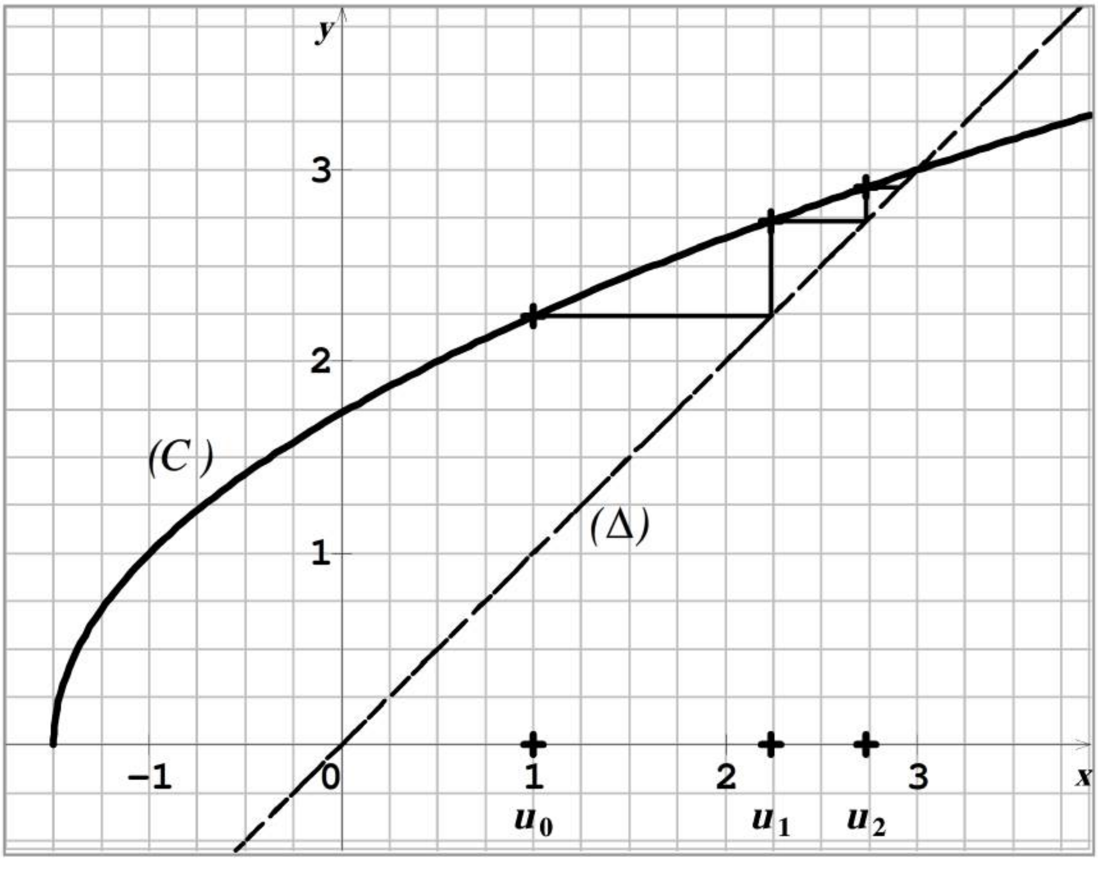
حل بكالوريا :دورة جوان 2012

حل الموضوع الأول

التمرين الأول :

$1-$ أ) الرسم:



ب) التخمين: (u_n) متتالية متزايدة و متقاربة نحو العدد 3 .

$2-$ نضع: $p(n)$ ، من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<3$.

* المرحلة 1: من أجل $n=0$ لدينا $P(0)$: $0<u_0<3$ ، أي: $0<1<3$ محققة.

* المرحلة 2: نفرض صحة $p(n)$ أي : $0<u_n<3$ و نبرهن صحة $p(n+1)$ أي :

$0<u_{n+1}<3$.

لدينا : $0<u_n<3$ ومنه $0<2u_n<6$ ومنه $3<2u_n+3<9$ ومنه : $0<2u_n+3<9$

ومنه: $0<\sqrt{2u_n+3}<3$ ، أي: $0<u_{n+1}<3$.

* الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\leq 6$.

$3-$ أ) لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$.

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n+3}-u_n=\left(\sqrt{2u_n+3}-u_n\right)\times\dfrac{\sqrt{2u_n+3}+u_n}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$

$$=\frac{\left(\sqrt{2u_n+3}\right)^2-u_n^2}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}=\frac{-u_n^2+2u_n+3}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$$

كثير الحدود $-u_n^2+2u_n+3$ يقبل جذرين متمايزين هما -1 و 3 ومنه:

$$-u_n^2+2u_n+3=-(u_n+1)(u_n-3)=(u_n+1)(3-u_n)$$

إذن: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(u_n+1)(3-u_n)}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$.

إن إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ هي من إشارة $(3-u_n)$ ، لأن $\sqrt{2u_n+3}+u_n>0$ و $(u_n+1)>0$ لكون $0<u_n<3$.

بما أن: $u_n<3$ فإن $3-u_n>0$ ومنه $u_{n+1}-u_n>0$. إذن (u_n) متزايدة تماما.

ب) حسب النظرية ، بما أن (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة .

حساب النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

لتكن l نهاية المتتالية (u_n) حيث l عدد حقيقي .

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ ، ومنه: l يحقق $l=\sqrt{l+3}$.

بالتربيع نجد $\begin{cases}l^2=2l+3\\ l\geq 0\end{cases}$ ، بحل المعادلة $l^2-2l-3=0$ ، نجد: $l=-1$ (مرفوض)

أو $l=3$ وهو مقبول . إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$.

التمرين الثاني :

1 . $z=\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ تعني $z(z-2+3i)=3i(z+2i)$

أي $z^2-2z+3iz=3iz+6i^2$ ، بعد التبسيط نجد $z^2-2z+6=0$ ، وهي معادلة من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية مميزها $\Delta=-20=\left(\sqrt{20}i\right)^2=\left(2\sqrt{5}i\right)^2$

تقبل حلين مركبين مترافقين $z_1=\dfrac{2-2\sqrt{5}i}{2}=1-\sqrt{5}i$ ، $z_2=\overline{z_1}=1+\sqrt{5}i$.

2 . لدينا: $|z_A|=\left|1+i\sqrt{5}\right|=\sqrt{6}$ ، أي $OA=\sqrt{6}$.

ولدينا: $|z_B|=\left|1-i\sqrt{5}\right|=\sqrt{6}$ ، أي $OB=\sqrt{6}$.

ومنه $OA=OB=\sqrt{6}$ ، أي A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O و نصف قطرها $\sqrt{6}$.

3 . أ –لدينا $z'=\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ ، بتطبيق خواص الطويلة نجد: $|z'|=\left|\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}\right|$

أي $|z'|=\dfrac{|3i(z+2i)|}{|z-2+3i|}$ ، أي $|z'|=\dfrac{|3i||z+2i|}{|z-2+3i|}$ ، أي $|z'|=\dfrac{|3i||z-(-2i)|}{|z-(2-3i)|}$

أي $|z'|=\dfrac{|3i||z-z_C|}{|z-z_D|}$ ، أي $OM'=\dfrac{3CM}{DM}$. إذن: $OM'=3\dfrac{CM}{DM}$

ب– M تنتمي (Δ) ولكون (Δ) محور القطعة $[CD]$ فإن $CM=DM$ ن بالتعويض في العلاقة $OM'=3\dfrac{CM}{DM}$ ، نجد $OM'=3\dfrac{\cancel{CM}}{\cancel{DM}}$ ، أي $OM'=3$.

ومنه النقطة M' تنتمي إلى الدائرة (γ) التي مركزها O ونصف قطرها 3 .

<u>التحقق من أن E تنتمي إلى</u> (γ):

يكفي أن نبين أن $OE=3$.

بالفعل لدينا: $OE=|z_E|=|3i|=3$

التمرين الثالث :

1 . أ –لدينا: $\overrightarrow{AB}(1;4;-6)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;5;-4)$. نلاحظ أن $\dfrac{1}{-2}\neq\dfrac{4}{5}$ ، وهذا كاف للقول أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقط A ، B و C ليست في استقامية فهي تشكل مستو وحيد هو المستوي (ABC)

ب –يكفي أن نبين أن إحداثيات كل من النقط A ، B و C تحقق معادلة المستوي (p) .

ـ إحداثيات A تحقق معادلة (p) لأن: $14(1)+16(-2)+13(5)-47=47-47=0$

ـ إحداثيات B تحقق معادلة (p) لأن: $14(2)+16(2)+13(-1)-47=47-47=0$

ـ إحداثيات C تحقق معادلة (p) لأن: $14(-1)+16(3)+13(1)-47=47-47=0$

2. تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) :

المستقيم (AB) هو مجموعة النقط $M\ (x\,;y\,;z)$ بحيث: $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ تكافئ $;t\in\mathbb{R}$
$$(AB):\begin{cases}x=1+t\\ y=-2+4t\\ z=5-6t\end{cases}$$

3. أ ـ معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$.

المستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$ هو مجموعة النقط $M\ (x\,;y\,;z)$ بحيث $AM=BM$.

$AM=BM$ تكافئ
$$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2+(z-5)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2}$$

بالتربيع نجد $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2$

بعد النشر و التبسيط نجد : $(Q):2x+8y-12z+21=0$

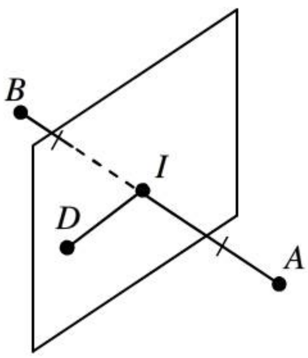
<u>طريقة أخرى:</u>

المستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$، يشمل منتصف القطعة $[AB]$ و $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظم له .

ب ـ يكفي أن نبين أن إحداثيات النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ تحقق في معادلة (Q).

بتعويض إحداثيات النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ في معادلة (Q) نجد:

$$2(-1)+8(-2)-12\left(\frac{1}{4}\right)+21=-21+21=0 .$$



جـ ـ المسافة بين النقطة D و المستقيم (AB) هي الطول ID

حيث النقطة I هي منتصف $[AB]$.لدينا: $I\left(\frac{3}{2};0;2\right)$ ، ومنه:

$$ID=\sqrt{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2+(0+2)^2+\left(2-\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{213}{16}}=\frac{\sqrt{213}}{16}$$

إذن: $d\,(D;(\Delta))=ID=\frac{\sqrt{213}}{16}$.

التمرين الرابع :

1. أ – حساب $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$:

لدينا: $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} (x+5) = 5$.

وبما أن $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{0^-}{-1} = 0^+$ و $\lim_{X \xrightarrow{>} 0} \ln X = -\infty$ فإن $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\infty$

ومنه: $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\infty$ ، وبالتالي $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = -\infty$.

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x = 0$ (محور التراتيب) مقارب لمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب – حساب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$:

لدينا: $\lim_{x \to -\infty} (x+5) = -\infty$.

وبما أن $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right) = 1$ و $\lim_{X \to 1} \ln X = \ln 1 = 0$ فإن $\lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$

ومنه: $\lim_{x \to -\infty} 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$ ، وبالتالي $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ ولدينا:

$$f'(x) = 1 + 6\frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{\frac{x}{x-1}} = 1 + 6\times\frac{(-1)}{\cancel{(x-1)^2}}\times\frac{\cancel{x-1}}{x} = 1 - \frac{6}{x(x-1)} = \frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x^2 - x - 6$ لكون على المجال $]-\infty;0[$ لدينا $\frac{x}{x-1} > 0$

ومنه $x(x-1) > 0$.

كثير الحدود $x^2 - x - 6$ يقبل جذرين متمايزين هما -2 و 3 (مرفوض) ، و إشارته موضحة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		-2		0
x^2-x-6		$+$	0	$-$	

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2]$ و متناقصة تماما على المجال $[-2;0[$.

يكون جدول التغيرات كما يلي:

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$3+6\ln\frac{2}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

حيث $f(-2)=3+6\ln\frac{2}{3}$.

3. أ–لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+5)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$. (حسب ما سبق)

ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلة له: $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب –لدراسة وضع المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)، ندرس إشارة الفرق $f(x)-(x+5)$.

لدينا: $f(x)-(x+5)=6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

على المجال $]-\infty;0[$ يكون $x>x-1$ ومنه بالقسمة على العدد السالب $x-1$ نجد

$\frac{x}{x-1}<1$ ومنه $\ln\frac{x}{x-1}<\ln 1$ ومنه $\ln\frac{x}{x-1}<0$ و بالتالي: $6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)<0$

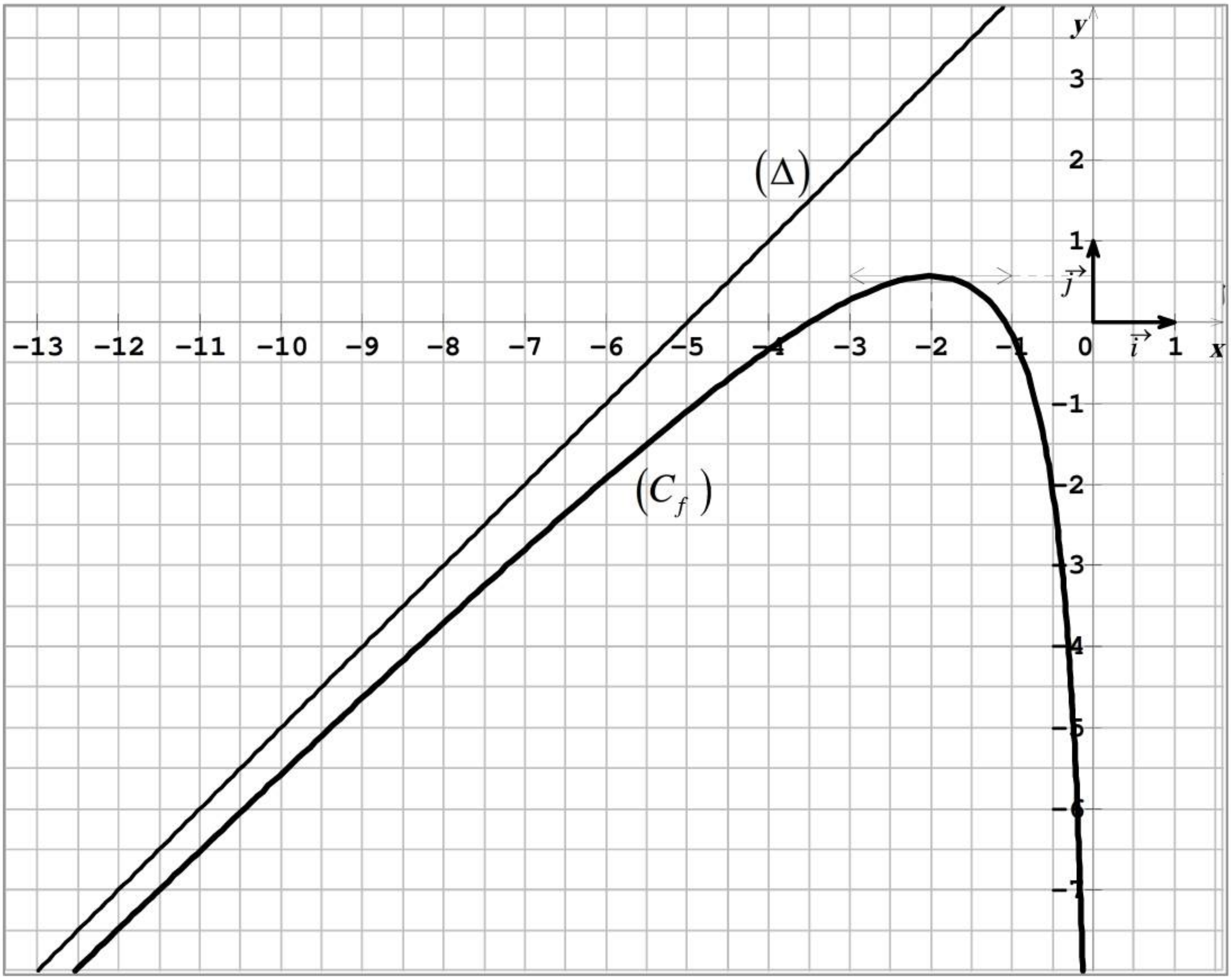
إذن: $f(x)-(x+5)<0$ ونستنتج أن (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال $]-\infty;0[$.

4. على المجال $[-3,5;-3,4]$ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما ولكون $f(-3,5)\approx-0,01<0$ و $f(-3,4)\approx0,05>0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]-3,5;-3,4[$.

- على المجال $[-1,1;-1]$ الدالة f مستمرة و متناقصة تماما ولكون $f(-1,1)\approx0,02>0$ و $f(-1)\approx-0,16<0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β من المجال $]-1,1;-1[$.

بيانيا المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β .

5 .رسم المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ):



6 . أ – النقطتان A و B متمايزتان فهما تعينان مستقيما وحيدا هو المستقيم (AB) ،

يكفي أن نبين أن إحداثيات كلا من A و B تحقق المعادلة $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)$.

ـ إحداثيات A تحقق المعادلة لأن: $\frac{1}{2}(-1)+\frac{7}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)=3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)$.

ـ إحداثيات B تحقق المعادلة لأن: $\frac{1}{2}(-2)+\frac{7}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)$.

ب ـ معامل توجيه المستقيم (AB) هو $\frac{1}{2}$ ، بالتالي نحل المعادلة $f'(x)=\frac{1}{2}$

$f'(x)=\frac{1}{2}$ تعني $\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}=\frac{1}{2}$ ، أي $2x^2-2x-12=x^2-x$

أي: $x^2-x-12=0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلين $x=-3$ مقبول أو $x=4$ هو مرفوض .

ومنه: المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 فاصلتها -3 ، ترتيبها يحسب بالسهل من معادلة (AB) كما يلي : $\frac{1}{2}(-3)+\frac{7}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)=2+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

ومنه: $M_0\left(-3;2+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

7 ـ الدالة g تقبل الاشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ لأنها عبارة عن مجموع و جداء و مركب دوال قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;0[$.

ـ لدينا من أجل كل x من المجال $]-\infty;0[$:

$$g'(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\cancel{x}\times\frac{(-1)}{\cancel{x}(x-1)}+6\times\frac{(-1)}{1-x}$$

$$=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+\frac{-6}{1-x}+\frac{-6}{1-x}$$

$$=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+\frac{-6}{x-1}+\frac{6}{x-1}$$

$$=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$=f(x)$$

ومنه g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1. نضع: $p(n)$ ، من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$.

* المرحلة 1: من أجل $n = 0$ لدينا $P(0)$: $3 < u_0 < 4$ ، أي: $3 < \frac{13}{4} < 4$ محققة.

* المرحلة 2: نفرض صحة $p(n)$ أي : $3 < u_n < 4$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي :
$3 < u_{n+1} < 4$.

لدينا : $3 < u_n < 4$ ومنه $0 < u_n - 3 < 1$ ومنه $0 < \sqrt{u_n - 3} < 1$ ومنه :
$3 < 3 + \sqrt{u_n - 3} < 4$ أي: $3 < u_{n+1} < 4$.

* الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$.

2. من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = 3 + \sqrt{u_n - 3} - u_n = \left[\sqrt{u_n - 3} + (3 - u_n)\right] \times \frac{\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n)}{\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{u_n - 3}\right)^2 - (3 - u_n)^2}{\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n)} = \frac{u_n - 3 - \left(9 - 6u_n + u_n^2\right)}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3} = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$$

استنتاج أن (u_n) متزايدة تماما:

إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ هي من إشارة البسط $-u_n^2 + 7u_n - 12$ إذ أن المقام
$\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3 > 0$ ، لكون $\sqrt{u_n - 3} > 0$ و $u_n - 3 > 0$ ، لأن $3 < u_n$

كثير الحدود $-u_n^2 + 7u_n - 12$ يقبل جذرين متمايزين هما 3 و 4 ومنه:

$$-u_n^2 + 7u_n - 12 = -(u_n - 3)(u_n - 4) = (u_n - 3)(4 - u_n)$$

لكون $3 < u_n < 4$ فإن $(u_n - 3) > 0$ و $(4 - u_n) > 0$ ومنه $(u_n - 3)(4 - u_n) > 0$

بالتالي $-u_n^2 + 7u_n - 12$ وعليه $u_{n+1} - u_n > 0$. إذن (u_n) متزايدة تماما.

3. بما أن (u_n) محدودة من الأعلى و متزايدة تماما ، فحسب النظرية ، (u_n) متقاربة .

4. أ–لدينا: $v_n = \ln(u_n - 3)$ ومنه:

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 3) = \ln\left(3 + \sqrt{u_n - 3} - 3\right) = \ln\left(\sqrt{u_n - 3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u_n - 3) = \frac{1}{2}v_n$$

بما أن $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ فإن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$.

حدها الأول : $v_0=\ln(u_0-3)=\ln\left(\frac{13}{4}-3\right)=\ln\frac{1}{4}=-\ln 4=-2\ln 2$

إذن $v_0=-2\ln 2$.

ب – لدينا: $v_n=v_0\times q^n=(-2\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{-2\ln 2}{2^n}=\frac{-\ln 2}{2^{n-1}}$ ، إذن: $v_n=-\frac{\ln 2}{2^{n-1}}$

ولدينا: $v_n=\ln(u_n-3)$ تكافئ $e^{v_n}=e^{\ln(u_n-3)}$ ، أي $u_n-3=e^{v_n}$ ، أي:

$u_n=3+e^{v_n}$. إذن: $u_n=3+e^{\left(-\frac{\ln 2}{2^{n-1}}\right)}$.

حساب $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n$:

لدينا $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(-\frac{\ln 2}{2^{n-1}}\right)=0$ لكون $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}2^{n-1}=0$ ، لأن $2>1$.

ومنه: $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}e^{\left(-\frac{\ln 2}{2^{n-1}}\right)}=e^0=1$ ، ومنه : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left[3+e^{\left(-\frac{\ln 2}{2^{n-1}}\right)}\right]=4$. إذن: $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n=4$.

(v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\ln(u_n-3)$.

جـ- لدينا: $P_n=\underbrace{(u_0-3)(u_1-3)(u_2-3)\times\ldots\times(u_n-3)}_{n+1\text{ عـــاملا}}$

ولدينامن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n-3=e^{v_n}$ ،ومنه:

$$P_n=e^{v_0}\times e^{v_1}\times e^{v_2}\times\ldots\times e^{v_n}=e^{(v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n)}$$

المجموع $v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n$ هو مجموع $(n+1)$ حدا الأولى للمتتالية الهندسية (v_n).

ومنه: $v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=(-2\ln 2)\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$

$$=(-4\ln 2)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

إذن: $v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n=(-4\ln 2)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]=\left(\ln\frac{1}{16}\right)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

وبالتالي: $P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times \ldots \times e^{v_n} = e^{\left(ln\frac{1}{16}\right)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$

اثبات أن : $\lim_{n\mapsto+\infty} p_n = \frac{1}{16}$

بما أن: $-1 < \frac{1}{2} < 1$ فإن $\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ ومنه $\lim_{n\mapsto+\infty}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 1$.

ومنه: $\lim_{n\mapsto+\infty}\left(ln\frac{1}{16}\right)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = ln\frac{1}{16}$.

ومنه: $\lim_{n\mapsto+\infty} e^{\left(ln\frac{1}{16}\right)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]} = e^{\left(ln\frac{1}{16}\right)} = \frac{1}{16}$.

إذن: $\lim_{n\mapsto+\infty} p_n = \frac{1}{16}$.

التمرين الثاني :

1 . الشعاعان $\overrightarrow{AB}\,(3;1;-1)$ و $\overrightarrow{AC}\,(2;-1;-1)$ غير مرتبطين خطيا لأن $\frac{3}{2} \neq \frac{1}{-1}$ ، ومنه النقط A ، B و C ليست في استقامية فهي تعين مستو وحيد هو المستوي (ABC).

2 . يكفي أن نبين أن إحداثيات كل من النقط A ، B و C تحقق المعادلة $2x - y + 5z - 3 = 0$ ، بالفعل لدينا :

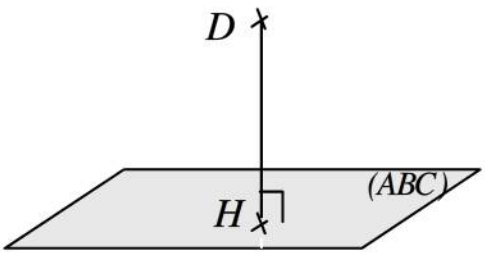
- إحداثيات A تحقق لأن: $2(-1)-0+5(1)-3 = 3-3 = 0$
- إحداثيات B تحقق لأن: $2(2)-1+5(0)-3 = 3-3 = 0$
- إحداثيات C تحقق لأن: $2(1)-(-1)+5(0)-3 = 3-3 = 0$

3 . أ – إحداثيات D لا تحقق المعادلة لأن $2(2)-(-1)+5(3)-3 = 20-3 = 17 \neq 0$

ومنه D لا تنتمي إلى المستوي (ABC).

ب– نبين أن:

- H تنتمي إلى المستوي (ABC).
- $\overrightarrow{DH}$ ناظم للمستوي (ABC).

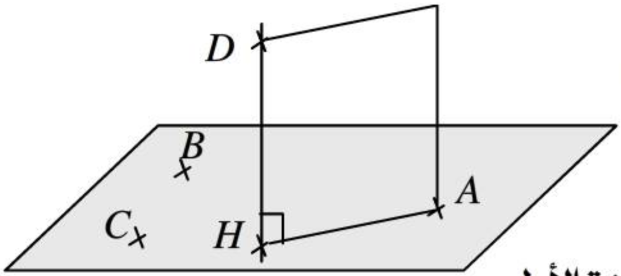


أولا: - H تنتمي إلى المستوي (ABC) لأن احداثياها تحقق المعادلة لأن $2\left(\frac{13}{15}\right)-\left(-\frac{13}{30}\right)+5\left(\frac{1}{6}\right)-3 = \frac{52+13+25}{30}-3 = 3-3 = 0$

ثانيا : $\overrightarrow{DH}$ ناظم للمستوي (ABC) لأن: $\overrightarrow{DH}\left(\frac{13}{15}-2;-\frac{13}{30}+1;\frac{1}{6}-3\right)$

أي: $\overrightarrow{DH}\left(-\frac{17}{15};\frac{17}{30};-\frac{17}{6}\right)$ ، الشعاع $\vec{n}\,(2;-1;5)$ ناظم للمستوي (ABC) .

نلاحظ أن $\frac{-\frac{17}{15}}{2}=\frac{\frac{17}{30}}{-1}=\frac{-\frac{17}{6}}{5}=-\frac{17}{30}$ ، ومنه $\overrightarrow{DH}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا و بالتالي $\overrightarrow{DH}$ ناظم للمستوي (ABC).



جـ- المستوي (ADH) يحوي المستقيم (DH)

ولكون (DH) عمودي على (ABC)

نستنتج أن المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان . (أنظر تعريف تعامد مستويين في السنة الأولى)

المستويان (ADH) و (ABC) متقاطعان وفق المستقيم (AH) ، لنعين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AH).

المستقيم (AH) هو مجموعة النقط $M\ (x;y;z)$ بحيث $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AH}$ ، حيث t وسيط حقيقي.

لدينا $\overrightarrow{AM}\,(x+1;y;z-1)$ و $\overrightarrow{AH}\left(\frac{28}{15};-\frac{13}{30};-\frac{5}{6}\right)$.

$\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AH}$ تكافئ : $\begin{cases} x+1=\frac{28}{15}t \\ y=-\frac{13}{30}t \\ z-1=-\frac{5}{6}t \end{cases}$ ، أي : $\begin{cases} x=-1+\frac{28}{15}t \\ y=-\frac{13}{30}t \\ z=1-\frac{5}{6}t \end{cases}$ وهذه الجملة هي تمثيل وسيطي للمستقيم (AH).

التمرين الثالث :

1 . أ – لدينا $P(6)=6^3-12\times6^2+48\times6-72=0$. ومنه 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب – لدينا: $(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)=z^3+\alpha z^2+\beta z-6z^2-6\alpha z-6\beta$

$$=z^3+(\alpha-6)z^2+(\beta-6\alpha)z-6\beta=P(z)$$
$$=z^3-12z^2+48z-72$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} \alpha-6=-12 \\ \beta-6\alpha=48 \\ -6\beta=-72 \end{cases}$ ومنه: $\alpha=-6$ ، $\beta=12$.

إذن: $P(z)=(z-6)\left(z^2-6z+12\right)$

جـ– $P(z)=0$ معناه $z-6=0$ أو $z^2-6z+12=0$

$z-6=0$ معناه: $z=6$.

المعادلة $z^2-6z+12=0$ من الدرجة الثانية مميزها $\Delta=-12=\left(i\sqrt{12}\right)^2=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$

تقبل حلين مركبين مترافقين $z_1=\dfrac{6-2i\sqrt{3}}{2}=3-i\sqrt{3}$ ، $z_2=\overline{z_1}=3+i\sqrt{3}$

ومنه: $P(z)=0$ معناه $z=6$ أو $z=3-i\sqrt{3}$ أو $z=3+i\sqrt{3}$.

2. $z_A=6$ ، $z_B=3+i\sqrt{3}$ ، $z_C=3-i\sqrt{3}$.

أ – كتابة z_A على الشكل الأسي:

لدينا: $|z_A|=|6|=6$ و $arg(z_A)=arg(6)=0+2\pi k$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

ومنه: $z_A=6e^{i0}$.

ـ كتابة z_B على الشكل الأسي:

لدينا: $|z_B|=\left|3+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

لتكن $\theta=arg(z_B)$ ، لدينا: $\begin{cases} \cos\theta=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ ، ومنه: $\theta=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$.

إذن: $z_B=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

ـ كتابة z_C على الشكل الأسي:

بما أن: $z_C=\overline{z_B}$ ، فإن $z_C=2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

ب – كتابة العدد المركب $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري:

$$\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\frac{6-\left(3+i\sqrt{3}\right)}{6-\left(3-i\sqrt{3}\right)}=\frac{3-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}\times\frac{3-i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$ ،

ومنه: $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

لدينا: $\left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$. لتكن $\theta' = arg\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$،

لدينا: $\begin{cases} \cos\theta' = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta' = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ومنه $\theta' = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

إذن: $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

جـ- طبيعة المثلث ABC :

لدينا: $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$ تكافئ $z_A - z_B = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}(z_A - z_C)$.

وهذا يعني أن C هي صورة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{3}$ ،

إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3 . أ –الكتابة المركبة للتشابه S :

لدينا: $S : z' = az + b$ ، حيث : $|a| = \sqrt{3}$ ، و $arg(a) = \frac{\pi}{2}$. ومنه: $a = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{3}$

إذن: $a = i\sqrt{3}$.

و $b = (1-a)z_C$ ، ومنه: $b = (1 - i\sqrt{3})\left(3 - i\sqrt{3}\right) = -4i\sqrt{3}$ ، إذن: $b = -4i\sqrt{3}$

وبالتالي: $S : z' = i\sqrt{3}z - 4i\sqrt{3}$.

ب – باستعمال الكتابة المركبة نجد :

$z_{A'} = i\sqrt{3}z_A - 4i\sqrt{3} = 6i\sqrt{3} - 4i\sqrt{3} = 2i\sqrt{3}$ ، إذن: $z_{A'} = 2i\sqrt{3}$.

جـ- يكفي أن نبين أن العدد $\frac{z_A - z_{A'}}{z_A - z_B}$ حقيقي.

لدينا: $\frac{z_A - z_{A'}}{z_A - z_B} = \frac{6 - 2i\sqrt{3}}{6 - \left(3 + i\sqrt{3}\right)} = \frac{6 - 2i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} = \frac{2\cancel{\left(3 - i\sqrt{3}\right)}}{\cancel{3 - i\sqrt{3}}} = 2$

بما أن $\frac{z_A - z_{A'}}{z_A - z_B}$ حقيقي فإن النقط A ، B ، A' في استقامية.

التمرين الرابع :

I) $g(x) = 1 - xe^x$

1) حساب $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x)$:

بما ان $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$ فإن $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1$.

بما ان $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ فإن $\lim_{x \to +\infty} -xe^x = -\infty$ ومنه $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

2) الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$g'(x) = 0 - (1 \times e^x + x \times e^x) = -(1+x)e^x$$

بما أن $e^x > 0$ فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة $-(1+x)$ الموضحة في الجدول الموالي:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1]$ و متناقصة تماما على المجال $[-1;+\infty[$.

- جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$1+e^{-1}$	$\searrow$	$-\infty$

حيث: $g(-1) = 1-(-1)e^{-1} = 1+e^{-1} \simeq 1,37 > 0$.

3) أ – على المجال $[-1;+\infty[$ ، الدالة g مستمرة و متناقصة تماما وبما أن $g(-1) > 0$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[-1;+\infty[$.

ب – التحقق من أن $0,5 < \alpha < 0,6$:

بما ان المجال $]0,5;0,6[$ محتوى في المجال $[-1;+\infty[$ يكفي أن نتحقق من أن $g(0,5)$ و $g(0,6)$ من إشارتين مختلفتين.

بحاسبة نجد $g(0,5) \approx 0,18 > 0$ و $g(0,6) \approx -0,09 < 0$

إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) $f(x)=(x-1)e^{x}-x-1$

1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

لدينا: $f(x)=xe^{x}-e^{x}-x-1$.

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x-1)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2) من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن:

$$f'(x)=1\times e^{x}+(x-1)\times e^{x}-1=xe^{x}-1=-(1-xe^{x})=-g(x)$$

بما أن: $f'(x)=-g(x)$ فإن إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty;2]$ ومنه:

x	$-\infty$ $\quad$ α $\quad$ 2
$f'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$e^{2}-3$

حيث: $f(2)=(2-1)e^{2}-2-1=e^{2}-3\approx 4,39$.

3) اثبات أن : $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^{2}+1}{\alpha}\right)$:

لدينا: $f(\alpha)=(\alpha-1)e^{\alpha}-\alpha-1$ ، ومن جهة لدينا: $g(\alpha)=0$ تكافئ $1-\alpha e^{\alpha}=0$

ومنه : $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$ ، بتعويض $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$ في العلاقة $f(\alpha)=(\alpha-1)e^{\alpha}-\alpha-1$ نجد:

$f(\alpha)=(\alpha-1)\dfrac{1}{\alpha}-\alpha-1=\dfrac{\alpha-1-\alpha^{2}-\alpha}{\alpha}=\dfrac{-1-\alpha^{2}}{\alpha}$ ، ومنه: $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^{2}+1}{\alpha}\right)$

إيجاد حصر للعدد $f(\alpha)$:

لدينا: $0,5<\alpha<0,6$ ومنه: $0,25<\alpha^{2}<0,36$ ، ومنه: $1,25<\alpha^{2}+1<1,36$ ... (1)

ولدينا: $\dfrac{1}{0,6}<\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{0,5}$ ... (2) ، من (1) و (2) وبالضرب طرفا بطرف نجد:

$\dfrac{1,25}{0,6}<\dfrac{\alpha^{2}+1}{\alpha}<\dfrac{1,36}{0,5}$ ، ثم بالضرب في العدد السالب -1 نجد:

$-\dfrac{1,36}{0,5}<-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)<-\dfrac{1,25}{0,6}$ ، أي: $-2,72<f(\alpha)<-2,08$.

4) أ–لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x-e^x\right)=0$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x-1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

ب–وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

لدينا: $f(x)-(-x-1)=(x-1)e^x$ ومنه إشارة الفرق $f(x)-(-x-1)$ هي من إشارة $x-1$ على المجال $]-\infty;2[$ ، ومنه:

x	$-\infty$ $\qquad$ 1 $\qquad$ 2
$f(x)-(-x-1)$	$-$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+$

ومنه:

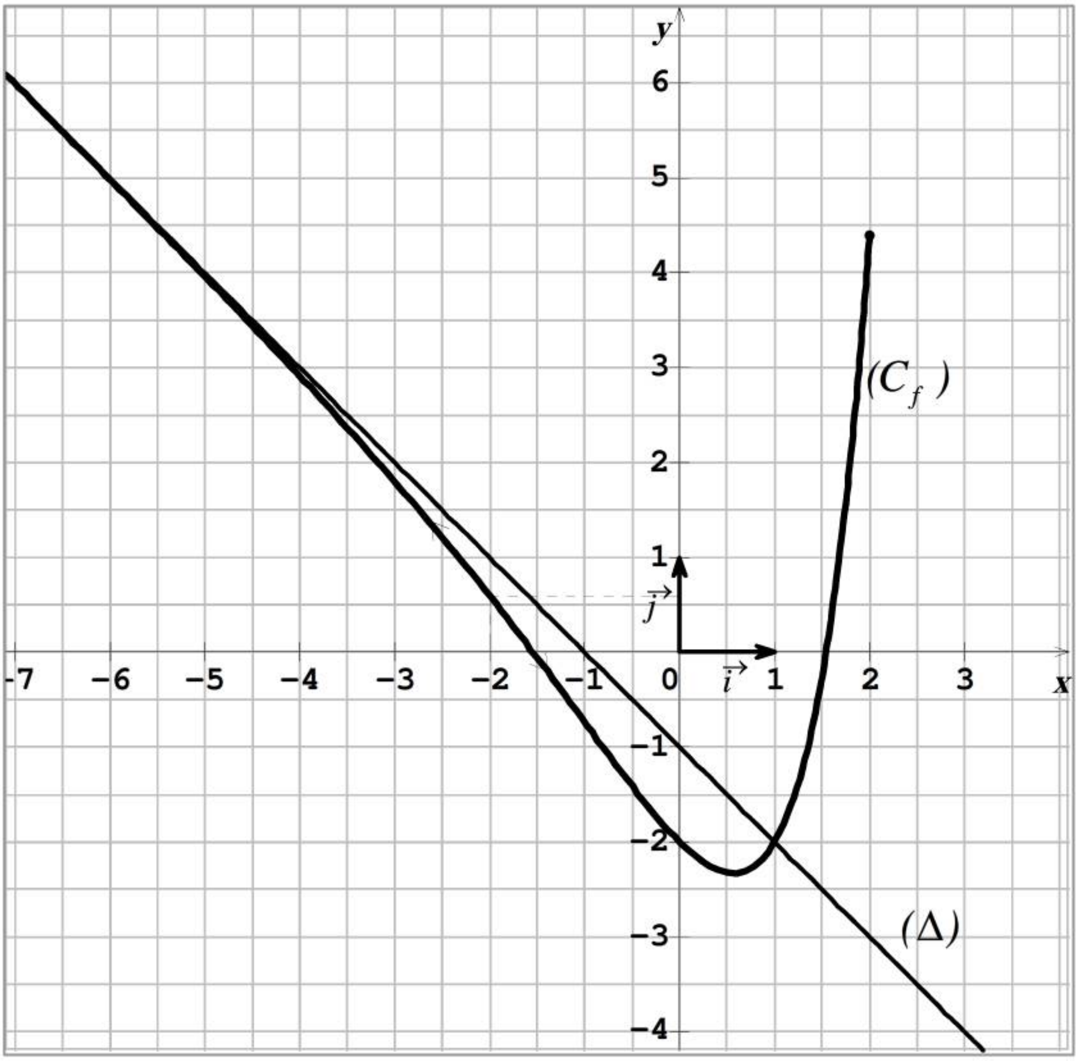
- (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال $]-\infty;-1[$.
- (C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $]-1;2[$.
- (Δ) يقطع (C_f) في النقطة ذات الإحداثيين $(1;-1-1)$ ، أي ذات الإحداثيين $(1;-2)$.

5) أ– على المجال $[-1,6;-1,5]$ الدالة f مستمرة و متناقصة تماما ولكون $f(-1,6)\approx,08>0$ و $f(-1,5)\approx-0,6<0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_1 حيث $-1,6<x_1<-1,5$.

- على المجال $[1,5;1,6]$ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما ولكون $f(1,5)\approx-0,26<0$ و $f(1,6)\approx0,37>0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_2 حيث $1,5<x_2<1,6$.

بيانيا: المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;2[$ يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_1 و x_2.

ب–رسم (Δ) و (C_f) :



6) $h(x)=(ax+b)e^{x}$.

أ $-$ h دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{x}$ على $\mathbb{R}$ معناه : من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$h'(x)=xe^{x}$.

$h'(x)=xe^{x}$ تكافئ $ae^{x}+(ax+b)e^{x}=xe^{x}$ ، أي $axe^{x}+a+b=xe^{x}$

بالمطابقة نجد : $a=1$ و $a+b=0$ ، ومنه : $a=1$ و $b=-1$.

إذن: $h(x)=(x-1)e^{x}$.

ب $-$ لدينا: $g(x)=1-xe^{x}$ ، ومنه G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$ معرفة بـ:

$G(x)=x-h(x)$. إذن: $G(x)=x-(x-1)e^{x}$.