حل بكالوريا :دورة جوان 2009

حل الموضوع الأول

التمرين الأول :

1. لدينا : $v_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$ ،

و $v_1 = u_2 - u_1 = \left(\frac{4}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_0\right) - 2 = \left(\frac{4}{3}\times 2 - \frac{1}{3}\times 1\right) - 2 = \frac{1}{3}$

2. لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n - u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = \frac{1}{3}\left(u_{n+1} - u_n\right) = \frac{1}{3}v_n$$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = 1$.

3. أ) لدينا : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

إذن : $S_n = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

ب) لدينا : $v_n = u_{n+1} - u_n$ ومنه :

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = \left(u_1 - u_0\right) + \left(u_2 - u_1\right) + \ldots + \left(u_{n-1} - u_{n-2}\right) + \left(u_n - u_{n-1}\right)$$
$$= \cancel{u_1} - u_0 + \cancel{u_2} \cancel{-u_1} + \cancel{u_{n-1}} \cancel{-u_{n-2}} + u_n \cancel{-u_{n-1}} = u_n - u_0$$

إذن ، $S_n = u_n - u_0$ ، ومنه : $u_n = S_n + u_0 = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 1$

جـ) لدينا : $u_n = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 1$ ، وبما أن $-1 < \frac{1}{3} < 1$ فإن $\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ وبالتالي :

$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$. إذن : (u_n) متقاربة نحو العدد $\frac{5}{2}$.

التمرين الثاني :

1 . لدينا: $P(z)=0$ تكافئ $(z-1-i)(z^2-2z+4)=0$ ، أي: $z-1-i=0$ أو $z^2-2z+4=0$ ، $z-1-i=0$ معناه : $z=1+i$ و $z^2-2z+4=0$ من الدرجة الثانية

مميزها: $\Delta=4-16=-12=\left(2\sqrt{3}i\right)^2$ فهي تقبل حلين مركبين مترافقين :

$z=\dfrac{2+2\sqrt{3}i}{2}=1+\sqrt{3}i$ أو $z=\overline{1+i\sqrt{3}}=1-\sqrt{3}i$.

2 . أ / لدينا: $z_1=1+i$ ، $z_2=1-\sqrt{3}i$.

$|z_1|=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ ، لتكن $\theta_1=\arg(z_1)$. لدينا: $\begin{cases}\cos\theta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ ،

ومنه : $\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$ ، وبالتالي: $z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

ومن جهة : $|z_2|=\left|1-\sqrt{3}i\right|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$ ، لتكن $\theta_2=\arg(z_2)$.

لدينا: $\begin{cases}\cos\theta_1=\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ، ومنه : $\theta_2=-\dfrac{\pi}{3}$ ، وبالتالي: $z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

ب / لدينا: $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{1+i}{1-\sqrt{3}i}\times\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}+i\,\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$

وبما أن : $z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ فإن : $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

جـ / من الشكل الأسي $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ نستنتج الشكل المثلثي:

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\dfrac{7\pi}{12}+i\sin\dfrac{7\pi}{12}\right]=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{7\pi}{12}+i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{7\pi}{12}$ ، فبالمطابقة مع الشكل

الجبري : $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}+i\,\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$ ، نجد: $\cos\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ $\cos\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{2}{\sqrt{2}}=$

و: $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

3. أ / لدينا: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right]$ ، وبتطبيق دستور موافر نجد:

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left[\cos\frac{n7\pi}{12}+i\sin\frac{n7\pi}{12}\right]$ ، و $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقي معناه: $\sin\frac{n7\pi}{12}=0$

أي: $\frac{n7\pi}{12}=\pi k$ ، حيث k عدد طبيعي، ومنه: $7n=12k$ ، أي: $n=\frac{12k}{7}$ ،

ومنه: $n=12\alpha$ ، حيث: α عدد طبيعي.

ب / بتطبيق دستور موافر نجد: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}\left[\cos\frac{456\times7\pi}{12}+i\sin\frac{456\times7\pi}{12}\right]$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}\left[\cos 266\pi+i\sin 266\pi\right]=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}\left[\cos(2\pi\times133)+i\sin(2\pi\times133)\right]$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}\left[1+i\times0\right]=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}=\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^{228}=\left(\frac{1}{2}\right)^{228}$$

التمرين الثالث :

1) أ / نبين أن النقط A ، B و C ليست في استقامية وأن إحداثيات كل من A ، B و C تحقق معادلة (P).

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-1;2;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(1;1;1)$. بما أن $\frac{-1}{1}\neq\frac{2}{1}$ فإن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا.

ومنه النقط A ، B و C ليست في استقامية. ولدينا من جهة:

إحداثيات A فعلا تحقق معادلة (P) لأن: $1-2+1=0$ تكافئ $0=0$.

إحداثيات B فعلا تحقق معادلة (P) لأن: $0-1+1=0$ تكافئ $0=0$.

إحداثيات A فعلا تحقق معادلة (P) لأن: $2-3+1=0$ تكافئ $0=0$.

إذن المستوي (P) هو المستوي (ABC) .

ب / لدينا: $\overrightarrow{AB}(-1;2;-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(1;1;1)$ و $\overrightarrow{BC}(2;-1;2)$ ومنه:

$AB^2=(-1)^2+2^2+(-1)^2=6$ ، $AC^2=1^2+1^2+1^2=3$ ، $BC^2=2^2+(-1)^2+2^2=9$

نلاحظ أن $BC^2=AB^2+AC^2$ ، ومنه المثلث ABC قائم في A .

2) أ / إحداثيات D لا تحقق معادلة (P) إذ أن : $2-4+1=0$ خاطئة ، ومنه D لا تنتمي إلى (P).

ب / النقط الأربعة A ، B ، C و D لا تنتمي إلى نفس المستوي ومنه $ABCD$ رباعي وجوه .

3) أ / $d\left(D;(ABC)\right)=\dfrac{|2-4+1|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

ب / ليكن V حجم $ABCD$ ، ولتكن S مساحة مثلث القاعدة ، نختار المثلث ABC .

وليكن h إرتفاع $ABCD$ ، لدينا: $V=\dfrac{1}{3}\times S\times h$ ، حيث:

$$S=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad h=d\left(D;(ABC)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ومنه: $V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}$.

التمرين الرابع :

1) أ / حساب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I :

- بما أن $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to -1}}(-x)=1$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to -1}}\dfrac{4}{x+1}=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to -1}}f(x)=+\infty$.
- بما أن $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to -1}}(-x)=1$ و $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to -1}}\dfrac{4}{x+1}=-\infty$ فإن : $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to -1}}f(x)=-\infty$.
- بما أن $\lim\limits_{x\to -\infty}(-x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4}{x+1}=0$ فإن : $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=+\infty$.

ب / جدول تغيرات الدالة f انطلاقا من التمثيل البياني :

x	$-\infty$	-1	0
$f'(x)$	-	‖	-
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$

2) أ / حساب نهاية g عند $+\infty$:

بما أن $\lim\limits_{x\to +\infty}x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4}{x+1}=0$ فإن : $\lim\limits_{x\to +\infty}g(x)=+\infty$.

ب / التحقق من أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$:

لدينا : $g(x)=x+\frac{4}{x+1}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x+1}=0$ ، نستنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ مقارب لـ $\left(C_g\right)$ عند $+\infty$.

جـ / دراسة تغيرات الدالة g :

الدالة g تقبل الاشتقاق على المجال $\left[0;+\infty\right[$ ولدينا :

$$g'(x)=1-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1+2)(x+1-2)}{(x+1)^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

إشارة $g'(x)$ هي من إشارة $(x-1)$ على $\left[0;+\infty\right[$ ، لأن $\frac{(x+3)}{(x+1)^2}>0$ على $\left[0;+\infty\right[$.

إشارة $(x-1)$ و $g'(x)$ مدونتان في الجدول التالي :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		-	0	+	
$g'(x)$		-	0	+	

نستنتج أن الدالة g متزايدة تماما على $\left]1;+\infty\right[$ ومتناقصة تماما على $\left[0;1\right]$ ، ويكون جدول تغيراتها كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

$(II$ $k(x)=\lvert x\rvert+\frac{4}{x+1}$

أ / لدينا

$$\lim\limits_{\substack{>\\h\to0}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim\limits_{\substack{>\\h\to0}}\frac{h+\frac{4}{h+1}-4}{h}=\lim\limits_{\substack{>\\h\to0}}\frac{\frac{h^2+h+4-4h-4}{h+1}}{h}=\lim\limits_{\substack{>\\h\to0}}\frac{h-3}{h+1}=-3$$

ومنه k قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين وعددها المشتق من اليمين عن 0 هو: $k'_d(0)=-3$

$$\lim\limits_{\substack{<\\h\to0}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim\limits_{\substack{<\\h\to0}}\frac{-h+\frac{4}{h+1}-4}{h}=\lim\limits_{\substack{<\\h\to0}}\frac{\frac{-h^2-h+4-4h-4}{h+1}}{h}=\lim\limits_{\substack{<\\h\to0}}\frac{-h-5}{h+1}=-5$$

ومنه k قابلة للاشتقاق عند 0 من اليسار وعددها المشتق من اليسار عند 0 هو : $k_g^{/}(0)=-5$

بما أن $k_d^{/}(0) \neq k_g^{/}(0)$ نستنتج أن الدالة k غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

ب / التفسير الهندسي :المنحني (C_k) يقبل نصفي مماسين عند النقطة $(0;4)$ فهي نقطة زاوية في المنحني (C_k).

2) معادلة (Δ_1) هي من الشكل : $y=k_d^{/}(0)(x-0)+k(0)$ ، أي $y=-3(x-0)+4$

ومنه معادلة (Δ_1) هي $y=-3x+4$.

معادلة (Δ_2) هي من الشكل : $y=k_g^{/}(0)(x-0)+k(0)$ ، أي $y=-5(x-0)+4$

ومنه معادلة (Δ_2) هي: $y=-5x+4$

3) رسم (Δ_1) ، (Δ_2) :

(Δ_1):

x	0	1
y	4	1

(Δ_2):

x	0	1
y	4	-1

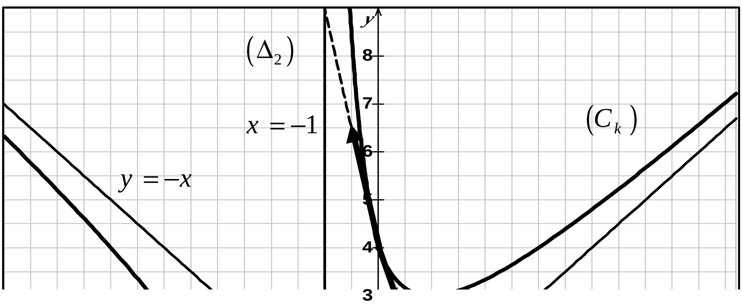
رسم (C_k):

لدينا : $k(x)=|x|+\dfrac{4}{x+1}=\begin{cases}-x+\dfrac{4}{x+1} & ;x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;0\right] \\ x+\dfrac{4}{x+1} & ;x\geq 0\end{cases}$ ،

ومنه : $k(x)=|x|+\dfrac{4}{x+1}=\begin{cases}f(x) & ;x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;0\right] \\ g(x) & ;x\geq 0\end{cases}$.

إذن : • (C_k) ينطبق على (C_f) من أجل $x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;0\right]$

• (C_k) ينطبق على (C_g) من أجل $x\geq 0$.



$y=x$

4) لتكن S المساحة المطلوبة، لدينا: $S=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}} g(x)dx$

ومنه: $S=\left[-\frac{x^2}{2}+4\ln(x+1)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}+4\ln(x+1)\right]_{0}^{\frac{1}{2}}$

إذن: $S=\left(\frac{1}{4}+4\ln 3\right)u.a$.

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1) **خطأ**، لأن : $\overrightarrow{AB}\left(-1;-5;5\right)$ و $\overrightarrow{AC}\left(1;-3;-1\right)$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا.

إذ أن : $\frac{-1}{1}\neq\frac{-5}{-3}$.

2) **صحيح**، إحداثيات النقط A ، B ، D تحقق المعادلة : $25x-6y-z-33=0$ ،
إذ أن :

النقطة A : $25\times2-6\times3+1-33=0$ محققة.

النقطة B : $25-6(-2)-4-33=0$ محققة.

النقطة D : $25+6-(-2)-33=0$ محققة.

3) **خطأ**، لأن :

$\vec{n}\left(2;-1;2\right)$ شعاع ناظم لـ (π) و $\overrightarrow{CD}\left(-2;-2;0\right)$.

لدينا: $\vec{n}$ و $\overrightarrow{CD}$ غير مرتبطين خطيا، إذ أن : $\frac{-1}{-2}\neq\frac{2}{-2}$.

إذن المستقيم (CD) ليس عمودي على المستوي (π) .

4) <u>**خطأ**</u>، لأن $\vec{n}(2;-1;2)$ و $\overrightarrow{BH}(0;3;-5)$ غير مرتبطين خطيا، إذ أن : $\frac{0}{2} \neq \frac{3}{-1}$.

<u>التمرين الثاني</u> :

1 . لدينا: $\Delta = 4-16 = -12 = \left(2\sqrt{3}i\right)^2$ ومنه المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين :

$z_1 = \frac{2+2\sqrt{3}i}{2} = 1+\sqrt{3}i$ ، $z_2 = \overline{z_1} = 1-\sqrt{3}i$.

2 . أ / لدينا: $|z_1| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$ ، لتكن $\theta_1 = \arg(z_1)$. لدينا: $\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ،

ومنه : $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ ، وبالتالي: $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ومنه : $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

ب / لدينا: $AB = |z_B - z_A| = \left|-2\sqrt{3}i\right| = 2\sqrt{3}$ ، ومنه: $AB^2 = 12$ ،

و: $AC = |z_C - z_A| = \left|\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{9} = 3$ ، ومنه: $AC^2 = 9$ ،

و: $BC = |z_C - z_B| = \left|\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{3}$ ، ومنه: $BC^2 = 3$.

نلاحظ أن: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ومنه: المثلث ABC قائم في C .

جـ / لدينا: $$Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{\frac{1}{2}\left(5+i\sqrt{3}\right)-(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})-(1+i\sqrt{3})} = \frac{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-2i\sqrt{3}} \times \frac{2i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} = \frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})$$

إذن: $Z = \frac{1}{4}(1+i\sqrt{3}) = \frac{1}{4}z_1$. ومنه: $|Z| = \left|\frac{1}{4}z_1\right| = \left|\frac{1}{4}\right| \times |z_1| = \frac{1}{4}\times 2 = \frac{1}{2}$.

و : $\arg(Z) = \arg\left(\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})\right) = \arg\left(\frac{1}{4}\right) + \arg(1+i\sqrt{3}) = 0+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

ومنه الشكل المثلثي للعدد Z : $Z = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$

د / بتطبيق دستور موافر نجد:

$$Z^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3\left[\cos\frac{3\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi}{3}\right]=\frac{1}{8}[\cos\pi+i\sin\pi]=\frac{1}{8}[-1+i\times0]=-\frac{1}{8}$$

ومنه: $Z^6=\left(Z^3\right)^2=\left(-\frac{1}{8}\right)^2=\frac{1}{64}$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي k :

$Z^{3k}=\left(Z^3\right)^k=\left(-\frac{1}{8}\right)^k$ ، إذن: Z^{3k} عدد حقيقي .

التمرين الثالث :

1 . أ) لدينا : $u_1\times u_2\times u_3=216$ وحسب خاصية الوسط الهندسي : $u_2^2=u_1\times u_3$ نستنتج أن :

$u_2^3=216$ ومنه : $u_2^3=2^3\times3^3=6^3$ ، إذن : $u_2=6$.

ـ حساب الأساس q :

لدينا : $u_1+2u_2+u_3=32$ وبما أن $u_2=6$ نجد : $u_1+u_3=20$ ، لكن : $u_3=u_2\times q$

و $u_1=\frac{u_2}{q}$ ، ومنه : $u_1+u_3=20$ تكافئ $\frac{u_2}{q}+u_2\times q=20$ أي : $\frac{6}{q}+6\times q=20$

أي : $3q^2-10q+3=0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية مميزها يساوي 64 وتقبل حلين

متمايزين هما : 3 و $\frac{1}{3}$ ، وبما أن (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما فإن : $q>1$ ومنه : $q=3$

ـ استنتاج الحد الأول u_1 :

لدينا : $u_1=\frac{u_2}{q}$ ومنه : $u_1=\frac{6}{3}=2$.

ب) لدينا : $u_n=u_1\times q^{n-1}$ ومنه : $u_n=2\times3^{n-1}$.

جـ) لدينا : $S_n=u_1\times\frac{q^n-1}{q-1}=2\times\frac{3^n-1}{3-1}=3^n-1$ ، إذن $S_n=3^n-1$.

$S_n=728$ تكافئ $3^n-1=728$ أي $3^n=729$ ، أي : $3^n=3^6$ ، إذن : $n=6$.

2.أ) لدينا : $v_1=2$ و $v_{n+1}=\frac{3}{2}v_n+u_n$ ومنه : $v_2=\frac{3}{2}v_1+u_1=\frac{3}{2}\times2+2=5$.

و : $v_3=\frac{3}{2}v_2+u_2=\frac{3}{2}\times5+6=\frac{27}{2}$

ب / لدينا : $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$. ومنه :

$$w_{n+1}=\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}-\frac{2}{3}=\frac{\frac{3}{2}v_n+u_n}{3u_n}-\frac{2}{3}=\frac{\frac{3}{2}}{3}\times\frac{v_n}{u_n}+\frac{1}{3}\times\frac{\cancel{u_n}}{\cancel{u_n}}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{v_n}{u_n}-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}w_n$$

وهذا يعني أن (w_n) هي متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ/ لدينا :

$$w_n=w_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{v_1}{u_1}-\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{2}-\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

إذن : $w_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

لدينا : $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$ ومنه : $\frac{v_n}{u_n}=w_n+\frac{2}{3}$ ، ومنه : $v_n=u_n\times w_n+\frac{2}{3}\times u_n$

ومنه : $v_n=2\times 3^{n-1}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\times 2\times 3^{n-1}=\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}+\frac{4}{3}\times 3^{n-1}$

إذن : $v_n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}+\frac{4}{3}\times 3^{n-1}$.

التمرين الرابع :

I) 1) ـ لدينا: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}(x+1)=0^+$ وبما أن: $\lim\limits_{X\overset{>}{\to}0}\ln X=-\infty$ ، فإن: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}\ln(x+1)=-\infty$

ولدينا: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}(x^2+2x)=-1$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}\left[x^2+2x+\ln(x+1)\right]=-\infty$ ،

إذن: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}h(x)=-\infty$.

ـ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ وبما أن: $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ ، فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)=+\infty$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2x)=+\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2+2x+\ln(x+1)\right]=+\infty$ ،

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$.

2) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ لدينا:

$$h'(x)=\left(x^2+2x\right)'+\ln'(x+1)=2x+2+\frac{(x+1)'}{x+1}=2(x+1)+\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ لدينا: $x+1>0$ و $1+2(x+1)^2>0$

ومنه: $h'(x)>0$ ، وبالتالي h متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3) لدينا: $h(0)=0^2+2\times 0+\ln(0+1)=\ln 1=0$ ومنه جدول إشارة $h(x)$:

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

II) 1) أ/ لدينا: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1}(x+1)=0^+$ وبما أن: $\lim\limits_{X \overset{>}{\to} 0}\ln X=-\infty$ ، فإن: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1}\ln(x+1)=-\infty$

ومنه: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=-\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1}-\frac{\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$ ولدينا: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1}(x-1)=-2$ ،

ومنه: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1}\left[x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=+\infty$ ، إذن: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1}f(x)=+\infty$.

نستنتج ان المستقيم الذي معادلة له: $x=-1$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب/ نضع: $t=\ln u$ فيكون: $u=e^t$ ومنه: $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{\frac{t}{e^t}}=0$ ،

لكون: $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$.

جـ/ حسب نتيجة السؤال السابق: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}=0$ ، وبما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$

فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

د/ لدينا: $f(x)-(x-1)=-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$ ، ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=-\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=0$$

إذن: $y=x-1$ هي معادلة لمستقيم مقارب مائل لـ (C_f) .

هـ/ لدينا: $f(x)-(x-1)=-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ ، ومنه: إشارة الفرق هي من إشارة $-\ln(x+1)$

لأن المقام $x+1>0$ على المجال $]-1;+\infty[$.

- $-\ln(x+1)=0$ معناه: $\ln(x+1)=0=\ln 1$ ، أي: $x+1=1$ ، ومنه: $x=0$.
- $-\ln(x+1)<0$ معناه: $\ln(x+1)>0$ ، أي: $\ln(x+1)>\ln 1$ أي: $x+1>1$ ، ومنه: $x>0$.
- $-\ln(x+1)>0$ معناه: $\ln(x+1)<0$ ، أي: $\ln(x+1)<\ln 1$ أي: $x+1<1$ ، ومنه: $x<0$.

x	-1		0		$+\infty$
$-\ln(x+1)$		$+$	0	$-$	
$-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$		$+$	0	$-$	

ومنه:

- إذا كان: $x>0$ المنحني (C_f) تحت المستقيم المقارب المائل .
- إذا كان: $x=0$ المنحني (C_f) المستقيم المقارب المائل يقطع المنحني (C_f) في نقطة إحداثييها $(0;0-1)$ ، أي: إحداثييها $(0;-1)$.
- إذا كان: $-1<x<0$ المنحني (C_f) فوق المستقيم المقارب المائل .

2) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ لدينا:

$$f'(x)=(x-1)'-\left[\frac{\ln'(x+1)\times(x+1)-(x+1)'\times\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]$$

$$=1-\left[\frac{\frac{1}{x+1}\times(x+1)-1\times\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=1-\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

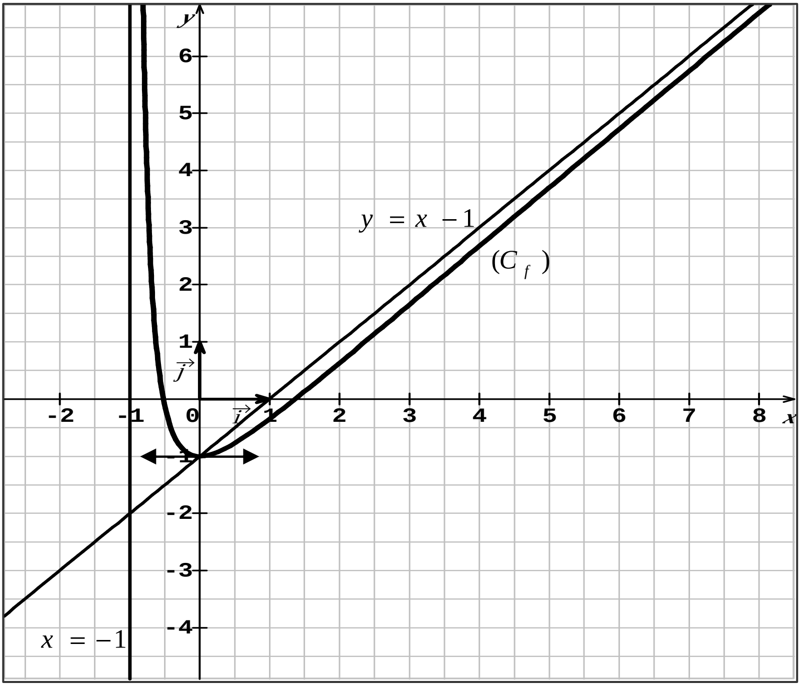
ومنه جدول تغيرات الدالة f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

حيث: $f(0) = -1$.

3) بما أن $[3,3;3,4] \subset [0;+\infty[$ فإن الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[3,3;3,4]$ ، ولدينا: $f(3,3) \approx 1,96$ و $f(3,4) \approx 2,06$. بماأن: $f(3,3) < 2 < f(3,4)$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلاوحيدا في المجال $[3,3;3,4]$ وهذا يعني أنه على المجال $[3,3;3,4]$ المنحني (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ في نقطة وحيدة فاصلتها من المجال $[3,3;3,4]$.

4) الرسم:



5) لتكن S المساحة المطلوبة. لدينا: $S = \int_0^1 [x - 1 - f(x)]dx$ ، ومنه: $S = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx$

ومنه: $S = \left[\frac{1}{2}(\ln(x+1))^2\right]_0^1$ ، إذن: $S = \frac{1}{2}(\ln 2)^2 u.a$