مديرية التربية لولاية بسكرة ثانوية محمد بلونار بسكرة

تصحيح مقترح لموضوع مادة الرياضيات شعبة التقني رياضي دورة جوان 2017

تصحيح الموضوع الأول:

تصحيح التمرين الأول:

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ونعتبر النقط $A(2;2;0)$ و $B(0;-2;2)$ و $C(1;1;3)$.

1) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A ويعامد المستقيم (BC) :
$\overrightarrow{BC}(1;3;1)$

(P) الذي يشمل النقطة A ويعامد المستقيم (BC) معناه (P) الذي يشمل النقطة A و $\overrightarrow{BC}(1;3;1)$ شعاع ناظمي له

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة كيفية من (P) ومنه $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BC}$ ومنه $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0$ ومنه $\overrightarrow{AM}(x-2;y-2;z).\overrightarrow{BC}(1;3;1)=0$ ومنه $x-2+3(y-2)+z=0$ ومنه $(P):x+3y+z-8=0$.

2) نعتبر (P') المستوي المحوري للقطعة $[AB]$. التحقق ان معادلة (P') هي : $x+2y-z=0$

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة كيفية من المستوي (P') :

(P') المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ معناه $MA=MB$ ومنه $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+z^2}=\sqrt{x^2+(y+2)^2+(z-2)^2}$ وبالتربيع نجد $(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=x^2+(y+2)^2+(z-2)^2$ ومنه $x^2+4-4x+y^2+4-4y+z^2=x^2+y^2+4+4y+z^2+4-4z$ ومنه $-4x-8y+4z=0$ ومنه $-4(x+2y-z)=0$ ومنه $x+2y-z=0$ وهي معادلة للمستوي (P').

3) تبيين ان المستويين (P) و (P') يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) وإيجاد تمثيل وسيطي له:

$\vec{n}_{(P)}(1;3;1)$ و $\vec{n}_{(P')}(1;2;-1)$ نلاحظ ان $\frac{-1}{1}\neq\frac{2}{3}\neq\frac{1}{1}$ أي ان الشعاعي الناظمي لهما غير مرتبطين خطيا وبالتالي فهما يتقاطعان وفقط مستقيم (Δ).

والتمثيل الوسيطي له نجده بحل الجملة التالية $\begin{cases} x+3y+z-8=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$ ومنه

$\begin{cases} x=-3y-z+8 \\ z=x+2y \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=-3y-z+8 \\ z=-3y-z+8+2y \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=-3y-z+8 \\ z=-y-z+8 \end{cases}$ ومنه

$\begin{cases} x=-3y-z+8 \\ z=\frac{-1}{2}y+4 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=-3y-\left(\frac{-1}{2}y+4\right)+8 \\ z=\frac{-1}{2}y+4 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=\frac{-5}{2}y+4 \\ z=\frac{-1}{2}y+4 \end{cases}$ ومنه

$\begin{cases} x=\frac{-5}{2}t+4 \\ y=t \\ z=\frac{-1}{2}t+4 \end{cases}$ وهو تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) حيث t وسيط حقيقي.

4) تبيين ان النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;1),(C;-12)\}$ هي نقطة تقاطع (Δ) و (ABC) :

G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;1),(C;-12)\}$ معناه $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-12\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ومنه باستعمال علاقة شال نجد $-10\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{AB}+12\overrightarrow{AC}$ ومنه $\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{12}{10}\overrightarrow{AC}$ وهذا يدل على ان النقطة G هي نقطة من المستوي (ABC)............(1)

النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;1),(C;-12)\}$ معناه

$$\begin{cases} x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{2+0-12}{1+1-12}=\frac{-10}{-10}=1 \\ y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{2-2-12}{1+1-12}=\frac{-12}{-10}=\frac{6}{5} \\ z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{0+2-36}{1+1-12}=\frac{-34}{-10}=\frac{17}{5} \end{cases}$$ أي $G\left(1;\frac{6}{5};\frac{17}{5}\right)$

G تنتمي الى المستقيم (Δ) معناه احداثياها تحقق تمثيله الوسيطي اذن بالتعويض

عن احداثياتها في التمثيل الوسيطي السابق نجد $\begin{cases} 1=\frac{-5}{2}t+4 \\ \frac{6}{5}=t \\ \frac{17}{5}=\frac{-1}{2}t+4 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \frac{5}{2}t=3 \\ \frac{6}{5}=t \\ \frac{1}{2}t=\frac{3}{5} \end{cases}$ ومنه

$\begin{cases} t=\frac{6}{5} \\ t=\frac{6}{5} \\ t=\frac{6}{5} \end{cases}$ أي ان النقطة G تنتمي الى المستقيم (Δ).....(2)

من (1) و (2) نستنتج ان النقطة G هي نقطة تقاطع (Δ) و (ABC).

تعيين (E) مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق

$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-12\overrightarrow{MC}\|=10\|\overrightarrow{OA}\|$.

$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-12\overrightarrow{MC}\|=10\|\overrightarrow{OA}\|$ ومنه باستعمال علاقة شال والمرجح والتبسيط نجد

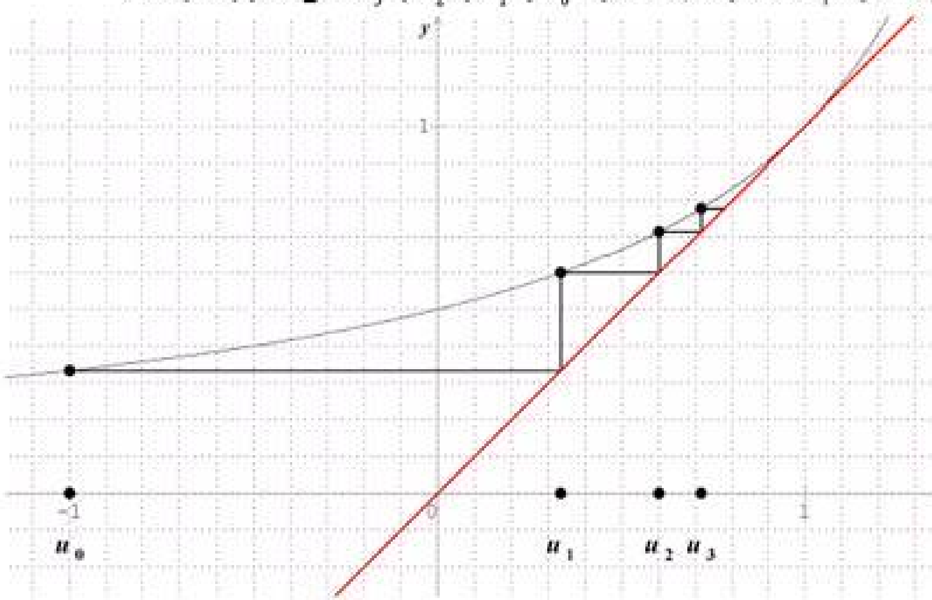
$\|-10\overrightarrow{MG}\|=10\|\overrightarrow{OA}\|$ أي $\|\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{OA}\|$ أي ان مجموعة النقط M هي نقاط سطح

الكرة ذات المركز $G\left(1;\frac{6}{5};\frac{17}{5}\right)$ ونصف القطر $r=\|\overrightarrow{OA}\|=\sqrt{2^2+2^2+0^2}=2\sqrt{2}$.

تصحيح التمرين الثاني:

$f(x)=\frac{1}{2-x}$ و (U_n) متتالية عددية معرفة بـ : $U_0=-1$ و $U_{n+1}=f(U_n)$

إعادة رسم الشكل وتمثيل الحدود u_0 و u_1 و u_2 و u_3 على محور الفواصل



التخمين حول اتجاه التغير والتقارب:
من خلال البيان نستنتج ان المتتالية (U_n) متزايدة وتتقارب نحو 1.

1) البرهان بالتراجع على ان : من اجل كل عدد طبيعي n فان $u_n \prec 1$:

- الخاصية الابتدائية: $u_0 = -1 \prec 1$ اذن الخاصية محققة من اجل $n = 0$.
- الخاصية الوراثية: نفرض ان $u_n \prec 1$ ونبرهن ان $u_{n+1} \prec 1$:

لنا $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{1}{2-u_n}$:

حسب الخاصية الوراثية او فرضية التراجع لدينا $u_n \prec 1$ ومنه $-u_n \succ -1$ ومنه $2-u_n \succ 1$ ومنه $\dfrac{1}{2-u_n} \prec 1$ أي $u_{n+1} \prec 1$ اذن الخاصية الوراثية محققة ومنه نستنتج ان مهما كان العدد الطبيعي n فان $u_n \prec 1$.

2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتاج انها متقاربة:

لنا $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2-u_n} - u_n = \dfrac{1-2u_n+u_n^2}{2-u_n} = \dfrac{(u_n-1)^2}{2-u_n}$ لنا $(u_n-1)^2 \succ 0$ مهما كان العدد الطبيعي n

اذن إشارة الفرق من إشارة $2-u_n$ ووجدنا حسب السؤال السابق $u_n \prec 1$ ومنه $-u_n \succ -1$ ومنه $2-u_n \succ 1$ أي ان إشارة الفرق هي موجبه تماا وبالتالي نستنتج ان المتتالية (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

وجدنا $u_n \prec 1$ مهما كان العدد الطبيعي n أي ان المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى بالعدد 1 ووجدنا متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ اذن فحسب الخاصية نستنتج انها متقاربة نحو 1.

3) نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = \dfrac{2}{1-u_n}$.

أ) اثبات ان المتتالية (V_n) هي متتالية حسابية أساسها 2 وتعيين عبارة حدها العام v_n بدلالة n:

المتتالية (V_n) هي متتالية حسابية أساسها 2 معناه من اجل كل عدد طبيعي n فان $v_{n+1} - v_n = 2$ ؟ :

$$v_{n+1}-v_n=\frac{2}{1-u_{n+1}}-\frac{2}{1-u_n}=\frac{2}{1-\frac{1}{2-u_n}}-\frac{2}{1-u_n}=\frac{2}{\frac{2-u_n-1}{2-u_n}}-\frac{2}{1-u_n}=\frac{2}{\frac{1-u_n}{2-u_n}}-\frac{2}{1-u_n}$$

$$=\frac{2(2-u_n)}{1-u_n}-\frac{2}{1-u_n}=\frac{2(2-u_n)-2}{1-u_n}=\frac{4-2u_n}{1-u_n}=\frac{2(1-u_n)}{1-u_n}=2$$

وهو المطلوب.

عبارة حدها العام $v_n=v_0+nr=\frac{2}{1-u_0}+2n=\frac{2}{1+1}+2n=1+2n$

ب) استنتاج عبارة الحد العام u_n بدلالة n وحساب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

لنا $v_n=\frac{2}{1-u_n}$ ومنه $v_n(1-u_n)=2$ ومنه $v_n-v_nu_n=2$ ومنه $v_nu_n=v_n-2$ ومنه

$u_n=\frac{v_n-2}{v_n}=\frac{1+2n-2}{1+2n}=\frac{2n-1}{2n+1}$.

حساب النهاية: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n}{2n}=1$

تصحيح التمرين الثالث:

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نعتبر النقط A , B و C التي لواحقها $z_A=-1$, $z_B=2+i$ و $z_C=-i$.

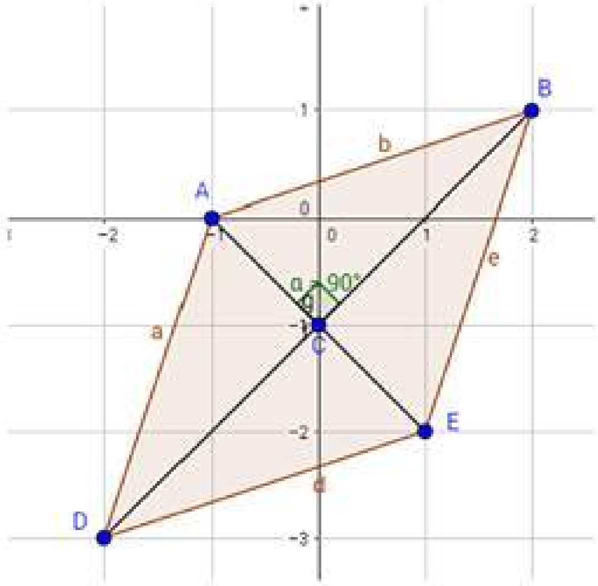
1) كتابة العدد المركب $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ على الشكل الاسي واستنتاج طبيعة المثلث ABC :

$$\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\frac{-1+i}{2+i+i}=\frac{-1+i}{2+2i}=\frac{-1+i}{2+2i}\times\frac{2-2i}{2-2i}$$
$$=\frac{(-1+i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}=\frac{-2+2i+2i+2}{4+4}=\frac{4i}{8}=\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

لنا تعريفا $\arg\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})+2k\pi / k\in\mathbb{Z}$

ووجدنا $\arg\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}$ ومنه نستنتج ان المثلث ABC قائم الزاوية في C.

2) تعيين العبارة المركبة للتشابه المباشر الذي يحول B الى A والذي مركزه C:



اذن من خلال الرسم نستنتج ان الرباعي ABED هو معين ويمكن التحقق من ذلك حسابيا:

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2+i+1 = 3+i$ و

$z_{\overrightarrow{DE}} = z_E - z_D = 1-2i-(-2-3i) = 1-2i+2+3i = 3+i$ أي نستنتج ان $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DE}}$

وأيضا $AB = DE = \sqrt{10}$ وكذلك $z_{\overrightarrow{AD}} = z_D - z_A = -2-3i+1 = -1-3i$ و

$z_{\overrightarrow{BE}} = z_E - z_B = 1-2i-(2+i) = 1-2i-2-i = -1-3i$ أي نستنتج ان $z_{\overrightarrow{AD}} = z_{\overrightarrow{BE}}$

وأيضا $AD = BE = \sqrt{10}$ فنستنتج ان $AB = DE = AD = BE = \sqrt{10}$

اذن الرباعي ABED فيه الاضلاع الأربعة متقايسة فهو اذن معين.

4) (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B):

حيث $\arg(z - z_A) - \arg(z - z_B) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$

التحقق ان النقطة C تنتمي الى (Γ):

C تنتمي الى (Γ) معناه $\arg(z_C - z_A) - \arg(z_C - z_B) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$ ....(1)

وجدنا سابقا $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $\frac{-(z_C - z_A)}{-(z_C - z_B)} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه نجد $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه

$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right) = \arg\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$ ومنه $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$ ومنه حسب الخواص نجد

$\arg(z_C - z_A) - \arg(z_C - z_B) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$ ....(2)

من (1) و (2) نستنتج ان النقطة C فعلا تنتمي الى المجموعة (Γ).

<u>تحديد طبيعة (Γ) وانشاؤها:</u>

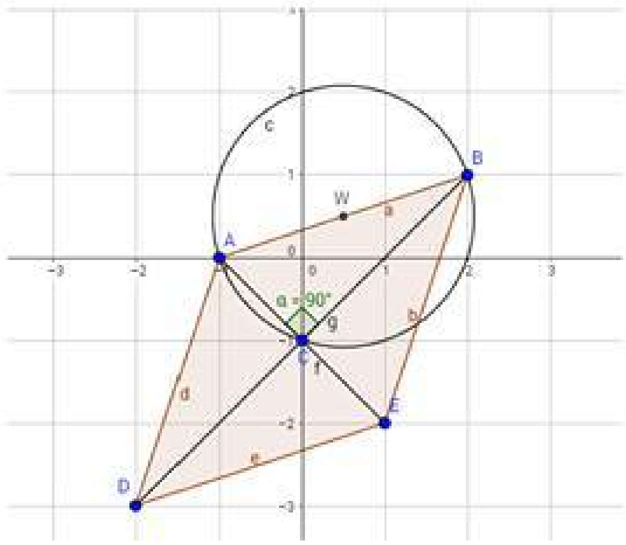
لنا $\arg(z - z_A) - \arg(z - z_B) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$ ومنه $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$ ومنه

$\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$ ومنه نستنتج ان مجموعة النقط M هي نقاط الدائرة التي

قطرها $[AB]$ ذات المركز W ذات اللاحقة $z_W = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-1 + 2 + i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ أي $W\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

ونصف القطر $r = \frac{AB}{2} = \frac{|z_B - z_A|}{2} = \frac{|2 + i + 1|}{2} = \frac{|3 + i|}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ باستثناء النقطتين A و B .

<u>انشاؤها:</u> باستعمال برمجية الجيوجابرا نتحصل على الشكل التالي:



حيث ان المجموعة (Γ) هي الدائرة (c) باستثناء النقطتين A و B.

تصحيح التمرين الرابع:

f دالة معرفة على D_f حيث $D_f =]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = -2x + 3 + 2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) حساب النهايتين:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(-2x+3+2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\right)=-2+3+2\ln\left(\frac{0^-}{-1}\right)=1+2\ln 0^+=1-\infty=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(-2x+3+2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\right)=-4+3+2\ln\left(\frac{1}{0^+}\right)=-1+2\ln(+\infty)=1+\infty=+\infty$$

ب)حساب النهايتين:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\left(-2x+3+2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\right)=+\infty+3+2\ln 1=+\infty+3+0=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(-2x+3+2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\right)=-\infty+3+2\ln 1=-\infty+3+0=-\infty$$

2) اثبات انه من اجل كل x من D_f فان $f'(x)=-2-\frac{2}{(x-1)(x-2)}$ وتشكيل جدول التغيرات:

لنا $f(x)=-2x+3+2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ ومنه

$$f'(x)=\left(-2x+3+2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\right)'=-2+2\times\frac{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)'}{\frac{x-1}{x-2}}=-2+2\times\frac{\frac{x-2-x+1}{(x-2)^2}}{\frac{x-1}{x-2}}$$

$$=-2+2\times\frac{-1}{(x-2)^2}\times\frac{x-2}{x-1}=-2+2\times\frac{-1}{(x-2)(x-1)}=-2-\frac{2}{(x-1)(x-2)}$$

- تشكيل جدول التغيرات: وجدنا

$f'(x)=-2-\frac{2}{(x-1)(x-2)}=-2\left(1+\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right)\prec 0$ دوما لان D_f تمثل مجموعة خارج مجال الجذرين لكثير الحدود من الدرجة الثانية $(x-1)(x-2)$ وبالتالي فان اشارته من إشارة $a=1$ أي انه موجب تماما.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

3) أ) التحقق ان : من اجل كل $x\in D_f$ فان $(3-x)\in D_f$ و $f(3-x)+f(x)=0$:

لنا $x\in D_f$ معناه $x \prec 1$ و $x \succ 2$ ومنه $-x \succ -1$ و $-x \prec -2$ ومنه $3-x \succ 2$ و $3-x \prec 1$ أي $(3-x)\in D_f$.

$$f(3-x)+f(x)=-2(3-x)+3+2\ln\left(\frac{3-x-1}{3-x-2}\right)-2x+3+2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

$$=-6+2x+3+2\ln\left(\frac{2-x}{1-x}\right)-2x+3+2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)=2\ln\left(\frac{2-x}{1-x}\right)+2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

$$=2\ln\left(\frac{-(x-2)}{-(x-1)}\right)+2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)=2\ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)+2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)=2\ln\left(\frac{1}{\frac{x-1}{x-2}}\right)+2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

$$=-2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)=0$$

ب)استنتاج ان (C_f) يقبل مركز تناظر يطلب تعيين احداثييه:

وجدنا انه من اجل كل $x\in D_f$ فان $(3-x)\in D_f$ و $f(3-x)+f(x)=0$ ومنه $f\left(2\left(\frac{3}{2}\right)-x\right)+f(x)=2(0)$ وهي من الشكل $f(2a-x)+f(x)=2b$ والتي تخص مركز التناظر $\omega(a;b)$ وعليه فان (C_f) يقبل النقطة $\omega\left(\frac{3}{2};0\right)$ كمركز تناظر له.

4) اثبات ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0,45;0,46[$:

من خلال جدول التغيرات نلاحظ ان الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]0,45;0,46[$

و $f(0,45)=-2(0.45)+3+2\ln\frac{0,45-1}{0.45-2}=-0,9+3+2\ln 0,35=0,03$ و

$$f(0,46)=-2(0.46)+3+2\ln\frac{0,46-1}{0.46-2}=-0,92+3+2\ln\frac{-0,54}{-1,54}=-0,02$$

أي $f(0,45)\times f(0,46)\prec 0$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج ان للمعادلة حلا وحيدا α على المجال $]0,45;0,46[$.

- استنتاج انها تقبل حلا اخر β يطلب إعطاء حصر له: نفرض ان المجال الذي يحتوي على β هو $]a;b[$

القول ان للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا في المجال $]0,45;0,46[$ معناه بالتقريب ان نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل تكون فاصلتها داخل هذا المجال مثلا فلتكن $(0,453;0)$ وحسب المعطيات المتوفرة لدينا ان المنحني يتمتع بوجود مركز تناظر $\omega\left(\frac{3}{2};0\right)$ وعليه فان المجال المطلوب هو مجال صغير يحوي فاصلة نظيرة النقطة $(0,453;0)$ بالنسبة الى النقطة $\omega\left(\frac{3}{2};0\right)$ ونظيرة النقطة $(0,453;0)$ بالنسبة الى النقطة $\omega\left(\frac{3}{2};0\right)$ هي $(3-0,453;0)$ أي $(2,547;0)$ فيكون المجال المطلوب مثلا بالتقريب هو $]a;b[=]2,54;2,55[$ ويمكننا التأكد منه حيث ان الدالة f مستمرة ورتيبة تماما عليه و $f(2,54)\simeq 0,02$ و $f(2,55)\simeq -0.03$ و $f(2,54)\times f(2,55)\prec 0$

.

5) اثبات ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-2x+3$ مقارب مائل لـ (C_f) ودراسة الوضعية النسبية بينهما:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-y\right)=\lim_{x\to\infty}\left(-2x+3+2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+2x-3\right)=\lim_{x\to\infty}2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)=2\ln 1=0$$

وعليه نستنتج ان المستقيم (Δ) مقارب للمنحني (C_f).

دراسة الوضع النسبي بينهما : ندرس إشارة الفرق $f(x)-y=2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

$f(x)-y\succ 0$ معناه :

$$2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\succ 0\Leftrightarrow\frac{x-1}{x-2}\succ 1\Leftrightarrow\frac{x-2+1}{x-2}\succ 1$$
$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{x-2}\succ 1\Leftrightarrow\frac{1}{x-2}\succ 0\Leftrightarrow x-2\succ 0$$
$$\Leftrightarrow x\succ 2$$
$$\Leftrightarrow x\in\left]2;+\infty\right[$$

أي انه في المجال $]2;+\infty[$ يكون المنحني فوق (Δ).

$f(x)-y\prec 0$ معناه:

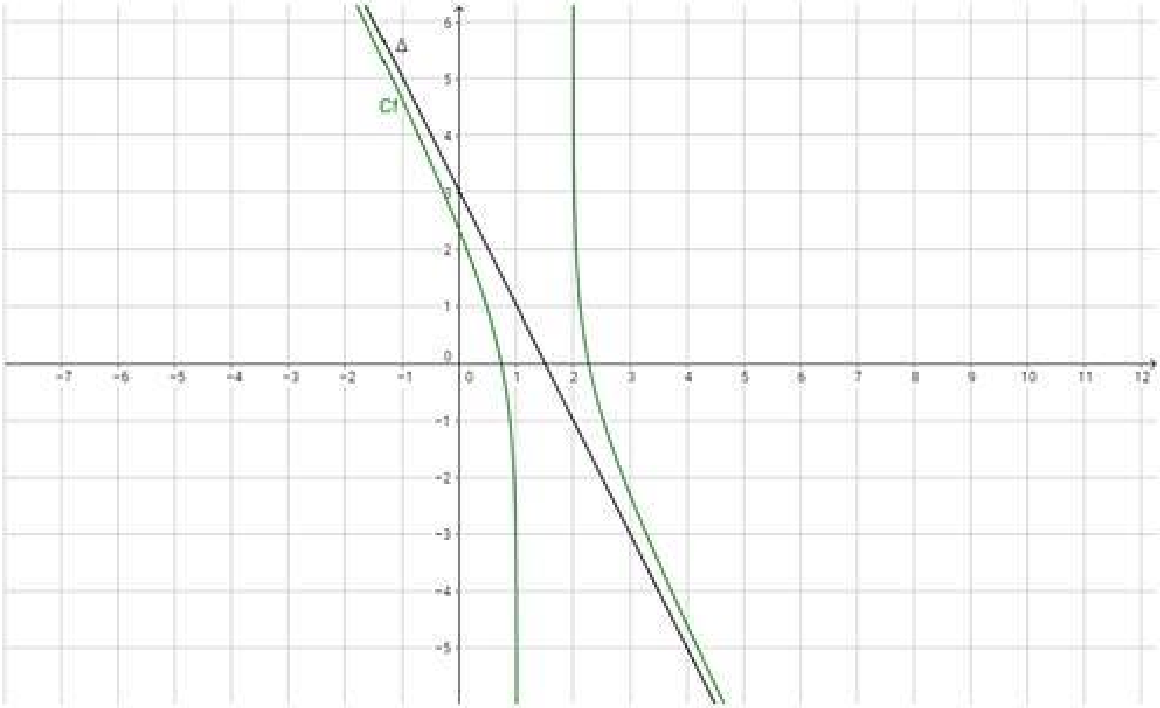
$$2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\prec 0\Leftrightarrow 0\prec\frac{x-1}{x-2}\prec 1\Leftrightarrow 0\prec\frac{x-2+1}{x-2}\prec 1$$
$$\Leftrightarrow 0\prec 1+\frac{1}{x-2}\prec 1\Leftrightarrow -1\prec\frac{1}{x-2}\prec 0\Leftrightarrow\frac{1}{x-2}\prec 0\ et\ \frac{1}{x-2}\succ -1$$
$$\Leftrightarrow x-2\prec 0\ \ et\ \ x-2\prec -1\Leftrightarrow x\prec 2\ et\ x\prec 1\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;2\right[\ et\ x\in\left]-\infty;1\right[$$
$$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;2\right[\cap\left]-\infty;1\right[$$
$$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;1\right[$$

أي انه لما يكون $x\in]-\infty;1[$ فان المنحني يكون تحت (Δ).

$f(x)-y=0$ معناه $2\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)=0$ أي $\dfrac{x-1}{x-2}=1$ أي $1+\dfrac{1}{x-2}=1$ ومنه

$\dfrac{1}{x-2}=0$ وهذا مستحيل اذن المنحني لا يتقاطع مع (Δ).

6) رسم (Δ) و (C_f):



7) اثبات ان الدالة $h(x)=(x-1)\ln(x-1)-(x-2)\ln(x-2)$ هي دالة اصلية للدالة $x\to\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$ على المجال $]2;+\infty[$:

H دالة اصلية للدالة $x\to\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$ معناه $h'(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$ ؟؟

$$h'(x)=\left[(x-1)\ln(x-1)-(x-2)\ln(x-2)\right]'$$
$$=\ln(x-1)+\frac{1}{x-1}\times(x-1)-\ln(x-2)-\frac{1}{x-2}\times(x-2)$$
$$=\ln(x-1)+1-\ln(x-2)-1=\ln(x-1)-\ln(x-2)$$
$$=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

حساب بدلالة β مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $y=-2x+3$ و $x=\beta$ و $x=3$: في المجال $[3;\beta]$ المنحني يكون فوق (Δ)

$$S=\int_{\beta}^{3}\left(f(x)-y\right)dx=\int_{\beta}^{3}\left(-2x+3+2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+2x-3\right)dx$$

ومنه

$$=\int_{\beta}^{3}\left(2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\right)dx=2\int_{\beta}^{3}\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)dx=2\left[h(x)\right]_{\beta}^{3}=2h(3)-2h(\beta)............(1)$$

لنا $f(\beta)=0$ لان β هو حل للمعادلة $f(x)=0$

$f(\beta)=0$ معناه $-2\beta+3+2\ln\left(\frac{\beta-1}{\beta-2}\right)=0$ ومنه $\ln\left(\frac{\beta-1}{\beta-2}\right)=\beta-\frac{3}{2}$

$$h(3)=(3-1)\ln(3-1)-(3-2)\ln(3-2)$$
$$=2\ln 2...........(2)$$

$$h(\beta)=(\beta-1)\ln(\beta-1)-(\beta-2)\ln(\beta-2)$$
$$=(\beta-1)\ln(\beta-1)-(\beta-1)\ln(\beta-2)+\ln(\beta-2)$$
$$=(\beta-1)\ln\left(\frac{\beta-1}{\beta-2}\right)+\ln(\beta-2)$$
$$=(\beta-1)\left(\beta-\frac{3}{2}\right)+\ln(\beta-2)............(3)$$

بتعويض (3) و (2) في (1) نجد $S=4\ln 2-2\left(\beta-\frac{3}{2}\right)-2\ln(\beta-2)$

الأستاذ بورنان

تصحيح الموضوع الثاني:

تصحيح التمرين الأول:

الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

نعتبر النقط $A(1;1;0)$ ، $B(-1;2;-3)$ ، $C(0;5;2)$ ، $D(4;7;0)$.

1) اثبات ان النقط A ، B ، C تعين مستو:

القول ان النقط A ، B ، C تعين مستو معناه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا:

$\overrightarrow{AB}(-2;1;-3)$ ، $\overrightarrow{AC}(-1;4;2)$

يكون الشعاعان مرتبطين خطيا اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ تكافيء $\overrightarrow{AB}(-2;1;-3)=k\overrightarrow{AC}(-k;4k;2k)$ ومنه

$\begin{cases}-k=-2\\4k=1\\2k=-3\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}k=2\\k=\dfrac{1}{4}\\k=\dfrac{-3}{2}\end{cases}$ اذن لايوجد ليس هناك عدد حقيقي k يحقق الجملة و عليه فان الشعاعان

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي فالنقط A ، B ، C تعين مستو.

2) أ) اثبات ان المستقيم (CD) عمودي على كل من المستقيمين (AB) و (AC) :

$\overrightarrow{CD}(4;2;-2)$

(CD) عمودي على كل من المستقيمين (AB) و (AC) معناه : $\begin{cases}\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}=0\\\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ ومنه

$\begin{cases}4(-2)+2(1)-2(-3)=0\\4(-1)+2(4)-2(2)=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}0=0\\0=0\end{cases}$ وهي محققة اذن (CD) عمودي على كل من (AB) و (AC).

ب) إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) ، ثم حساب المسافة بينه و بين النقطة D :

المستقيم (CD) عمودي على كل من المستقيمين (AB) و (AC) اذن نأخذ $\overrightarrow{CD}(4;2;-2)$ كشعاع ناظمي للمستوي المستوي (ABC) الذي يشمل النقطة $A(1;1;0)$ و $\overrightarrow{CD}(4;2;-2)$ شعاع ناظمي له هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ بحيث $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CD}=0$ ومنه $\overrightarrow{AM}(x-1;y-1;z).\overrightarrow{CD}(4;2;-2)=0$ ومنه $4(x-1)+2(y-1)-2z=0$ ومنه $4x+2y-2z-6=0$ وهي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

$$d\left(D;(ABC)\right)=\frac{\left|4x_D+2y_D-2z_D-6\right|}{\sqrt{4^2+2^2+(-6)^2}}=\frac{\left|16+14-6\right|}{\sqrt{16+4+36}}=\frac{24}{\sqrt{56}}$$

3) أ) تحديد طبيعة المثلث ABC : $AB=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$ ومنه $AB^2=14$ ....(1)

$AC=\sqrt{1+16+4}=\sqrt{21}$ ومنه $AC^2=21$ ....(2)

$BC=\sqrt{1+9+25}=\sqrt{35}$ ومنه $BC^2=35$ ....(3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج ان $AB^2+AC^2=BC^2$ وحسب النظرية العكسية لفيتاغورس نستنتج ان المثلث ABC قائم الزاوية في A.

ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$: حسب القانون نجد

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}\times S_{ABC}\times d\left(D;(ABC)\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{AB\times AC}{2}\times d=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{294}}{2}\times\frac{24}{\sqrt{56}}$$
$$=4\frac{\sqrt{294}}{\sqrt{56}}=4\sqrt{\frac{294}{56}}=4\sqrt{\frac{2\times3\times7^3}{2^3\times7}}=4\sqrt{\frac{3\times7^2}{2^2}}$$
$$=4\frac{7\sqrt{3}}{2}=14\sqrt{3}\ u.v$$

<u>تصحيح التمرين الثاني:</u>

1) تبيين انه من اجل كل عدد طبيعي k فان: $4^{5k}\equiv1[11]$:

لنا $4^2\equiv5[11]$ بالضرب في 4 نجد $4^3\equiv20[11]$ و $20\equiv9[11]$ وحسب خاصية التعدي نجد $4^3\equiv9[11]$ وبالضرب في 4 نجد $4^4\equiv36[11]$ و $36\equiv3[11]$ وحسب خاصية التعدي نجد $4^4\equiv3[11]$ وبالضرب مرة أخرى في 4 نجد $4^5\equiv12[11]$ و $12\equiv1[11]$ وحسب خاصية التعدي نجد $4^5\equiv1[11]$ وحسب خاصية الرفع الى قوة نجد $\left(4^5\right)^k\equiv1^k[11]$ ومنه نجد $4^{5k}\equiv1[11]$ وهو المطلوب.

2) استنتاج تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 11:

وجدنا ان $4^5\equiv1[11]$ والعددان 4 و 11 اوليان فيما بينهما ومنه فان الدور للقسمة الاقليدية للعدد 4^n على 11 هو 5 ومنه نستنتج انه اذا كان $n=5k/k\in\mathbb{N}$ فان باقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 11 هو 1 أي $4^{5k}\equiv1[11]$ وبالضرب في 4 نجد $4^{5k+1}\equiv4[11]$ ونستنتج انه اذا كان $n=5k+1/k\in\mathbb{N}$ فان باقي قسمته على 11 هو 4 أي $4^{5k+1}\equiv4[11]$ وبالضرب في 4 نجد $4^{5k+2}\equiv16[11]$ أي $4^{5k+2}\equiv5[11]$ ونستنتج انه اذا كان $n=5k+2/k\in\mathbb{N}$ فان باقي قسمته الاقليدية على 11 هو 5 أي $4^{5k+2}\equiv5[11]$ وبالضرب في 4 نجد $4^{5k+3}\equiv20[11]$ ومنه $4^{5k+3}\equiv9[11]$ ونستنتج انه اذا كان $n=5k+3/k\in\mathbb{N}$ فان باقي قسمته الاقليدية على 11 هو 9 أي $4^{5k+3}\equiv9[11]$

وبالضرب في 4 نجد $4^{5k+4}\equiv 36[11]$ ومنه $4^{5k+4}\equiv 3[11]$ ونستنتج انه اذا كان $n=5k+4/k\in\mathbb{N}$ فان باقي قسمته على 11 هو 3.

مما سبق نستنتج ان بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 11 هي اما 1 او 4 او 5 او 9 او 3.

3) تبيين انه من اجل كل عدد طبيعي n فان العدد $\left(2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1\right)$ يقبل القسمة على 11:

لنا $2017\equiv 4[11]$ ومنه $2017^{5n+3}\equiv 4^{5n+3}[11]$ ولنا $4^{5n+3}\equiv 9[11]$ ومنه $2017^{5n+3}\equiv 9[11]$ ومنه $2\times 2017^{5n+3}\equiv 18[11]$ ومنه $2\times 2017^{5n+3}\equiv 7[11]$ ....(1)

ولنا $1438\equiv 8[11]$ ومنه نجد $1438^{10n}\equiv 8^{10n}[11]$ ومنه ومنه $1438^{10n}\equiv (2\times 4)^{10n}[11]$ ومنه $1438^{10n}\equiv 2^{10n}\times 4^{10n}[11]$ ومنه $1438^{10n}\equiv (2^2)^{5n}\times 4^{10n}[11]$ ومنه $1438^{10n}\equiv 4^{5n}\times 4^{10n}[11]$ ومنه $1438^{10n}\equiv 4^{15n}[11]$ ولنا $4^{15n}=4^{5(3n)}=4^{5k'}\equiv 1[11]$ ومنه نجد $1438^{10n}\equiv 1[11]$ ومنه $3\times 1438^{10n}\equiv 3[11]$ ....(2)

بالجمع (1) مع (2) نجد $2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}\equiv 10[11]$ ومنه $2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1\equiv 11[11]$ و $11\equiv 0[11]$ ومنه نجد $2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1\equiv 0[11]$ وهو المطلوب.

4) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها العدد $\left(2\times 2017^{5n+2}+n-3\right)$ قابلا للقسمة على11:

لنا $2017\equiv 4[11]$ ومنه $2017^{5n+2}\equiv 4^{5n+2}[11]$ ولنا $4^{5n+2}\equiv 5[11]$ ومنه $2017^{5n+2}\equiv 5[11]$ ومنه $2\times 2017^{5n+2}\equiv 10[11]$ ومنه $2\times 2017^{5n+2}+n\equiv 10+n[11]$ ومنه $2\times 2017^{5n+2}+n-3\equiv 7+n[11]$

يكون من اجلها العدد $\left(2\times 2017^{5n+2}+n-3\right)$ قابلا للقسمة على11 اذا كان $7+n\equiv 0[11]$ ومنه $n\equiv -7[11]$ ومنه نجد $n=11k-7/k\in\mathbb{N}$.

<u>تصحيح التمرين الثالث:</u>

المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها: $z_A=1+i$ ، $z_B=\overline{z}_A$ ، $z_C=\frac{1}{2}(1-i)$ ، $z_D=\overline{z}_C$.

1) أ) كتابة z_A و z_C على الشكل الاسي ثم استنتاج الشكل الاسي للعددين z_B و z_D :

$$z_A = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$z_C = \frac{1}{2}(1-i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

استنتاج الشكل الاسي للعددين z_B و z_D : حسب الخواص لنا العددين المترافقين لهما نفس الطويلة وعمدتين لهما متعاكستين اذن: $z_B = \overline{z}_A = \sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}i}$ و $z_D = \overline{z}_C = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $(z_A)^n = (z_B)^n$:

$(z_A)^n = (z_B)^n$ معناه

$$\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^n = \left(\sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}i}\right)^n \Leftrightarrow \sqrt{2}^n e^{\frac{\pi}{4}in} = \sqrt{2}^n e^{\frac{-\pi}{4}ni}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{4}in} = e^{\frac{-\pi}{4}in} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}n = \frac{-\pi}{4}n + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$$

ومنه $\frac{\pi}{2}n = 2k\pi$ ومنه بضرب الطرفين في $\frac{2}{\pi}$ نجد $n = 4k$ وهو المطلوب.

2) أ) إيجاد نسبة ومركز التحاكي h الذي يحول D الى A ويحول C الى B:

ليكن λ نسبة هذا التحاكي و ω ذات اللاحقة z_ω مركزه فيكون:

التحاكي h الذي يحول D الى A ويحول C الى B معناه $\begin{cases} z_A - z_\omega = \lambda(z_D - z_\omega) \\ z_B - z_\omega = \lambda(z_C - z_\omega) \end{cases}$ بالتعويض نجد:

$\begin{cases} 1+i-z_\omega = \lambda\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i - z_\omega\right) \\ 1-i-z_\omega = \lambda\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i - z_\omega\right) \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 1+i-z_\omega = \frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2}i - \lambda z_\omega \\ 1-i-z_\omega = \frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}i - \lambda z_\omega \end{cases}$ بالطرح نجد

$1+i-z_\omega-1+i+z_\omega = \frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2}i-\lambda z_\omega-\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2}i+\lambda z_\omega$ ومنه $2i = \lambda i$ ومنه $\lambda = 2$

بالتعويض في احدى المعادلتين نجد $1+i-z_\omega = 1+i-2z_\omega$ ومنه $z_\omega = 0$ اذن نسبة التحاكي h هي $\lambda = 2$ ومركزه ω ذات اللاحقة $z_\omega = 0$ أي $\omega(0;0)$.

ب) حساب طويلة العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A}$ ثم استنتاج طبيعة الرباعي $ADCB$:

$$\frac{z_C-z_B}{z_D-z_A}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-1+i}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-1-i}=\frac{\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}i}{\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}i}=\frac{-1+i}{-1-i}=\frac{1-i}{1+i}$$
$$=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i-i-1}{1+1}=\frac{-2i}{2}=-i$$

ومنه $\left|\frac{z_C-z_B}{z_D-z_A}\right|=|-i|=1$.

- استنتاج طبيعة الرباعي $ADCB$: وجدنا $\left|\frac{z_C-z_B}{z_D-z_A}\right|=1$ أي $\frac{BC}{AD}=1$ أي $BC=AD$ ....(1)

لنا A صورة D و B هي صورة C بالتحاكي h ونحن نعلم ان من خواص التحاكي انه يضرب الاطوال في نسبته أي $AB=2DC$ ....(2)

وأيضا التحاكي يحفظ التوازي أي $(DC)//(AB)$ ....(3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج ان الرباعي $ADCB$ هو شبه منحرف متساوي الساقين.

3) إيجاد z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;2),(B;2),(C;-1),(D,-1)\}$:

G مرجح الجملة $\{(A;2),(B;2),(C;-1),(D,-1)\}$ معناه

$$z_G=\frac{2z_A+2z_B-z_C-z_D}{2+2-1-1}=\frac{2(1+i)+2(1-i)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)}{2}$$
$$=\frac{2+2i+2-2i-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}{2}=\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2}$$

أي $z_G=\frac{3}{2}$ أي $G\left(\frac{3}{2};0\right)$.

4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|=\sqrt{5}$:

تبيين ان A نقطة من (Γ) :

A نقطة من (Γ) معناه $\left\|2\overrightarrow{AA}+2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right\|=\sqrt{5}$ ؟

لذا
$$\left\|2\overrightarrow{AA}+2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right\|=\left\|\left(2\overrightarrow{AB}\right)(0;-4)-\overrightarrow{AC}\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)-\overrightarrow{AD}\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)\right\|$$
$$=\left\|\left(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)\left(0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2};-4+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\right\|$$
$$=\left\|\left(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)(1;-2)\right\|=\sqrt{1^2+(-2)^2}$$
$$=\sqrt{5}$$

اذن A نقطة من (Γ) .

تحديد طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة وانشاؤها:

$\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|=\sqrt{5}$ معناه

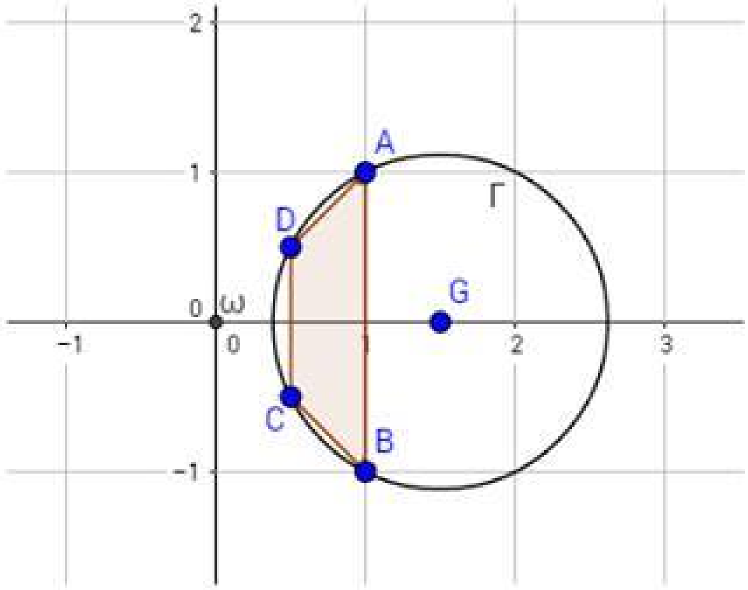
$\left\|2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)-\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)-\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}\right)\right\|=\sqrt{5}$ ومنه

$\left\|2\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{GD}\right\|=\sqrt{5}$ ومنه

$\left\|2\overrightarrow{MG}+\underbrace{2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GD}}_{\vec{0}}\right\|=\sqrt{5}$ ومنه $\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\frac{\sqrt{5}}{2}$ ومنه نستنتج ان المجموعة (Γ) هي

الدائرة التي مركزها النقطة G ونصف قطرها $r=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

<u>انشاؤها:</u>



تصحيح التمرين الرابع:

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على IR كما يلي: $g(x)=x^3+6x+12$.

1) دراسة اتجاه تغير الدالة g:

الدالة g هي دالة كثير حدود وبالتالي فهي مستمرة وقابلة للاشتقاق على IR:

$g'(x)=3x^2+6$ وهي موجبة تماما على IR اذن نستنتج ان الدالة g متزايدة تماما على IR.

2) اثبات ان المعادلة g(x)=0 تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]-1,48;-1,47[$ واستنتاج حسب قيم المتغير x إشارة g(x):

الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على IR فهي اذن مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]-1,48;-1,47[$

و $g(-1.48)=(-1.48)^3+6(-1.48)+12=-0,12$ و

$g(-1.47)=(-1.47)^3+6(-1.47)+12=0,0035$ اذن ينتج ان $g(-1.48)\times g(-1.47)<0$

فحسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج ان للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]-1,48;-1,47[$.

إشارة g(x) : لما $x\in]-\infty,\alpha[$ فان $g(x)<0$ وعندما $x\in[\alpha;+\infty[$ فان $g(x)\geq 0$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-6}{x^2+2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) حساب النهايتين: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3-6}{x^2+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-6}{x^2+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

ب) تبيين ان من اجل كل عدد حقيقي x فان: $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$:

$$f'(x)=\left(\frac{x^3-6}{x^2+2}\right)'=\frac{(x^3-6)'(x^2+2)-(x^3-6)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}=\frac{3x^2(x^2+2)-2x(x^3-6)}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{3x^4+6x^2-2x^4+12x}{(x^2+2)^2}=\frac{x^4+6x^2+12x}{(x^2+2)^2}=\frac{x(x^3+6x+12)}{(x^2+2)^2}=\frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

وجدنا $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$ واشارتها من نفس إشارة الجداء $xg(x)$:

جدول الإشارة:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
x		-		-	0	+	
g(x)		-	0	+		+	
f'(x)= xg(x)		+	0	-	0	+	

اذن من خلال الجدول نستنتج ان الدالة **f** متزايدة على المجال $]-\infty;\alpha]\cup[0;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $]\alpha;0[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

2) تبيين ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) :

القول ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) معناه $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=0?$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-6}{x^2+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-6-x^3-2x}{x^2+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2x-6}{x^2+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{x}=\frac{-2}{\infty}=0$$

ومنه نستنتج ان المستقيم (Δ) مقارب لـ (C_f) .

ب) دراسة الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f):

لدراسة الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f) ندرس إشارة الفرق $f(x)-x$:

$f(x)-x=\dfrac{-2x-6}{x^2+2}$ واشارته من إشارة $-2x-6$ أي لما $-2x-6\succ 0$ أي $-2x\succ 6$ أي $x\prec\dfrac{6}{-2}$

أي لما $x\prec -3$ فان $f(x)-x\succ 0$ أي (C_f) فوق (Δ).

ولما $-2x-6\prec 0$ أي لما $x\succ -3$ فان $f(x)-x\prec 0$ أي (C_f) تحت (Δ) .

3) تبيين ان $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha$ ثم استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$:

لنا

$$f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=\frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}-\frac{3}{2}\alpha=\frac{2(\alpha^3-6)-3\alpha(\alpha^2+2)}{2(\alpha^2+2)}$$

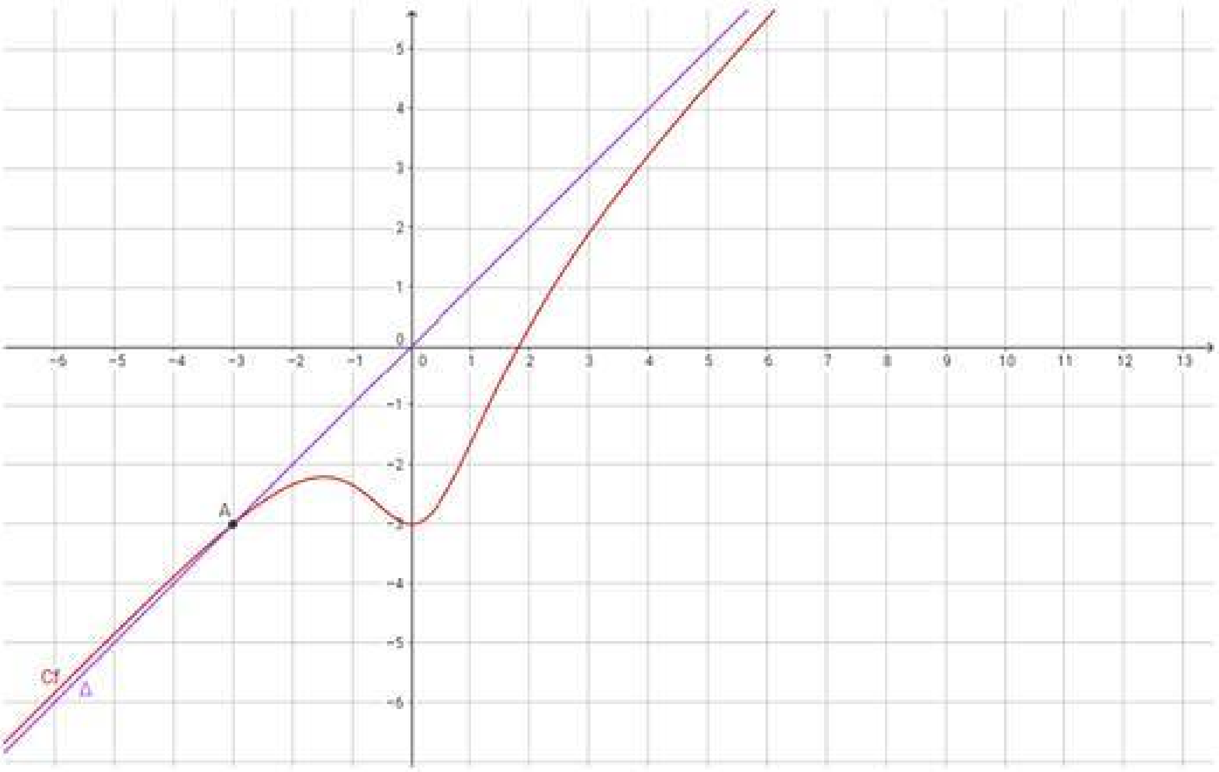
$$=\frac{2\alpha^3-12-3\alpha^3-6\alpha}{2(\alpha^2+2)}=\frac{-\alpha^3-6\alpha-12}{2(\alpha^2+2)}=\frac{-(\alpha^3+6\alpha+12)}{2(\alpha^2+2)}=\frac{-g(\alpha)}{2(\alpha^2+2)}=\frac{0}{2(\alpha^2+2)}=0$$

لان $g(\alpha)=0$ ومنه نجد $f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=0$ أي $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$ وهو المطلوب.

استنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$:

لنا $-1,48\prec\alpha\prec-1,47$ ومنه $(-1,48)\times\frac{3}{2}\prec\frac{3}{2}\alpha\prec(-1,47)\times\frac{3}{2}$ ومنه $-2,22\prec f\alpha\prec-2,205$.

4) رسم المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) :



5) نرمز بـ S الى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها :

$x=\alpha$ ، $x=0$ ، $y=0$.

اثبات انه من اجل كل $x\in[\alpha;0]$ فان $-3\leq f(x)\leq f(\alpha)$:

حسب جدول التغيرات نلاحظ ان الدالة f متناقصة تماما على المجال $[\alpha;0]$ ونحن نعلم انه لما تكون دالة متناقصة على مجال معين فانها تعكس الترتيب أي مثلا $x\leq x_0$ تستلزم ان $f(x)\geq f(x_0)$ او $x\geq x_0$ يستلزم ان $f(x)\leq f(x_0)$.

لنا $x\in[\alpha;0]$ معناه $x\le 0$ و $x\ge\alpha$ ومنه نجد $f(x)\ge f(0)$ و $f(x)\le f(\alpha)$ أي $f(x)\ge -3$ و $f(x)\le f(\alpha)$ أي $-3\le f(x)\le f(\alpha)$ وهو المطلوب.

تبيين ان $\frac{3}{2}\alpha^2\le S\le -3\alpha$:

حسب المعطيات لدينا المساحة S تقع تحت محور الفواصل أي

$$S=\int_\alpha^0\left(0-f(x)\right)dx=\int_\alpha^0\left(-f(x)\right)dx$$

لنا $-3\le f(x)\le f(\alpha)$ ومنه $-f(\alpha)\le -f(x)\le 3$ وبما ان الدالة رتيبة تماما على المجال $[\alpha;0]$ فانه ينتج $\int_\alpha^0(-f(\alpha))dx\le\int_\alpha^0(-f(x))dx\le\int_\alpha^0 3dx$ ومنه $\left[(-f(\alpha))x\right]_\alpha^0\le S\le[3x]_\alpha^0$ ومنه $\left[(-f(\alpha))\times 0\right]-\left[(-f(\alpha))\times\alpha\right]\le S\le 3(0)-3(\alpha)$ ومنه $f(\alpha)\times\alpha\le S\le -3\alpha$ ومنه $\frac{3}{2}\alpha\times\alpha\le S\le -3\alpha$ ومنه نجد $\frac{3}{2}\alpha^2\le S\le -3\alpha$ وهو المطلوب.

الأستاذ بورنان