الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

دورة: 2018

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=1-\dfrac{9}{u_n+5}$

1) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>-2$

ب) بيّن أنّ (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتج أنّها متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\dfrac{1}{u_n+2}$

ـ أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\dfrac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول .

3) عبّر بدلالة n عن v_n و u_n ، و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_0v_0+u_1v_1+....+u_nv_n=\dfrac{1}{3}\left(1-n^2\right)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحوي صندوق 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها أربع كريات بيضاء مرقمة بـ: 1 ، 2 ، 2 ، 3 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 2 ، 2 ، 3 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : 2 ، 3 ، 3

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الحادثتين A : "الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني"

و B : "الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم".

1) أ) احسب: $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب.

ب) بيّن أنّ: $P(A\cap B)=\dfrac{1}{20}$ ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A\cup B)$

2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجه عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا.

عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2-\sqrt{3}\,z+1=0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

A، B و C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب: z_A، z_B و z_C حيث:

$Z_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $Z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$ و $z_C=\overline{z}_B$ (يُرمز بـ $\overline{z}_B$ لمرافق z_B)

اكتب z_A و z_B على الشكل الأسي ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

3) أ) تحقّق أنّ: $\frac{z_B}{z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ وحدّد طبيعة المثلث OBC .

ب) استنتج أنّ: B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة.

4) نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z|=\left|\overline{z}-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$

عيّن طبيعة المجموعة (γ) ثم عيّن صورتها بالدوران r.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2+(x-1)e^{-x}$.

أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

ج) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.38<\alpha<-0.37$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x+1)\right)$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) حيث: $(\Delta):y=2x+1$

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f'(x)=g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكّل جدول تغيراتها.

3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

4) ارسم (Δ)، (T) والمنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha)=0.8$) .

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x: $x=(1-m)e^x$.

6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل $x=1$.

ب) احسب العدد A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=1$، $x=3$ و $y=2x+1$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

1) احسب كلا من u_1 ، u_2 و u_3.

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = 2n+1$.

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $e^{u_n} = v_n$.

ب) استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) احسب المجموعين S_n و T حيث:

$$S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right) \quad \text{و} \quad T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \ldots + e^{u_{2018}}$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقطة $A(1;-2;1)$ والمستويين (P_1) و (P_2) اللذين معادلتيهما على الترتيب $-x+y+2z+1=0$ و $-3x+y+z+4=0$.

1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(1;5;-2)$ شعاع توجيه له.

2) بيّن أنّ المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعان ثم تحقق أن تقاطعهما هو المستقيم (Δ).

3) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل $B(-1;4;0)$ ويعامد كلا من (P_1) و (P_2) ثم استنتج تقاطع المستويات الثلاثة (P_1)، (P_2) و (Q).

4) لتكن $E(2;3;-1)$ و $H(0;3;-2)$ نقطتان من الفضاء.

أ) تحقّق أنّ H هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P_1).

ب) حدّد طبيعة المثلث EBH ثم احسب V حجم رباعي الوجوه $AEBH$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\overline{z}-4+i)(z^2-4z+5)=0$. (يرمز $\overline{z}$ لمرافق العدد z)

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب $z_A = 2+i$ ، $z_B = 4+i$ و $z_C = \overline{z}_A$.

1) تحقق أنّ $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا.

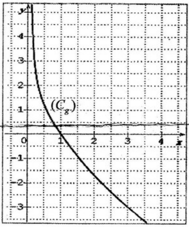
2) D نقطة من المستوي لاحقتها z_D حيث: $\begin{cases} |z_D - z_A| = |z_B - z_A| \\ Arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

بيّن أن المثلث ABD متقايس الأضلاع و احسب z_D.

3) احسب z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD ثم عيّن نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول G إلى D.

4) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z (M تختلف عن C) بحيث: $Arg\left(\dfrac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

التمرين الرابع: (07 نقاط)



I- g الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$g(x) = \dfrac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1$ و (C_g) المنحنى البياني الممثل لها

كما هو مبيّن في الشكل المقابل:

- احسب $g(1)$ ثم استنتج بيانيا إشارة $g(x)$.

II- f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$

بـ: $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{1+x\ln x}$ (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و بيّن أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

ثم فسّر النتيجتين بيانيا.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3) بيّن أنّ $y = \left(\dfrac{e^2}{e-1}\right)x - \dfrac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ(T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل، ثم ارسم المماس (T) و المنحنى (C_f).

4) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x) = e^2x - me$ حلّين متمايزين.

III- n عدد طبيعي حيث $n > 1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = n$.

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n > 1$: $I_n = \ln(1 + n\ln n)$.

2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (I_n).

انتهى الموضوع الثاني