الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للإمتحانات و المسابقات

تصحيح مقترح لبكالوريا 2018 — شعبة : علوم تجريبية

التَصْحِيحْ المفصّل للبكالُوريَا الرَّسمية دَورة : جوان 2018 — الموضوع 01

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) (المتتاليات العددية)	التنقيط

لدينا : (u_n) متتاليّة معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - \dfrac{9}{u_n + 5} \end{cases}$

1) أ) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$: --

أولا نضع الخاصية $P(n): u_n > -2$.

نتحقق من صحة الخاصية $P(n)$ من أجل $n = 0$. لدينا : $u_0 = 1$ ، أي : $u_0 > -2$ ، و منه الخاصية محققة .

* نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة أي : $u_n > -2$ ونتحقّق من صحّة $P(n+1)$ أي : $u_{n+1} > -2$:

لدينا فرضا $u_n > -2$ ، أي : $u_n + 5 > 3$ ، أي : $\dfrac{1}{u_n+5} < \dfrac{1}{3}$ ، أي : $-\dfrac{9}{u_n+5} > -3$ ، أي : $1 - \dfrac{9}{u_n+5} > -2$

ومنه : $u_{n+1} > -2$ ، إذن : $P(n+1)$ صحيحة ، و أخيرا $P(n)$ صحيحة ، أي من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$.

ب) بيان أنّ (u_n) متتالية متناقصة على $\mathbb{N}$ واستنتاج أنّها متقاربة : --

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{9}{u_n+5} - u_n = 1 - u_n - \frac{9}{u_n+5} = \frac{(1-u_n)(u_n+5)-9}{u_n+5} = \frac{-u_n^2 - 4u_n - 4}{u_n+5} = \frac{-(u_n+2)^2}{u_n+5} < 0 .$$

و منه المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

- بما أنّ : المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$:

أ) إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = \dfrac{1}{3}$ يطلب تعيين حدّها الأول : ---

معناه : $v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{3}$ ، أي :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}+2} = \frac{1}{1 - \dfrac{9}{u_n+5} + 2} = \frac{1}{3 - \dfrac{9}{u_n+5}} = \frac{1}{\dfrac{3u+15-9}{u_n+5}} = \frac{u_n+5}{3u_n+6} = \frac{1}{3} + \frac{3}{3u_n+6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{u_n+2} = \frac{1}{3} + v_n$$

إذن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = \dfrac{1}{3}$ ، ومنه : $v_0 = \dfrac{1}{u_0+2} = \dfrac{1}{3}$.

3) التعبير عن v_n و u_n بدلالة n و حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$: --

- **عبارة v_n بدلالة n :** $v_n = v_0 + nr$ ، أي : $v_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}n$ ، و منه : $v_n = \dfrac{1}{3}(n+1)$.

- **عبارة u_n بدلالة n :** لدينا : $v_n = \dfrac{1}{u_n+2}$ ، أي : $v_n(u_n+2) = 1$ ، أي : $v_n u_n = 1 - 2v_n$ ، أي : $u_n = \dfrac{1}{v_n} - 2$

و منه : $u_n = \dfrac{1}{\dfrac{1}{3}(n+1)} - 2$.

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{3}(n+1)}-2\right)=-2$ ، لأنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{3}(n+1)}\right)=0$.

4) بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_0u_0+v_1u_1+\dots+v_nu_n=\frac{1}{3}\left(1-n^2\right)$: ----------------------------

لدينا مما سبق : $v_nu_n=1-2v_n$ ، أي : $v_0u_0+v_1u_1+\dots+v_nu_n=\left(1-2v_0\right)+\left(1-2v_1\right)+\dots+\left(1-2v_n\right)$.

نضع $S_n=v_0u_0+v_1u_1+\dots+v_nu_n$ ، أي :

$S_n=\left(1-2v_0\right)+\left(1-2v_1\right)+\dots+\left(1-2v_n\right)=1(n+1)-2\left(v_0+v_1+..+v_n\right)=(n+1)-2\left[\frac{n+1}{2}\left(v_0+v_n\right)\right]$ ، أي :

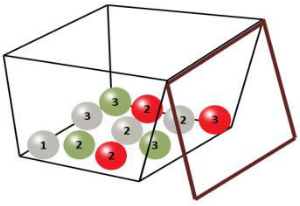
$S_n==(n+1)-\left[n+1\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}n\right)\right]=(n+1)\left[1-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}n\right]=(n+1)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}n\right)=\frac{1}{3}(n+1)(1-n)$ ، و منه :

$S_n=\frac{1}{3}\left(1-n^2\right)$ ، و هو المطلوب .

تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط) (الإحتمالات) التنقيط

السحب في آن واحد معناه : **توفيقة** . إذن الحالات الممكنة للسحب هي :

$C_{10}^3=\frac{10!}{3!(10-3)!}=120$ ، أي عدد الحالات الممكنة للسحب هي : 120 حالة .



1) حساب $p(A)$ **و** $p(B)$: --

$p(A)$ هو إحتمال سحب ثلاث كريات تحمل لون العلم الوطني ، أي : $P(A)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_3^1}{C_{10}^3}$ ، و منه : $P(A)=\frac{3}{10}$

$p(B)$ هو إحتمال سحب ثلاث كريات تحمل نفس الرقم ، أي : $P(B)=\frac{C_5^3+C_4^3}{C_{10}^3}$ ، و منه : $P(B)=\frac{7}{60}$.

ب) بيان أنّ : $p(A\cap B)=\frac{1}{20}$ ، **ثم استنتاج** $p_A(B)$ **و** $p(A\cup B)$: --------------------------------------

$p(A\cap B)$ هو إحتمال سحب ثلاث كريات تحمل لون العلم الوطني و تحمل نفس الرقم ، أي :

$P(A\cap B)=\frac{\left(C_2^1\times C_2^1\times C_1^1\right)+\left(C_1^1\times C_1^1\times C_2^1\right)}{C_{10}^3}=\frac{6}{120}$ ، و منه : $p(A\cap B)=\frac{1}{20}$ ، **و هو المطلوب .**

- **حساب الإحتمال الشرطي** $p_A(B)$: $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{20}\times\frac{10}{3}$ ، و منه : $p_A(B)=\frac{1}{6}$.

- **حساب** $p(A\cup B)$: $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{22}{60}$ ، أي : $p(A\cup B)=\frac{11}{30}$.

2) X **المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا :** --------------------

لدينا : $X\in\{0,1,2,3\}$.

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}$	$\frac{C_5^1\times C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{50}{120}$	$\frac{C_5^2\times C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{50}{120}$	$\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}$

حساب الأمل الرياضي : $E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_iP_i=0\times\frac{10}{120}+1\times\frac{50}{120}+2\times\frac{50}{120}+3\times\frac{10}{120}=\frac{180}{120}$ ، $\boxed{E(X)=\frac{3}{2}}$.

تصحيح التمرين الثالث (05 نقاط) (الأعداد المركبة)	التنقيط

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-\sqrt{3}z+1=0$: --

نحسب المميّز : $\Delta=b^2-4ac=\left(-\sqrt{3}\right)^2-4(1)(1)=-1=i^2$ ، و منه المعادلة تقبل حلان متمايزان هما :

$z_1=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$ ، $z_2=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

2) كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي ، ثم تعيين قيم n : --

لدينا : $z_A=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، و منه : $z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}$. **لأنّ :** $|z_A|=1$ ، و $\arg(z_A)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$.

لدينا : $z_B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}$ ، و منه : $z_B=e^{i\frac{\pi}{6}}$. **لأنّ :** $|z_B|=1$ ، **وَ** $\arg(z_B)=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$.

تعيين قيم n حتى يكون $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، أي : $\left(\dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^n=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، أي : $\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، أي : $e^{i\frac{n\pi}{6}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ،

و منه : $\dfrac{n\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ، أي : $\dfrac{n}{6}=\dfrac{1+6k}{3}$ ، أي : $3n=6+36k$ ، و منه : $n=12k+2$.

3) أ) التحقّق أنّ : $\dfrac{z_B}{z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ **و تحديد طبيعة المثلث** OBC: --

لدينا : $\dfrac{z_B}{z_C}=\dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{-\pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، وهو المطلوب .

لدينا : $\dfrac{z_B}{z_C}=\dfrac{z_B-z_O}{z_C-z_O}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، أي : $\dfrac{OB}{OC}=1$ ، **وَ** $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ، إذن المثلث OBC **متقايس الأضلاع** .

ب) إستنتاج أنّ B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة : --

لدينا : $\dfrac{z_B-z_O}{z_C-z_O}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، أي : $z_B-z_O=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_C-z_O\right)$ ، و منه B هي صورة C بالدوران r الذي مركزه O

و زاويته : $\dfrac{\pi}{3}$.

4) تعيين طبيعة المجموعة (γ) ثم تعيين صورتها بالدوران r : --

لدينا: $|z|=\left|\bar{z}-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$ ، أي : $|z|=\left|\bar{z}-z_B\right|$ ، أي : $|z|=\left|\overline{\bar{z}-z_B}\right|$ ، أي : $\left|z-z_O\right|=\left|z-z_C\right|$ ، و منه : $OM=CM$.

إذن مجموعة النقط (γ) هو: **محور القطعة** $[OC]$.

صورة (γ) بالدوران r : بما أنّ النقطة O هي مركز الدوران r فصورتها بواسطته هي O (نقطة صامدة) . وَ نعلم أنّ صورة النقطة C بالدوران r هي النقطة B ، **و منه :** صورة (γ) بالدوران r هي (γ') **محور القطعة** $[OB]$.

تصحيح التمرين الرابع (7نقاط) (الدالة الأسية)	التنقيط

الجزء الأول: لدينا : $g(x)=2+(x-1)e^{-x}$.

أ) حساب : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$: --

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2+(x-1)e^{-x}\right]=-\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2+(x-1)e^{-x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2+\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{1}{e^x}\right]=2$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$.

ب) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها : --

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $g'(x)=e^{-x}(2-x)$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{-x}>0$ ، أي أنّ إشارة $g'(x)$ من إشارة : $2-x$ ، إذن الإشارة تكون كما هو مبيّن في الجدول التالي :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$2+e^{-2}$	↘ 2

ب) بيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α على $]-0,38;-0,37[$ ، ثم استنتاج إشارة $g(x)$: ------------

الدالة g مستمرة و رتيبة على $[-0,38;-0,37]$ و لدينا : $\begin{cases} g(-0,38)=-0,01 \\ g(-0,37)=0,01 \end{cases}$ ، أي : $g(-0,38)\times g(-0,37)<0$

و منه و حسب نظرية القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث : $-0,38<\alpha<-0,37$.

إذن : نجد إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ كما يلي :

لمّا $x\in]-\infty;\alpha[$ فإنّ $g(x)<0$ ، لمّا $x=\alpha$ فإنّ $g(x)=0$ ، ولمّا $x\in]\alpha;+\infty[$ فإنّ $g(x)>0$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

الجزء الثاني : لدينا $f(x)=2x+1-xe^{-x}$.

1) أ) حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ :: ---.-------

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x+1-xe^{-x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x+1-\frac{x}{e^{x}}\right]=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(2+\frac{1}{x}-e^{-x}\right)=+\infty$.

ب) حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x+1)\right)$ و تفسير النتيجة هندسيا : --

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-xe^{-x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{x}{e^{x}}\right]=0$ ، و منه : المستقيم ذو المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ج) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) وَ المستقيم (Δ) : ---

ندرس إشارة الفرق : $\left[f(x)-(2x+1)\right]=-xe^{-x}$ ، ومنه إشارة الفرق من إشارة $-x$ لأنّ $e^{-x}>0$ ، أي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(0;1)$	(C_f) يقع تحت (Δ)

2) بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=g(x)$ واستنتاج إتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها : ------

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $f'(x)=2-e^{-x}+xe^{-x}=2+(x-1)e^{-x}=g(x)$.

و منه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

لمّا $x\in]a;+\infty[$ فإنّ f متزايدة تماما ، $x\in[\alpha;+\infty[$ ولمّا $x\in]-\infty;\alpha]$ فان f متناقصة تماما .

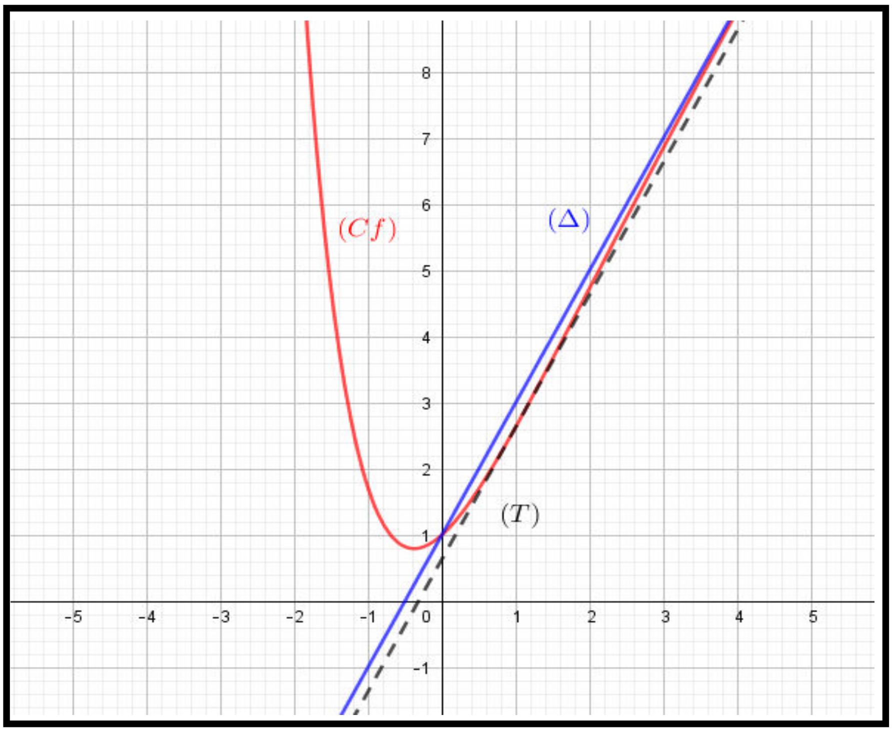
جدول التغيرات

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

3) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 : ---------------------------------------

$(T): y = f'(1)(x-1)+f(1)$ ، أي : ، و منه : $(T): y = 2(x-1)+3-e^{-1}$ ، أي : $\boxed{(T): y = 2x+1-e^{-1}}$

4) رسم كلا من (T) و (Δ) و المنحني (C) : ---



المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m : ---

لدينا : $x = (1-m)e^{x}$ ، أي : $xe^{-x} = (1-m)$ ، أي : $-xe^{-x} = m-1$ ، أي : $2x+1-xe^{-x} = 2x+1+m-1$

أي : $\boxed{f(x) = 2x+m}$ ، إذن المناقشة **وسيطية مائلة** موازية لـ (T) و (Δ) .

و منه حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) و المستقيما ت ذات المعادلة : $y = 2x+m$.

* لمّا : $m \in]-\infty ; 1-e^{-1}[$ ، المعادلة لا تقبل حلول . * لمّا : $m = 1-e^{-1}$ ، المعادلة تقبل حل مضاعف موجب .

* لمّا : $m \in]1-e^{-1} ; 1[$ ، المعادلة تقبل حلان موجبان . * لمّا : $m = 1$ ، للمعادلة حل معدوم .

* لمّا : $m > 1$ ، للمعادلة حل سالب .

6) تعيين الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ **:** ---

$\int xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x}\right] - \int -e^{-x}dx$ ، أي : $\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$. أخذنا : $\begin{cases} u(x) = x \;; u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} \;; v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

و منه : $F(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + c$ ، لدينا : $F(1) = 0$ ، أي : $c = 2e^{-1}$ ، و منه :

$F(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 2e^{-1}$

ب) حساب العدد A : --

$A = \int_1^3 (y - f(x))\,dx = \int_1^3 xe^{-x}dx = F(3) - F(1) = -3e^{-3} - e^{-3} + 2e^{-1} = 2e^{-1} - 4e^{-3}\,(u.a)$.

التَصْحِيحْ المفصّل للبكالُوريَا الرَّسمية دَورة : جوان 2018 — الموضوع 02

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) (المتتاليات العددية) — التنقيط

لدينا : (u_n) متتاليّة معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=u_n+\ln\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)\end{cases}$

1) حساب الحدود : u_1 ، u_2 ، u_3 --------------------------------

$u_1=u_0+\ln(3)=\ln(3)$ ، $u_2=u_1+\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)=\ln(3)+\ln(5)-\ln(3)=\ln(5)$ ، $u_3=\ln(5)+\ln\left(\dfrac{7}{5}\right)=\ln(7)$

2) بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n $\dfrac{2n+3}{2n+1}>1$، **ثم استنتاج إتجاه تغيّر المتتالية** (u_n) --------------------------

أي : $\dfrac{2n+3}{2n+1}-1>0$ ، لدينا : $\dfrac{2n+3}{2n+1}-1=\dfrac{2}{2n+1}$ ، نعلم أنّ : $\dfrac{2}{2n+1}>0$ ، ومنه : $\dfrac{2n+3}{2n+1}>1$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\ln\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)$ ، وَ $\dfrac{2n+3}{2n+1}>1$ ، أي : $\ln\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)>\ln(1)$ ، أي : $\ln\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)>0$ ،

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

3) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=2n+1$:

أ) برهان بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، : $e^{u_n}=v_n$ --------------------------------

نضع الخاصية : $P(n):e^{u_n}=v_n$.

- نتحقق من صحة $P(0)$ ، أي : $e^{u_0}=v_0$، و منه : $1=1$، إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$.

- نفرض صحة $P(n)$ ، أي : $e^{u_n}=v_n$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ ، أي : $e^{u_{n+1}}=v_{n+1}$.

<u>**البرهان :**</u> لدينا فرضا أنّ : $e^{u_n}=v_n$ ، أي : $e^{u_{n+1}}=e^{u_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)}$ ، أي : $e^{u_{n+1}}=e^{u_n}\times e^{\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)}$ ، أي :

$e^{u_{n+1}}=e^{u_n}\times\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)$ ، $e^{u_{n+1}}=v_n\times\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ ، (لأنّ : $v_{n+1}=2n+3$) ، و منه : $e^{u_{n+1}}=v_{n+1}$.

إذن الخاصية $P(n+1)$ صحيحة يستلزم $P(n)$ صحيحة ، أي : من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $e^{u_n}=v_n$.

4) حساب المجموعين S_n وَ T :--------------------------------

- **حساب** S_n **:** $S_n=\ln\left(\dfrac{v_1}{v_0}\right)+\ln\left(\dfrac{v_2}{v_1}\right)+\ldots+\ln\left(\dfrac{v_n}{v_{n-1}}\right)$ ، أي : $S_n=\ln v_1-\ln v_0+\ln v_2-\ln v_1+\ldots+\ln v_n-\ln v_{n-1}$

أي : $S_n=-\ln v_0+\ln v_n$ ، و منه : $S_n=u_n=\ln(2n+1)$ ، أي : $S_n=\ln(2n+1)$.

حساب T : $T=e^{1439}+e^{1440}+\ldots+e^{2018}$ ، أي : $T=v_{1439}+v_{1440}+\ldots+v_{2018}$ ، أي : $T=\dfrac{580}{2}(v_{1439}+v_{2018})$

أي : $T=290(2879+4037)$ ، و منه : $T=2005640$.

التنقيط	(الهندسة الفضائية) تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط)
	1) **كتابة التمثيل الوسيطي لـلمستقيم** (Δ): --
	لدينا : (Δ) يشمل A و $\vec{u}(1;5;-2)$ شعاع توجيه له ، معناه توجد $M(x;y;z)$ من الفضاء تحقق : $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$ ، و منه :
	التمثيل الوسيطي لـ (Δ) يكون : $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+5t \quad ; \quad t\in\mathbb{R} \\ z=1-2t \end{cases}$.
	2) **بيان أنّ المستويين:** (P_1) **و** (P_2) **متقاطعان ، ثم التحقق أنّ تقاطعهما هو** (Δ): ------------------------------
	أوّلا : نبيّن أنّ $\vec{n}_{P_1}$ و $\vec{n}_{P_2}$ الشعاعان الناظميان لـ (P_1) **و** (P_2) **مرتبطان خطيا** ، لدينا : $\vec{n}_{P_1}(-1;1;2)$ و $\vec{n}_{P_2}(-3;1;1)$ ،
	أي : $\frac{1}{1}\neq\frac{-1}{-3}$ ، و منه : $\vec{n}_{P_1}$ و $\vec{n}_{P_2}$ ليسا مرتبطين خطيا . و منه : (P_1) و (P_2) متقاطعان وفق مستقيم .
	ثانيا : لكي نتحقق أنّ تقاطع (P_1) **و** (P_2) هو المستقيم (Δ) يكفي : التتحقق أن: $A\in(P_2)$ وَ $A\in(P_1)$ ، و الشعاع $\vec{u}$
	عمودي على $\vec{n}_{P_1}$ و $\vec{n}_{P_2}$ ، أي : $A\in(P_1):-1-2+2+1=0$ **(محققة)** وَ $A\in(P_2):-3-2+1+4=0$ **(محققة) .**
	و لدينا : $\vec{u}.\vec{n}_{P_1}=-1+5-4=0$ ، و منه : $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_{P_1}}$. $\vec{u}.\vec{n}_{P_2}=-3+5-2=0$ ، و منه : $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_{P_2}}$.
	من هذا و ذاك نستنتج أنّ المستويين (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) **.**
	3) **كتابة معادلة ديكارتية للمستوي** (Q) **، ثم استنتاج تقاطع المستويات** (P_1) **و** (P_2) **،** (Q): ----------------------
	بما أنّ (Q) يعامد (P_1) و (P_2) فسكون شعاع توجيه المستقيم (Δ) هو الشعاع الناظمي للمستوي (Q) ، أي: $\vec{n}_Q(1;5;-2)$
	و منه : $(Q):x+5y-2z+d=0$ ، و بما أنّ : $B\in(Q)$ فإنّ : $-1+20+d=0$ ، أي : $d=-19$ **.**
	و منه : $(Q):x+5y-2z-19=0$ **.**
	- بما أنّ تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) هو (Δ) ، إذن يكفي دراسة تقاطع (Δ) **و** (Q) فقط :
	لدينا : $(Q):x+5y-2z-19=0$ ، أي : $(t+1)+5(5t-2)-2(1-2t)-19=0$ ، و منه : $t=1$ ، **إذن :**
	تقاطع المستويات (P_1) **و** (P_2) ، (Q) هي : **النقطة** $C(2;3;-1)$ **.**
	4) **أ) التحقق أنّ** H **هي المسقط العمودي للنقطة** B **على المستوي** (P_1) **:** -------------------------------------
	أي : يكفي التتحقق أن: $H\in(P_1)$ وَ $\overrightarrow{HB}$ مرتبط خطيا مع $\overrightarrow{n_{P_1}}$ ، لدينا: $H\in(P_1):0+3-4+1=0$ **(محققة)** ، و نلاحظ
	أنّ الشعاعين $\overrightarrow{HB}(-1;1;2)$ وَ $\vec{n}_{P_1}(-1;1;2)$ مرتبطين خطيا ، إذن H هي المسقط العمودي لـ B على المستوي (P_1) .
	ب) تحديد طبيعة المثلث EBH **، ثم حساب حجم الرباعي** $AEBH$ **:** --
	لدينا $\overrightarrow{EB}(-3;1;1)$ و $\overrightarrow{EH}(-2;0;-1)$ و $\overrightarrow{HB}(-1;1;2)$ ، ومنه: $HB=\sqrt{6}$ وَ $HE=\sqrt{5}$ وَ $BE=\sqrt{11}$.
	أي : $BE^2=HB^2+EH^2$ ، و منه حسب نظرية فيتاغورس فإنّ المثلث EBH **قائم في** H .
	حساب حجم الرباعي $AEBH$: $V=\frac{1}{3}\times S_{EBH}\times h$.
	لدينا : $\frac{\sqrt{30}}{2}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}{2}=\frac{HE\times HB}{2}=S_{EBH}$ ، وَ نلاحظ أنّ (AE) هو إرتفاع الرباعي $AEBH$ ،
	(لأنّ : $(AE)\perp(BH)$ وَ$(AE)\perp(EH)$) . أي : $h=AE=\sqrt{30}$.
	إذن : $V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{30}}{2}\times\sqrt{30}=5(u.v)$.

تصحيح التمرين الثالث (05 نقاط) (الأعداد المركبة)	التنقيط

I) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(\bar{z}-4+i)(z^2-4z+5)=0$: --

معناه : $\bar{z}-4+i=0$ أو $z^2-4z+5=0$ ، أي : $\bar{z}=4-i$ ، و منه : $z_0=4+i$.

وَ $\Delta=-4$ ، و منه المعادلة تقبل حلان متمايزان ، أي : $\sqrt{\Delta}=2i$ ، إذن : $z_1=2-i$ ، $z_2=2+i$.

II) (1 التحقق أنّ $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=i$ ثم تعيين قيم n حتي يكون $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا : -----------------------

لدينا : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{4+i-2-i}{2-i-2-i}=\frac{2}{-2i}=\frac{1}{-i}=i$ ، و هو المطلوب .

لدينا : $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ معناه ، أي : $\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n$ ، أي : $e^{i\frac{n\pi}{2}}$ تخيلي صرف معناه : $\arg\left(e^{i\frac{n\pi}{2}}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، أي :

$\frac{n\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، أي : $\frac{n}{2}=\frac{1}{2}+k$ ، و منه : $n=2k+1$.

2) بيان أنّ المثلث ABD متقايس الأضلاع ، ثم حساب z_D : --

لدينا : $\begin{cases}|z_D-z_A|=|z_B-z_A|\\ Arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$ أي : $AD=AB$ وَ $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{3}$ ، و منه المثلث ABD متقايس الأضلاع .

لدينا : $\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، أي : $z_D-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_A)$ ، أي : $z_D=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2)+2+i$ ، و منه :

$z_D=1+\sqrt{3}i+2+i$ ، أي : $z_D=3+(1+\sqrt{3})i$.

3) حساب z_G ، ثم تعيين عناصر التشابه المباشر S: --

لدينا : z_G هي لاحقة مركز ثقل المثلث ABD ، أي : $z_G=\frac{z_A+z_B+z_D}{3}$ ، و منه : $z_G=3+\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)i$.

لدينا : S تشابه مباشر مركزه A ويحول G إلى D معناه : $\begin{cases}z_A=az_A+b\\ z_D=az_G+b\end{cases}$ بطرح نجد : $a=\frac{z_A-z_D}{z_A-z_G}$ ،

بعد الحساب و التبسيط نجد: $a=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، إذن نسبة التشابه هي : $|a|=\sqrt{3}$ ، و زاويته هي : $\arg(a)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$.

4) تعيين مجموعة النقط (Γ) : --

لدينا: $(k\in\mathbb{Z})$; $\arg\left(\frac{z_G-z}{z_C-z}\right)=\pi+2k\pi$ ، أي : $(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MG})=\pi+2k\pi$ ، و منه : (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z هي القطعة المستقيمة المفتوحة $]GC[$.

تصحيح التمرين الرابع (7نقاط) (الدالة اللوغاريتمية)	التنقيط

الجزء الأول: لدينا : $g(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$.

- حساب : $g(1)$ و استنتاج إشارة $g(x)$: --

بعد حساب $g(1)=0$ نجد جدول إشارة $g(x)$ بيانيا فيكون كما يلي : $g(x)>0$ لمّا : $0<x<1$ و $g(x)=0$ لمّا : $x=1$ و $g(x)<0$ لمّا : $x>1$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الجزء الثاني : لدينا $f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$.

1) أ) حساب : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ وَ بيان أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$: --

$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0}\left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right) = -\infty$ ، لأنّ : $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} 1+\ln x = -\infty$ وَ $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} 1+x\ln x = 1$.

و منه : $x=0$ مقارب للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x}\left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x}+\ln x}\right)=0$. و منه : $y=0$ مقارب للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$.

2) أ) بيان أنه من أجل كل $x\in\left]0;+\infty\right[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$:---

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\left]0;+\infty\right[$ و دالته المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x\ln x)-(\ln x+1)(1+\ln x)}{(1+x\ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x}+\ln x-(1+\ln x)^2}{(1+x\ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1}{(1+x\ln x)^2}$$ ،

و منه : $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$ ، **و هو المطلوب .**

ب) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة f وَ تشكيل جدول تغيّراتها : ---

نلاحظ أنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، أي : الدالة f متزايدة على $\left]0;1\right]$ ومتناقصة على $\left[1;+\infty\right[$.

جدول التغيّرات :

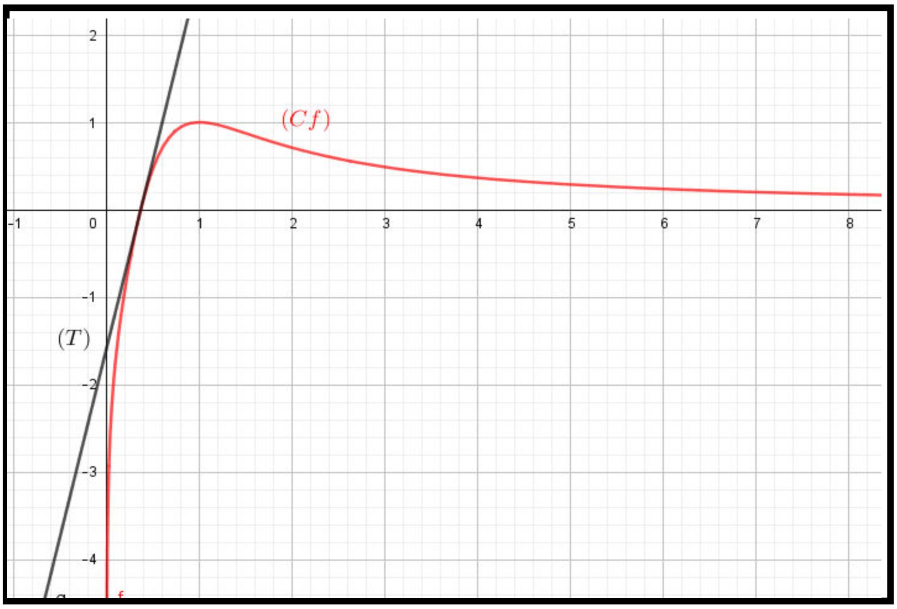
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1	↘ 0

3) بيان أنّ : $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$ **هي معادلة** (T) **مماس** (C_f) **عند نقطة تقاطعه مع محور الفواصل:** -----------

لدينا : بعد حل المعادلة : $f(x)=0$: نجد : $(C_f)\cap(xx')=\left\{\left(e^{-1};0\right)\right\}$ ، أي : $f'(e^{-1})=\frac{e^2}{e-1}$ ، و منه معادلة المماس

تكون : $(T): y=f'(e^{-1})\left(x-e^{-1}\right)+f(e^{-1})$ ، إذن : $(T): y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$.

رسم كلا من (T) المنحني (C) : ---



4) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m : --

$(e-1)f(x)=e^2x-me$ ، أي : $f(x)=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}m$ ، أي : $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x+m'$ و بعد المقارنة مع ،

المماس (T) نجد $m=1$ ومنه لمعادلة تقبل حلّان لمّا : $m'\in\left]-\infty;-\frac{e}{e-1}\right[$ ، أي : $m\in\left]1;+\infty\right[$.

الجزء الثالث :

1) بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$: $I_n=\ln(1+n\ln n)$ --------------------------------------

لدينا : $I_n=\int_1^n f(x)dx$ ، أي : $I_n=\int_1^n\left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)dx$ ، نلاحظ أنّ : $I_n=\int_1^n\frac{u'(x)}{u(x)}dx$ ، و منه : $I_n=\left[\ln|u(x)|\right]_1^n$ ،

أي : $I_n=\ln(u(n))-\ln(u(1))$ ، أي : $I_n=\ln(1+n\ln n)-\ln(1)$ ، و منه : $I_n=\ln(1+n\ln n)$.

2) دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (I_n) :---

ندرس إشارة الفرق : $I_{n+1}-I_n$ ، لدينا : $I_{n+1}=\int_1^{n+1}f(x)dx$ ، أي : $I_{n+1}=\int_1^n f(x)dx+\int_n^{n+1}f(x)dx$ ، أي :

$I_{n+1}=I_n+\int_n^{n+1}f(x)dx$ ، و منه : $I_{n+1}-I_n=\int_n^{n+1}f(x)dx$ ، بما أنّ : $n>1$ فإنّ : $\int_n^{n+1}f(x)dx>0$ ، إذن من أجل

كل عدد طبيعي n ، المتتالية (I_n) متزايدة تماما .