الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2015

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المـــدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04,5 نقطة)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ؛

نعتبر النقط $A\left(2;1;0\right)$ ، $B\left(1;2;2\right)$ ، $C\left(3;3;1\right)$ و $D\left(1;1;4\right)$.

1) تحقّق أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا وأنّ $x-y+z-1=0$ معادلة ديكارتية له.

2) بيّن أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع ، ثمّ تحقّق أنّ مساحته هي $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ وحدة مساحة.

3) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) والذي يشمل النقطة D .

4) النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)

أ) عيّن إحداثيات النقطة E ثمّ احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).

ب) عيّن مركزي سطحي الكرتين اللذين يمسان (ABC) في النقطة E ونصف قطر كل منهما $\sqrt{3}$.

5) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

التمرين الثاني: (04,5 نقطة)

I) عيّن العددين المركّبين α و β حيث : $\begin{cases} 2\alpha-\beta=-3 \\ 2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3} \end{cases}$ مع $\overline{\alpha}$ مرافق α و $\overline{\beta}$ مرافق β .

II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A ، B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب:

$$z_A=-\frac{3}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ، \quad z_B=\overline{z_A} \quad و \quad z_A=z_C\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$$

1) أ) اكتب z_A و z_C على الشكل الأسي ثمّ عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

ب) تحقّق أنّ العدد المركّب $2\left(\dfrac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}+\left(\dfrac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}-\left(\dfrac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي.

2) D النقطة ذات اللاحقة $z_D=1+i$.

أ) حدّد النسبة وزاوية للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحوّل D إلى A .

ب) اكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثمّ استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3) عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقّق: $z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$.

التمرين الثالث: (04,5 نقطة)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0 = e^2 - 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = (1+u_n)e^{-2} - 1$.

1) احسب u_1 ، u_2 و u_3 .

2) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $1+u_n > 0$.

3) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة . هل هي متقاربة ؟ علّل.

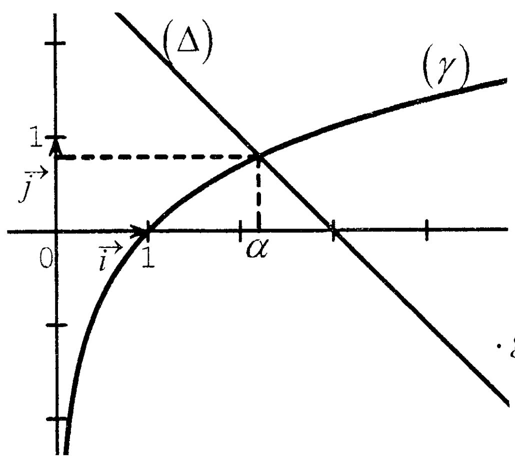
4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = 3(1+u_n)$.

أ) أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأوّل.

ب) اكتب v_n و u_n بدلالة n ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

جـ) بيّن أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$.

التمرين الرابع: (06,5 نقطة)



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) (γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = -x+3$ ؛ α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ) .

1) بقراءة بيانية حدّد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $]0;+\infty[$.

2) g الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x - 3 + \ln x$.

استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

3) تحقّق أن: $2,2 < \alpha < 2,3$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أثبت أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ؛ ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3) بيّن أنّ: $f(\alpha) = \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ؛ ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل ؛ ثمّ أنشئ (C_f) على المجال $]0\ ;\ e^2]$.

III) F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تحقّق: $F(1) = -3$.

1) بيّن أنّ منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يُطلب تعيين فاصلتيهما.

2) بيّن أنّ $x \mapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$ ؛ ثمّ استنتج عبارة الدالة F.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ؛

نعتبر النقط $A\left(2;4;1\right)$ ، $B\left(0;4;-3\right)$ ، $C\left(3;1;-3\right)$ و $D\left(1;0;-2\right)$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة من الحالات الآتية:

1) النقط A ، B و C ليست في استقامية.

2) $2x+2y-z-11=0$ معادلة ديكارتية للمستوي $\left(ABC\right)$.

3) النقطة $E\left(3;2;-1\right)$ هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي $\left(ABC\right)$.

4) المستقيمان $\left(AB\right)$ و $\left(CD\right)$ من نفس المستوي.

5) $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t-1 \\ z=-t-1 \end{cases} \; ; t\in\mathbb{R}$ تمثيل وسيطي للمستقيم $\left(CD\right)$.

6) يوجد عددان حقيقيان α و β حيث النقطة $I\left(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5}\right)$ مرجح الجملة $\left\{\left(A;\alpha\right),\left(B;\beta\right)\right\}$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على

الترتيب: z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A=2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B=-\overline{z_A}$ و $z_C=-\left(z_A+z_B\right)$ ، ($\overline{z_A}$ هو مرافق z_A) .

1) أ) اكتب كلا من العددين المركّبين z_B و z_C على الشكل الأسي .

ب) استنتج أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة $\left(\gamma\right)$ يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

جـ) أنشئ الدائرة $\left(\gamma\right)$ والنقط A ، B و C .

2) أ) تحقّق أنّ: $\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

ب) استنتج أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع وأنّ النقطة O مركز ثقل هذا المثلث.

جـ) عيّن وأنشئ $\left(E\right)$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\left|z\right|=\left|z-\sqrt{3}-i\right|$.

3) أ) عيّن زاوية للدوران r الذي مركزه O ويحوّل C إلى A.

ب) أثبت أنّ صورة $\left(E\right)$ بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

I) f الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{4x+1}{x+1}$ و $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني.

1) عيّن اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

2) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) ذي المعادلة $y=x$.

3) مثّل (C_f) و (D) على المجال $[0;6]$.

II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0=5 \\ v_{n+1}=f(v_n) \end{cases}$.

1) أ) أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود: u_0، u_1، u_2 و u_3 ؛ v_0، v_1، v_2 و v_3 دون حسابها.

ب) خمّن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

2) أ) أثبت أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 \le u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \le 5$ حيث: $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

3) أ) أثبت أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}-u_{n+1} \le \dfrac{1}{3}(v_n-u_n)$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 < v_n - u_n \le \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.

جـ) استنتج أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ ؛ ثمّ حدّد نهاية كل من (u_n) و (v_n).

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$، ثمّ تحقّق أنّ: $0,36<\alpha<0,37$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

ب) استنتج أنّ الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$.

2) احسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$، ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

4) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$.

5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$، نأخذ $f(-\alpha)\approx 0,1$.

6) أ) تحقّق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

ب) استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.