

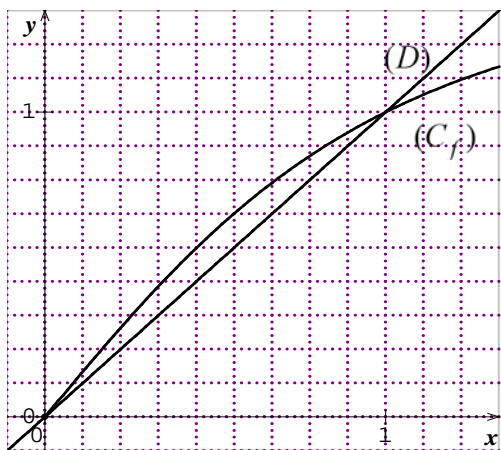


على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الدالة العددية f معرفة ومتزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{4x^2 + 5}}$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.



المتتالية العددية (u_n) معرفة بحددها الأول u_0 حيث: $u_0 = \frac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أ . أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل

الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزا خطوط الإنشاء .

ب . ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

(2) أ . برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$.

ب . بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) المتتالية العددية (v_n) معرفة على \mathbb{N} ب: $v_n = \frac{u_n^2}{1 - u_n^2}$

برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{9}{5}$ يُطلب تعيين حددها الأول v_0 .

(4) أ . اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ب . احسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر المعادلتين : $(E_1) 693x - 216y = 738 \dots$ و $(E_2) 77x - 24y = 82 \dots$ حيث x و y عدنان صحيحان .

(1) جد $PGCD(693; 216)$ و استنتج أن المعادلتين (E_1) و (E_2) متكافئتان .

(2) تحقّق أنّ الثنائية $(2; 3)$ حلّ للمعادلة (E_2) ثمّ أوجد حلولها في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(3) جد الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E_2) التي تُحقّق : $|y - x| \leq 54$.

(4) ليكن N عددا طبيعيا يُكتب $\overline{\beta 68 \alpha}$ في النظام ذي الأساس 9 و يكتب $\overline{1 \alpha \beta 0 \alpha}$ في النظام ذي الأساس 6 .

حيث α و β عدنان طبيعيان .

جد العددين α و β ، ثمّ اكتب العدد N في النظام العشري .



التمرين الثالث: (05 نقاط)

- يحتوي كيس على أربع كريات حمراء مرقمة بـ: 2، 2، 2، 2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 3، 3، 3. الكريات لا نفرق بينها باللمس، نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من هذا الكيس.
- (1) نعتبر الحدثين: A "الحصول على كرتين تحملان نفس الرقم" و B "الحصول على كرتين مختلفتين في اللون". أ. احسب احتمال كل من الحدثين A و B .
 ب. بيّن أنّ احتمال الحصول على كرتين تحملان نفس الرّقم ومختلفتين في اللون يساوي $\frac{4}{21}$.
 ج. استنتج احتمال الحصول على كرتين تحملان نفس الرّقم أو مختلفتين في اللون.
- (2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب جُداء الرّقمين الظاهرين على الكرتين المسحوبتين. عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X .
- (3) في لعبة، يقوم لاعب بسحب كرتين: إذا كان جُداء رقميهما 4 يربح x^2 دينار، إذا كان جُداء رقميهما 6 يخسر y^2 دينار و إذا كان جُداء رقميهما 9 يخسر 130 دينار. (x و y عدنان طبيعيان غير معدومين) عيّن قيمة كلّ من x و y حتى تكون هذه اللعبة عادلة.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (I) الدالة العددية g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = -1 + x + 2 \ln x$.
- (1) ادرس اتجاه تغيرات الدالة g .
- (2) احسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$.
- (II) الدالة العددية f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{-1 + (x-2) \ln x}{x}$
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- (1) أ. احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.
 ب. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (2) أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
 ب. عيّن اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.
- (3) ليكن (Γ) المنحنى البياني الممثل للدالة: $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$.
 أ. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.
 ب. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المنحنى (Γ) .
- (4) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاها α و β ، ثمّ تحقّق أنّ:
 $0,5 < \alpha < 0,6$ و $2,9 < \beta < 3$.
- (5) ارسم (Γ) ثمّ (C_f) .



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على كرتين خضراوين تحملان الرقمين 1 ، 2 ، وثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 2 و أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 2 ، 3 ، 3 ، 4 . (الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس)

I) نسحب من هذا الكيس 3 كريات في آن واحد .

1) احسب احتمال كل من الحدثين A و B التاليين:

A : " الحصول على 3 كريات من نفس اللون ."

B : " الحصول على كرية بيضاء على الأقل ."

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب أكبر الأرقام المحصل عليها.

أ . بين أن: $P(X=3)=\frac{3}{7}$ ثم عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ب. احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

II) نسحب الآن 3 كريات على التوالي دون إرجاع.

ليكن C الحدث: " الحصول على 3 أرقام جُداؤها عدد زوجي " .

احسب احتمال C .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) أ . ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 .

ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد: $8^{2020} - 2 \times 3^{1441} - 1$ على 5 .

2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نعتبر العدد الطبيعي a_n حيث: $a_n = 3^{n+1} + 4$.

عَيّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون: $a_n \equiv 0[5]$.

3) نعتبر العدد الطبيعي b_n حيث: $b_n = 7a_n + 5$.

أ . عَيّن القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و b_n .

ب. بين أن: $a_n \equiv 0[5]$ إذا وفقط إذا كان $b_n \equiv 0[5]$.

ج. استنتج الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون a_n و b_n أوليين فيما بينهما.



التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدّها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n + 2}$.

(1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 < u_n < 2$

(2) أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$

ب. حدّد اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

(3) المتتالية العددية (v_n) معرفة على \mathbb{N} بـ : $v_n = \frac{u_n + \alpha}{u_n + 1}$ ، حيث α عدد حقيقي.

أ. اوجد α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ، ثمّ احسب حدّها الأول v_0 .

ب. بيّن عندئذٍ أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2 \times 4^n - 1}{4^n + 1}$ ، ثمّ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الدالة العددية f معرفة على المجال $[-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{4}(2e^{-x} - 1)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 2 cm).

(1) أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[-1; +\infty[$: $f'(x) = (1 - e^{-x})(2e^{-x} + 1)$

ب. ادرس إشارة $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغيّر الدالة f .

ج. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

(2) أ. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x - \frac{3}{4}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(3) بيّن أنّ المنحنى البياني (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.

(4) بيّن أنّ المنحنى البياني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها.

(5) ارسم (Δ) ، (T) و المنحنى البياني (C_f) .

(6) ليكن m وسيطا حقيقيا. عيّن مجموعة قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة : $f(x) = x + m$ حلين مختلفين.