نستنتج أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل (Γ) كمنحنى مقارب له بجوار $(+\infty)$

ب) دراسة وضعية $(\mathcal{C}_f)$ و المنحنى (Γ):

✦ ندرس على المجال $\mathcal{D}_f$

إشارة الفرق $\left[f(x)-\ln x\right]=\dfrac{1}{x-2}$

لدينا $x-2=0$ من أجل $x=2$

ومنه نستنتج الإشارة

x	0 2 $+\infty$
$\frac{1}{x-2}$	$-$ $+$

وبذلك $(\mathcal{C}_f)$ يقع أسفل المنحنى (Γ) في المجال $]1;2[$

و $(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق المنحنى (Γ) في المجال $]2;+\infty[$.

4) رسم كل من المنحنيين (Γ) و $(\mathcal{C}_f)$:

5) أ)- إيجاد عبارة $H(x)$ بدلالة x :

لدينا $H(x)=\displaystyle\int_3^x \ln(t)\,dt$ باستعمال المكاملة بالتجزئة نضع $\begin{cases} u(t)=\ln(t) \\ v'(t)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t)=\dfrac{1}{t} \\ v(t)=t \end{cases}$

ومنه

$$H(x)=\left[u(t)\times v(t)\right]_3^x-\int_3^x u'(t)\times v(t)\,dt$$

$$=\left[t\cdot\ln(t)\right]_3^x-\int_3^x 1\,dt=\left[(x\ln x)-3\ln 3\right]-\left[t\right]_3^x=x\ln x-3\ln 3-\left[x-3\right]$$

وبذلك $\boxed{H(x)=x(-1+\ln x)+3(1-\ln 3)}$

ب)- حساب المساحة $\mathscr{A}$:

بما ان $(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق محور الفواصل في المجال $[3;4]$ فان $\mathscr{A}=\left[\displaystyle\int_3^4 f(x)\,dx\right]\times(u.a)$

$$\int_3^4 f(x)\,dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}+\ln(x)\right)dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}\right)dx+\int_3^4\ln(x)\,dx$$

حيث

$$=\int_3^4\frac{(x-2)'}{x-2}\,dx+H(4)=\left[\ln(x-2)\right]_3^4+\left[4(-1+\ln 4)+3(1-\ln 3)\right]$$

$$=\left[\ln 2-\ln 1\right]+\left[-4+4\ln 4+3-3\ln 3\right]$$

ومنه $\displaystyle\int_3^4 f(x)\,dx=-1+9\ln 2-3\ln 3=-7+3\ln 8-3\ln 3$ وبذلك $\mathscr{A}=\boxed{-1+3\ln\left(\dfrac{8}{3}\right)\approx 1.94(u.a)}$.

6) لدينا الدالة g المعرفة على المجال $\mathcal{D}_g =]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ : $g(x)=f(-2x)$:

✠ اتجاه تغير الدالة g :

☜ لدينا $x\in\mathcal{D}_g$ / $\begin{cases} g(x)=(f\circ\varphi)(x) \\ \varphi(x)=-2x \end{cases}$ أي الدالة g هي مركب من الدالة التآلفة φ متبوعة بالدالة f

وباستعمال خاصية إتجاه تغير دالة مركبة :

✩ لدينا $]-\infty;-2] \xrightarrow[\text{متناقصة تماما}]{\varphi(x)=-2x} [4;+\infty[\xrightarrow[\text{متزايدة تماما}]{f(\varphi(x))} [\frac{1}{2}+\ln 4;+\infty[$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-2]$.

✩ لدينا $[-2;-1[\xrightarrow[\text{متناقصة تماما}]{\varphi(x)=-2x}]2;4] \xrightarrow[\text{متناقصة تماما}]{f(\varphi(x))} [\frac{1}{2}+\ln 4;+\infty[$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[-2;-1[$.

✩ لدينا $\left]-1;-\frac{1}{2}\right] \xrightarrow[\text{متناقصة تماما}]{\varphi(x)=-2x} [1;2[\xrightarrow[\text{متناقصة تماما}]{f(\varphi(x))}]-\infty;-1]$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$.

✩ لدينا $\left[-\frac{1}{2};0\right[\xrightarrow[\text{متناقصة تماما}]{\varphi(x)=-2x}]0;1] \xrightarrow[\text{متزايدة تماما}]{f(\varphi(x))}]-\infty;-1]$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2};0\right[$.

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-2]$ و المجال $\left[-\frac{1}{2};0\right[$.

و متزايدة تماما على المجال على المجال $[-2;-1[$ و المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$

☜ أو : ندرس إشارة $g'(x)$ على المجال $\mathcal{D}_g =]-\infty;-1[\cup]-1;0[$

من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathcal{D}_g$

$$g'(x)=[f(-2x)]'=(-2x)'\times f'(-2x)=-2f'(-2x)$$

لدينا

$$=-2\left[\frac{(-2x)^2-5(-2x)+4}{-2x(-2x-2)^2}\right]=\frac{-2(4x^2+10x+4)}{-2x[-2(x+1)]^2}=\frac{(x+2)(4x+2)}{4x(x+1)^2}$$

ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $\frac{(x+2)(4x+2)}{x}$

على المجال $\mathcal{D}_g$ حيث $(x+2)(4x+2)=0$ من اجل $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ \text{و} \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-2		-1		$-\frac{1}{2}$		0
$(x+2)(4x+2)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$		$-$		$-$	0
$\frac{(x+2)(4x+2)}{x}$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

ومنه الدالة g متناقصة تماما على كل من المجال $]-\infty;-2]$ و المجال $\left[-\frac{1}{2};0\right[$.

و متزايدة تماما على المجال على كل من المجال $[-2;-1[$ و المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$.

✠ إنتهى ✠

☙ تمنياتي لكم بالنجاح في شهادة البكالوريا ❧