

الحل المفصل لموضوع الرياضيات بكالوريا علوم تجريبية 2015
الحل المفصل للموضوع الأول:

التمرين الأول:

نعتبر النقط $A(2;1;0)$ ، $B(1;2;2)$ ، $C(3;3;1)$ و $D(1;1;4)$.
(1) التحقق أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

لدينا $\overline{AB}(-1;1;2)$ و $\overline{AC}(1;2;1)$ و $\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{2}$ ومنه الشعاعان \overline{AB} و \overline{AC} غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقط

A ، B و C تعين مستويا وبما أن $x_A - y_A + z_A - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$ ، $x_B - y_B + z_B - 1 = 1 - 2 + 2 - 1 = 0$ ، $x_C - y_C + z_C - 1 = 3 - 3 + 1 - 1 = 0$ فإن $x - y + z - 1 = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .

(2) تبيان أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

لدينا $\overline{AB}(-1;1;2)$ ومنه $AB = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

و $\overline{AC}(1;2;1)$ ومنه $AC = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

و $\overline{BC}(2;1;-1)$ ومنه $BC = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$ إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

- التحقق أن مساحته $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ وحدة مساحة.

لتكن H منتصف $[AB]$ إذن $H\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 1\right)$ ومنه $CH = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

وعليه $S(ABC) = \frac{AB \times CH}{2} = \frac{\sqrt{6} \times \frac{3\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} ua$

طريقة ثانية:

$S(ABC) = \frac{1}{2} AB \times AC \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} ua$

(3) تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) الذي يعامد المستوي (ABC) ويشمل النقطة D .

لدينا $\vec{n}(1;-1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) وهو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم (Δ) لدينا $\overline{DM} = t\vec{n}$ حيث t عدد حقيقي.

تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) ومنه $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 4+t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

(4) أ) تعيين إحداثيات النقطة E .

E هي نقطة تقاطع (Δ) والمستوي (ABC) .

نحل الجملة $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 4+t \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$ وعليه $1+t - (1-t) + 4+t - 1 = 0$ ومنه $3t + 3 = 0$ أي $t = -1$.

إذن $E(0;2;3)$.

حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) .

$d(D;(ABC)) = DE = \sqrt{(0-1)^2 + (2-1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{3}$

(ب) تعيين مركزي سطحي الكرتين اللذين يمسان (ABC) في النقطة E ونصف قطر كل منهما $\sqrt{3}$.

$d(D; (ABC)) = \sqrt{3}$ فإن إحدى الكرتين مركزها D فيكون مركز الكرة الثانية D' نظيرة D بالنسبة إلى E . أي منتصف $[DD']$.

لدينا إذن $\overrightarrow{ED'} = -\overrightarrow{ED}$ معناه $\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OD'} = -\overrightarrow{EO} - \overrightarrow{OD}$ ومنه $\overrightarrow{OD'} = -2\overrightarrow{EO} - \overrightarrow{OD}$ أي $\overrightarrow{OD'} = 2\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD}$ وعليه $x_{D'} = 2x_E - x_D = -1$ و $y_{D'} = 2y_E - y_D = 3$ و $z_{D'} = 2z_E - z_D = 2$ إذن $D'(-1; 3; 2)$.

التمرين الثاني:

$$\text{من (1) نجد } \beta = 2\alpha + 3 \text{ بالتعويض في (2) نجد } \begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \dots \dots \dots (1) \\ 2\bar{\alpha} + \bar{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \dots (2) \end{cases} \text{ (I)}$$

$$\alpha = \frac{-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ أي } \bar{\alpha} = \frac{-3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ وعليه } 4\bar{\alpha} + 3 = -3 - 2i\sqrt{3}$$

$$\beta = i\sqrt{3} \quad \beta = 2\left(\frac{-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3 \text{ وعليه}$$

(II) (أ) كتابة z_A و z_C على الشكل الأسّي.

$$z_A = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$$

$$z_B = \bar{z}_A = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{-5\pi}{6}\right)}$$

$$z_C = e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}\right) = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ وعليه } z_C = z_A e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ معناه } z_A = z_C e^{i\frac{\pi}{3}}$$

* تعيين قيم العدد الطبيعي n ، حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

$$\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}} \text{ ومنه } \frac{z_A}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{حقيقيا سالبا معناه } \arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n = \pi + 2k\pi \text{ ومنه } \frac{n\pi}{3} = \pi + 2k\pi \text{ أي } n = 3 + 6k \text{ حيث } k \in \mathbb{N}$$

$$\text{(ب) التحقق أن العدد المركب } 2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435} \text{ حقيقي.}$$

$$2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} = 2e^{i\left(\frac{2015 \times 5\pi}{6}\right)} = 2e^{i\left(1679\pi + \frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)} = -\sqrt{3} - i$$

$$\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} = e^{i\left(\frac{1962 \times (-5\pi)}{6}\right)} = e^{-i(1635\pi)} = -1$$

$$\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435} = e^{i\left(\frac{1435\pi}{2}\right)} = e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = -i$$

$$\text{وعليه } 2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435} = -\sqrt{3} - i - 1 + i = -\sqrt{3} - 1 \in \mathbb{R}$$



(2) أ) تحديد النسبة والزاوية للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحول D إلى A .

$$\frac{z_A}{z_D} = \frac{\sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$$

ومنه نسبة التشابه S هي $\frac{\sqrt{6}}{2}$ و زاويته $\frac{7\pi}{6}$.

ب) كتابة $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري.

$$\frac{z_A}{z_D} = \frac{-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+i} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2+2i} = \frac{(-3+i\sqrt{3})(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{-6+2\sqrt{3}}{8} + i\frac{6+2\sqrt{3}}{8}$$

استنتاج القيمة المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

$$\frac{z_A}{z_D} = \frac{-6+2\sqrt{3}}{8} + i\frac{6+2\sqrt{3}}{8} \text{ ومن جهة أخرى } \frac{z_A}{z_D} = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$$

$$e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = \frac{-6+2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}} + i\frac{6+2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}} \text{ ومنه } \frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = \frac{-6+2\sqrt{3}}{8} + i\frac{6+2\sqrt{3}}{8}$$

$$\text{أي } \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} + i\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \text{ وعليه } \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \text{ و } \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$$

(3) تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث $z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث $k \in \mathbb{R}^+$.

$$z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)} \text{ معناه } z = kz_D e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)} \text{ يكافئ } z = kz_A \text{ ويكافئ } \overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} \text{ و } k \in \mathbb{R}^+$$

وبالتالي مجموعة النقط M هي نصف المستقيم (OA) .

التمرين الثالث:

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = e^2 - 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = (1+u_n)e^{-2} - 1$.

(1) حساب u_1 ، u_2 و u_3 .

$$u_2 = (1+u_1)e^{-2} - 1 = e^{-2} - 1, u_1 = (1+u_0)e^{-2} - 1 = e^2 \times e^{-2} - 1 = 0$$

$$u_3 = (1+u_2)e^{-2} - 1 = (e^{-2})e^{-2} - 1 = e^{-4} - 1$$

(2) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1+u_n > 0$.

لدينا $1+u_0 = e^2$ ومنه $1+u_0 > 0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $1+u_n > 0$ ونبرهن أن $1+u_{n+1} > 0$.

لدينا $1+u_{n+1} = (1+u_n)e^{-2} - 1$ ولدينا حسب الفرضية $1+u_n > 0$ ومنه $1+u_{n+1} > 0$.

وعليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل n من \mathbb{N} ، $1+u_n > 0$.

(3) تبين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

$$\text{لدينا } u_{n+1} - u_n = (1+u_n)e^{-2} - 1 - u_n = (1+u_n)e^{-2} - (1+u_n) = (1+u_n)(e^{-2} - 1)$$

وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1+u_n > 0$ و $e^{-2} - 1 < 0$ فإن $(1+u_n)(e^{-2} - 1) < 0$ أي $-u_n < 0$



الحل المفصل لموضوع الرياضيات بكالوريا علوم تجريبية 2015

وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

يمكن استعمال البرهان بالتراجع.

لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} < u_n$.

لدينا $u_0 = e^2 - 1$ و $u_1 = 0$ ومنه $u_1 < u_0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $u_{k+1} < u_k$ ونبرهن أن $u_{k+2} < u_{k+1}$.

لدينا $u_{k+1} < u_k$ معناه $1 + u_{k+1} < 1 + u_k$ يكافئ $(1 + u_{k+1})e^{-2} < (1 + u_k)e^{-2}$ يكافئ

$(1 + u_{k+1})e^{-2} - 1 < (1 + u_k)e^{-2} - 1$ أي $u_{k+2} < u_{k+1}$ وعليه نستنتج حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل

عدد طبيعي $n : u_{n+1} < u_n$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 + u_n > 0$ أي $u_n > -1$ ومنه المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -1 وبما

أنها متناقصة فهي متقاربة.

(4) أ) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

إذن $v_{n+1} = 3(1 + u_{n+1}) = 3((1 + u_n)e^{-2}) = e^{-2}v_n$

$$v_0 = 3(1 + u_0) = 3e^2$$

ب) كتابة v_n و u_n بدلالة n .

$$v_n = 3e^2(e^{-2})^n = 3e^{-2n+2}$$

لدينا $v_n = 3(1 + u_n)$ ومنه $u_n = \frac{1}{3}v_n - 1$ أي $u_n = e^{-2n+2} - 1$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n+2} - 1 = -1 \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n+2} = 0$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = 3e^2(e^{-2})^n$

$$v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = 3e^2(e^{-2})^0 \times 3e^2(e^{-2})^1 \times \dots \times 3e^2(e^{-2})^n$$

$$v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = (3e^2)^{n+1} (e^{-2})^{0+1+\dots+n} = (3e^2)^{n+1} (e^{-2})^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = (3e^2)^{n+1} \times e^{-n(n+1)} = (3e^2 \times e^{-n})^{n+1} = (3e^{2-n})^{n+1}$$

$$\ln(v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n) = \ln(3e^{2-n})^{n+1} = (n+1)\ln(3e^{2-n})$$

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$$

طريقة ثانية:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 3e^{-2n+2}$ معناه $\ln v_n = \ln(3e^{-2n+2}) = \ln 3 + \ln e^{-2n+2}$

$$\ln v_n = \ln 3 + 2 - 2n$$

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (\ln 3 + 2 - 2 \times 0) + (\ln 3 + 2 - 2 \times 1) + \dots + (\ln 3 + 2 - 2n)$$

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (n+1)(\ln 3 + 2) - 2(0+1+\dots+n)$$

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (n+1)(\ln 3 + 2) - 2 \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (n+1)(\ln 3 + 2) - n(n+1)$$

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (n+1)(\ln 3 + 2 - n)$$

كما أنه يمكن الاستدلال على الخاصية بالتراجع.

التمرين الرابع:

1) بقراءة بيانية تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) .

في المجال $]0; \alpha[$ ، (γ) يقع أسفل (Δ) .

وفي المجال $] \alpha; +\infty[$ ، (γ) يقع فوق (Δ) .

(Δ) و (γ) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(\alpha; \ln \alpha)$.

2) g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - 3 + \ln x$.

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

لدينا حسب السؤال السابق من أجل كل $x \in]0; \alpha[$ أي $\ln x - (-x + 3) < 0$ أي $g(x) < 0$.

ومن أجل كل $x \in] \alpha; +\infty[$ أي $\ln x - (-x + 3) > 0$ أي $g(x) > 0$.

ومن أجل $x = \alpha$ أي $\ln \alpha - (-\alpha + 3) = 0$ أي $g(\alpha) = 0$.

3) التحقق أن $2,2 < \alpha < 2,3$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ وبالخصوص على المجال $[2,2; 2,3]$ ولدينا $g(2,2) \approx -0,01$

و $g(2,3) \approx 0,13$ أي $g(2,3) \times g(2,2) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة، $g(\alpha) = 0$ حيث

$$2,2 < \alpha < 2,3$$

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2)$.

1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) - 2 = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - 2 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$$

2) إثبات أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \frac{1}{x} \left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{\ln x - 2}{x^2} + \frac{x-1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيرات الدالة f .

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

لدينا $\ln \alpha = -\alpha + 3$

$$f(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(\ln \alpha - 2) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(-\alpha + 3 - 2) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(-\alpha + 1) = \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$$

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

$$\frac{1,44}{2,3} < \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} < \frac{1,69}{2,2} \text{ إذن } 1,44 < (\alpha-1)^2 < 1,69 \text{ يكافئ } 1,2 < \alpha-1 < 1,3 \text{ يكافئ } 2,2 < \alpha < 2,3$$

الحل المفصل لموضوع الرياضيات بكالوريا علوم تجريبية 2015

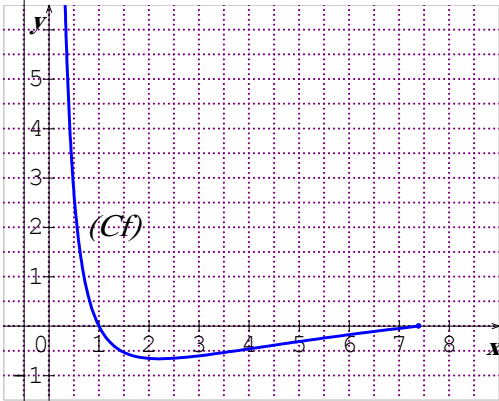
أي $0,62 < \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} < 0,77$ و عليه $-0,62 < f(\alpha) < -0,77$.

(4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.
من أجل ذلك ندرس إشارة $f(x)$.

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) = \frac{1}{x}(x-1)(\ln x - 2)$$

x	0	1	e^2	$+\infty$
$x-1$	-	0	+	+
$\ln x - 2$	-	-	0	+
$f(x)$	+	-	+	+

(C_f) فوق محور الفواصل في المجالين $]0;1[$ و $]e^2;+\infty[$ و (C_f) تحت محور الفواصل في المجال $]1;e^2[$.
و (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطتين اللتين فاصلتيهما 1 و e^2 .



الرسم

(III) الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تحقق: $F(1) = -3$
(1) تبين أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل.
لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $F'(x) = f(x)$.
 $F'(x) = 0$ تعني $f(x) = 0$ ومنه $x = 1$ أو $x = e^2$.
وبالتالي منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل عند النقطتين اللتين فاصلتيهما 1 و e^2 .

(2) تبين أن $x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$.

نضع $h(x) = x \ln x - x$ ومنه $h'(x) = \ln x + \frac{1}{x} \times x - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

وعليه الدالة h هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$.
استنتاج عبارة F .

لدينا $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) = \ln x - 2 - \frac{1}{x} \ln x + 2 \frac{1}{x}$

ومنه $F(x) = x \ln x - x - 2x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 + 2 \ln x + \lambda$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$

أي $F(x) = x \ln x - 3x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 + 2 \ln x + \lambda$

بما أن $F(1) = -3$ فإن $-3 + \lambda = -3$ أي $\lambda = 0$ إذن $F(x) = x \ln x - 3x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 + 2 \ln x$.

الحل المفصل للموضوع الثاني:

التمرين الأول:

لدينا $A(2;4;1)$ ، $B(0;4;-3)$ ، $C(3;1;-3)$ و $D(1;0;-2)$.

الإجابة بصحيح أو خطأ.

(1) لدينا $\overline{AB}(-2;0;-4)$ و $\overline{AC}(1;-3;-4)$ و $\frac{-2}{1} \neq \frac{0}{-3}$ إذن الشعاعان غير مرتبطين خطيا ومنه النقطة A .

الحل المفصل لموضوع الرياضيات بكالوريا علوم تجريبية 2015

تعيّن مستويا وعليه العبارة (1) صحيحة.

$$(2) \quad 2x + 2y - z - 11 = 0 \text{ معادلة ديكارتية للمستوي } (ABC).$$

$$\text{لدينا } 2x_B + 2y_B - z_B - 11 = 0 + 8 + 3 - 11 = 0, \quad 2x_A + 2y_A - z_A - 11 = 4 + 8 - 1 - 11 = 0$$

و $2x_C + 2y_C - z_C - 11 = 6 + 2 + 3 - 11 = 0$ ومنه إحداثيات النقط A, B, C تحقق المعادلة المعطاة وعليه العبارة صحيحة.

$$(3) \quad \text{النقطة } E(3; 2; -1) \text{ هي المسقط العمودي للنقطة } D \text{ على المستوي } (ABC).$$

$$\text{لدينا } \overline{DE}(2; 2; 1) \text{ و } \vec{n}(2; 2; -1) \text{ شعاع ناظمي للمستوي } (ABC) \text{ و } \frac{2}{2} \neq \frac{1}{-1} \text{ إذن الشعاعان } \overline{DE} \text{ و } \vec{n} \text{ غير}$$

مرتبطين خطيا وعليه العبارة المعطاة خاطئة.

$$(4) \quad \text{المستقيمان } (AB) \text{ و } (CD) \text{ من نفس المستوي.}$$

بما أنه يوجد مستو وحيد يشمل النقط A, B, C والنقطة D خارجة عن هذا المستوي فإن المستقيمان (AB) و

(CD) ليسا من نفس المستوي وعليه العبارة المعطاة خاطئة.

$$(5) \quad \text{تمثيل وسيطي للمستقيم } (CD) \quad \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t - 1 \\ z = -t - 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

لدينا $\overline{DC}(2; 1; -1)$ شعاع توجيه للمستقيم (CD) .

$$M(x; y; z) \in (CD) \text{ معناه يوجد عدد حقيقي } \lambda \text{ بحيث } \overline{DM} = \lambda \overline{DC}$$

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t - 1 \\ z = -t - 2 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x = 2(t - 1) + 1 \\ y = t - 1 \\ z = -(t - 1) - 2 \end{cases} \text{ وبأخذ } \lambda = t - 1 \text{ نجد } \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = \lambda \\ z = -\lambda - 2 \end{cases} \text{ ومنه } \lambda \in \mathbb{R}$$

وعليه العبارة صحيحة.

$$(6) \quad \text{يوجد عدنان حقيقيان } \alpha \text{ و } \beta \text{ حيث النقطة } I\left(\frac{3}{5}; 4; -\frac{9}{5}\right) \text{ مرجح الجملة } \{(A; \alpha); (B; \beta)\}.$$

$$\text{لدينا } \overline{IA}\left(\frac{7}{5}; 0; \frac{14}{5}\right) \text{ و } \overline{IB}\left(\frac{-3}{5}; 0; -\frac{6}{5}\right) \text{ إذن } \overline{IA} = -\frac{7}{3}\overline{IB} \text{ وعليه } 3\overline{IA} = -7\overline{IB} \text{ أي } 3\overline{IA} + 7\overline{IB} = \vec{0}$$

إذن $(\alpha; \beta) = (3; 7)$ وعليه العبارة صحيحة.

التمرين الثاني:

$$z_C = -(z_A + z_B) \text{ و } z_B = -\overline{z_A}, \quad z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$(1) \quad \text{أ) كتابة } z_C \text{ و } z_B \text{ على الشكل الأسّي.}$$

$$z_B = -\overline{z_A} = -2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\pi} \times e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_C = -(z_A - \overline{z_A}) = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

(ب) استنتاج أن النقط A, B, C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

لدينا $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$ معناه $OA = OB = OC = 2$ إذن النقط A, B, C تنتمي إلى الدائرة (γ) التي مركزها O ونصف قطرها 2.

(ج) إنشاء الدائرة (γ) والنقط A, B, C .

$$(2) \text{ أ) التحقق أن } \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + i + 2i}{-\sqrt{3} + i - \sqrt{3} - i} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{-2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

(ب) استنتاج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع وأن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث.

$$\text{لدينا } \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ معناه } \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه } \left| \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} \right| = 1 \text{ و } \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

وهذا يعني أن $BC = BA$ و $(\overline{BA}; \overline{BC}) = \frac{-\pi}{3}$ وبالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع فيكون مركز الدائرة المحيطة به هي مركز ثقله أي O هي مركز ثقله.

(ج) تعيين وإنشاء (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة حيث $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$.

$$|z| = |z - \sqrt{3} - i| \text{ تعني } |z| = |z - (\sqrt{3} + i)| \text{ أي } OM = AM \text{ وبالتالي } (E) \text{ هي محور القطعة } [OA].$$

(3) أ - تعيين زاوية الدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A .

$$\frac{z_A}{z_C} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

إذن زاوية الدوران r هي $\frac{2\pi}{3}$.

طريقة مختلفة

$$(\overline{OC}; \overline{OA}) = (\overline{OC}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overline{OA}) = (\vec{u}; \overline{OA}) - (\vec{u}; \overline{OC}) = \arg(z_A) - \arg(z_C) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

ولدينا $OA = OC$ ومنه زاوية الدوران r هي $\frac{2\pi}{3}$.

(ب) تبيان أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

لدينا ABC مضلع منتظم مركزه O إذن $(\overline{OC}; \overline{OA}) = (\overline{OA}; \overline{OB}) = \frac{2\pi}{3}$ وهذا يعني أن B هي صورة النقطة A

لتكن M نقطة من (E)؛ صورتها بالدوران.

لدينا $r(A) = B$ و $r(M) = M'$ إذن حسب الخاصية المميزة للدوران فإن $OM = OM'$ و $AM = BM'$

ولدينا $OM = AM$ ومنه $OM' = BM'$ وهذا يعني أن M' تنتمي لمحور القطعة $[OB]$.

وعليه صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

التمرين الثالث:

(1) تعيين إتجاه تغير الدالة f .

$$f'(x) = \frac{4(x+1) - 4x - 1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} \text{ ولدينا } [0; +\infty[\text{ تقبل الإشتقاق على } [0; +\infty[$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ لدينا $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $[0; +\infty[$.

(2) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D).

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $[0; +\infty[$.

$$f(x) - x = \frac{4x+1}{x+1} - x = \frac{4x+1-x^2-x}{x+1} = \frac{-x^2+3x+1}{(x+1)^2} = \frac{\left(-x + \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x + \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)}{x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $\frac{\left(x + \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)}{x+1} > 0$ ، ومنه إشارة $f(x) - x$ مثل إشارة $\left(-x + \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$.

x	0	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	$+\infty$	
$f(x) - x$		+	0	-
الوضعية		(D) فوق (C _f)	(D) و (C _f)	(D) تحت (C _f)
		يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$		

(II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

(1) أ) إنشاء على محور الفواصل الحدود $u_0, u_1, u_2, u_3, v_0, v_1, v_2, v_3$.
ب) تخمين اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

حسب الشكل يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة ويتقاربان نحو العدد $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

(2) أ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \leq 5$.
لدينا $2 \leq u_0 < \alpha$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $2 \leq u_n < \alpha$ من أجل عدد طبيعي n ونبرهن صحة الخاصية $2 \leq u_{n+1} < \alpha$.
معناه $2 \leq u_n < \alpha$ لأن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.
بما أن $u_{n+1} = f(u_n)$ و $f(\alpha) = \alpha$ و $f(2) = 3$ إذن $3 \leq u_{n+1} < \alpha$ أي $2 \leq u_{n+1} < \alpha$.
ومن هنا مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_n < \alpha$.
وكذلك لدينا $\alpha < v_0 \leq 5$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $\alpha < v_n \leq 5$ من أجل عدد طبيعي n ونبرهن صحة الخاصية $\alpha < v_{n+1} \leq 5$.
معناه $\alpha < v_n \leq 5$ لأن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.
بما أن $v_{n+1} = f(v_n)$ و $f(\alpha) = \alpha$ و $f(5) = \frac{7}{2}$ إذن $\frac{7}{2} < v_{n+1} \leq 5$ أي $\alpha < v_{n+1} \leq 5$.
ومن هنا مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل عدد طبيعي n ، $\alpha < v_n \leq 5$.



(ب) استنتاج اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; \alpha[$ ، $f(x) - x > 0$ ، وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_n < \alpha$ فإن $f(u_n) - u_n > 0$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$ وعليه المتتالية (u_n) متزايدة.
ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\alpha; +\infty[$ لدينا $f(x) - x < 0$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\alpha < v_n \leq 5$ فإن $f(v_n) - v_n < 0$ أي $v_{n+1} - v_n < 0$ وعليه المتتالية (v_n) متناقصة.

(3) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$.

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{4v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{4u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{4v_n u_n + 4v_n + u_n + 1 - 4v_n u_n - v_n - 4u_n - 1}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3v_n - 3u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)} = \frac{3(v_n - u_n)}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq 2$ معناه $u_n + 1 \geq 3$ و $v_n \geq 2$ لأن $\alpha < v_n \leq 5$ معناه $v_n + 1 \geq 3$

إذن $(v_n + 1)(u_n + 1) \geq 9$ يكافئ $\frac{3}{(v_n + 1)(u_n + 1)} \leq \frac{1}{3}$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n > u_n$

فإن $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$ أي $\frac{3(v_n - u_n)}{(v_n + 1)(u_n + 1)} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$

(ب) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < v_n - u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

لدينا $v_0 - u_0 = 5 - 2 = 3$ و $\left(\frac{1}{3}\right)^{0-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$ أي $v_0 - u_0 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{0-1}$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $v_n - u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ونبرهن أن $v_{n+1} - u_{n+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-1}$ أي نبرهن أن $v_{n+1} - u_{n+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

لدينا $v_n - u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ معناه $\frac{1}{3}(v_n - u_n) < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ أي $\frac{1}{3}(v_n - u_n) < \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ولدينا حسب السؤال السابق

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$ ومنه $v_{n+1} - u_{n+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^n$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n - u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

ومن جهة أخرى لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < \alpha$ و $v_n > \alpha$ ومنه $v_n > u_n$ أي $v_n - u_n > 0$.

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < v_n - u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

(ج) استنتاج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ حسب النهايات بالمقارنة نستنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.



تحديد نهاية كل من (u_n) و (v_n) .

لدينا المتتالية (u_n) متزايدة والمتتالية (v_n) متناقصة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان فهما متقاربتان ولهما نفس النهاية l .

بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ولدينا $u_{n+1} = f(u_n)$ والدالة f مستمرة على $[0; +\infty[$ إذن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \text{ وبالتالي } l = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \text{ وحسب ماسبق } l = f(l)$$

التمرين الرابع:

(I) الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة g .

الدالة g تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $g'(x) = -2 - 2e^{2x-2} = -2(1 + e^{2x-2})$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $g'(x) < 0$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على \mathbb{R} .

(2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في \mathbb{R} .

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - 2x - e^{2x-2} = +\infty$ و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 2x - e^{2x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 2) \left(\frac{1 - 2x}{2x - 2} - \frac{e^{2x-2}}{2x - 2} \right) = -\infty$$

ومنه الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على \mathbb{R} وتأخذ قيمها في \mathbb{R} إذن من أجل كل عدد حقيقي k المعادلة

$g(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في \mathbb{R} وبالأخص المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في \mathbb{R} .

التحقق أن $0,36 < \alpha < 0,37$.

$g(0,36) \approx 0,002$ و $g(0,37) \approx -0,02$ إذن $g(0,36) \times g(0,37) < 0$ ومنه $0,36 < \alpha < 0,37$.

(3) استنتاج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

لدينا الدالة g متناقصة تماما على \mathbb{R} .

إذا كان $x < \alpha$ فإن $g(x) > g(\alpha)$ أي $g(x) > 0$.

إذا كان $x > \alpha$ فإن $g(x) < g(\alpha)$ أي $g(x) < 0$ ؛ كما أن $g(\alpha) = 0$.

(II) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$

(1) تبين أن $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$

$$f'(x) = e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 = e^{2x+2}(1 + 2x - e^{-2x-2}) = e^{2x+2}g(-x)$$

(ب) إشارة $f'(x)$ مثل إشارة $g(-x)$.

إذا كان $x < -\alpha$ فإن $-x > \alpha$ ومنه $g(-x) < 0$ أي $f'(x) < 0$.

إذا كان $x > -\alpha$ فإن $-x < \alpha$ ومنه $g(-x) > 0$ أي $f'(x) > 0$.

وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty; -\alpha[$ و متزايدة تماما على $]-\alpha; +\infty[$.

(2) حساب نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x+2} - x + 1 = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} e^2 \times 2xe^{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{2x+2} - 1 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$



الحل المفصل لموضوع الرياضيات بكالوريا علوم تجريبية 2015
جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$f(-\alpha)$	$+\infty$

(3) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1]$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+2}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \right] = 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = -x + 1$ بحوار $-\infty$.

(4) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

$f(x) + x - 1 = xe^{2x+2} > 0$ ، من أجل كل عدد حقيقي x ، ومنه إشارة $f(x) + x - 1$ هي نفس إشارة x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$	
$f(x) + x - 1$		-	0	+
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(0;1)$.	(C_f) فوق (Δ)	

(5) انشاء (Δ) و (C_f) .

