

6

شعبة :

تقني رياضي

مادة الرياضيات

بكالوريا

2010

الديوان الوطني لامتحانات و المسابقات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

1/ حل، في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة: $(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$.

(i هو العدد المركب الذي طوله 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له)

2/ علم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A, C, D و I ذات اللاحقات: $z_A = 3-2i$ ، $z_C = -3+i$ ، $z_D = -3-i$ و $z_I = 1$ على الترتيب.

$$\begin{cases} \arg(z-3+2i) = \arg(z-1) + \frac{\pi}{2} \\ |z-3+2i| = |z-1| \end{cases}$$

أ- بين أن الجملة تكافئ: $\frac{z-3+2i}{z-1} = i$ ثم عين قيمة z .

ب- B النقطة التي لاحتها $z_B = 3$ ، تحقق أن: $\overline{AB} = \overline{DC}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

ج- لتكن J النقطة التي لاحتها $z_J = 1-2i$ ، حيث: $z_J = 1-2i$.

اكتب على الشكل الآسي العدد المركب Z حيث: $Z = \frac{z_A - z_I}{z_B - z_J}$.

تحقق أن: $\overline{AB} = \overline{JI}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABIJ$ ؟

التمرين الثاني: (05 نقاط)

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر النقطتين $A(3; -1; 2)$ و $B(1; 2; 1)$ و المستوي (P) الذي معادلته $x - 2y + 3z - 7 = 0$.

1/ عين إحداثيات النقطة G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 3 و 1 على الترتيب.

2/ عين طبيعة وعناصر (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\|3\overline{MA} + \overline{MB}\| = 4$.

3/ أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة G ويعامد المستوي (P) .

ب- عين إحداثيات H نقطة تقاطع (P) و (Δ) .

ج- احسب المسافة بين G و المستوي (P) .

4/ نعرف المستوي (P') بتمثيله الوسيط:

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = t+2\lambda \\ z = 2-t+2\lambda \end{cases}$$

حيث t و λ عدنان حقيقيان

أثبت أن (P) و (P') متقاطعان و اكتب تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما.

التمرين الثالث: (07 نقاط)

$$f(x) = \frac{3xe^x - 3x - 4}{3(e^x - 1)} \quad \text{بالعبارة: } \mathbb{R}^* \text{ المعرفة}$$

ليكن (C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث: $f(x) = ax + \frac{b}{3(e^x - 1)}$ من أجل كل x من \mathbb{R}^*

2. احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات تعريفها.

3. بين أن f متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

4. أ - (D) و (D') المستقيمان اللذان معادلتاهما على الترتيب: $y = x$ و $y = x + \frac{4}{3}$.

بين أن (D) و (D') مقاربان للمنحنى (C_f) ، ثم حدّد وضعيته بالنسبة لكل منهما.

ب - بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث $0,9 < x_0 < 0,91$

$$\text{و } -1,66 < x_1 < -1,65$$

ج - احسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(x) + f(-x)$ غير معدوم
فسّر النتيجة هندسيا.

د - ارسم (D) و (D') و (C_f) .

هـ - m عدد حقيقي، (D_m) المستقيم المعرف بالمعادلة $y = x + m$

ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$

5. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يأتي: $g(x) = [f(x)]^2$

ادرس تغيرات الدالة g دون حساب $g(x)$ بدلالة x .

التمرين الرابع: (03 نقاط)

نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي:

$$\overline{11\alpha 00} \quad n \text{ حيث } \alpha \text{ عدد طبيعي.}$$

1- عين α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3.

2- عين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5.

3- استنتج قيمة α التي تجعل n قابلا للقسمة على 15.

3- نأخذ $\alpha = 4$ اكتب العدد n في النظام العشري.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

1) أ- اكتب على الشكل الأسّي العدد المركب a حيث: $a = -2 + 2i\sqrt{3}$
(i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له)

ب- حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول Z : $Z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$

2) ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

و A و B و C النقط التي لاحقاتها $Z_A = -2$ و $Z_B = -1 - \sqrt{3}i$ و $Z_C = 1 + \sqrt{3}i$ على الترتيب.

أ- احسب طولية العدد المركب $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ وعمدة له.

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC .

3) لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\arg(\bar{z} + 2) = \frac{\pi}{3}$.

أ- تحقق أن B تنتمي إلى (E) .

ب- عين المجموعة (E) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1- عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 10^n على 13.

2- تحقق أن: $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0 [13]$.

3- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0 [13]$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقطتين:

$A(3; -2; 2)$ ، $B(0; 4; -1)$

1) اكتب معادلة للمستوي (p_1) الذي يشمل النقطة A و شعاع ناظمي له $\vec{u}(1; 0; -1)$

2) (p_2) المستوي الذي يحوي المستقيم (AB) ويعامد للمستوي (p_1) .

أ- بين أن شعاع ناظمي لـ (p_2) $\vec{v}(1; 1; 1)$

ب- اكتب معادلة لـ (p_2) .

3) نعتبر النقطتين C و D حيث $C(6; 1; 5)$ و D معرفة بـ: $\overline{CD}(0; -3; -6)$

أ- بين أن المثلث ACD قائم في A واحسب مساحته.

ب- بين أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (ACD) .

ج- احسب حجم رباعي الوجوه $ACDB$.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$

و (C_r) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1- أثبت أن الدالة f فردية.

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$

ج- ادرس تغيرات الدالة f .

2- أ- اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_r) في النقطة ذات الفاصلة 0.

ب- ادرس وضعية (C_r) بالنسبة إلى (T) واستنتج أن (C_r) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

ج- بين أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب للمنحنى (C_r) في جوار $+\infty$ ، ثم استنتج معادلة

(d') المستقيم المقارب الآخر.

د- ارسم (d) و (d') و (C_r) في المعلم السابق.

3- g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$

أ- بين أن الدالة g زوجية.

ب- انطلاقاً من (C_r) ارسم (C_g) منحنى الدالة g في نفس المعلم السابق.

الإجارية النموذجية و سلم التنقيط

امتحان شهادة البكالوريا دورة : 2010

اختبار مادة : الرياضيات الشعب (ة): تقني رياضي

العلامة		عناصر الإجابة	مواور الموضوع
مجموع	مجزأة		
05		الموضوع الأول	أعداد مركبة و تحويلات نقطية
		تمرين 1: (5 نقاط)	
	0.50	1/ حلول المعادلة $(z - 3 + 2i)(z^2 + 6z + 10) = 0$ $\Delta' = i^2$	
	0.75	$z_2 = -3 - i, z_1 = -3 + i, z_0 = 3 - 2i$	
	0.75	2/ تطعيم النقط A, C, D في المستوي	
	0.5	3/ أ- الجملة تكافئ $\frac{z - 3 + 2i}{z - 1} = i$	
	0.25	$Z = 3$	
	0.5	ب- التحقق من أن $\overline{AB} = \overline{DC}$	
0.25	الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع		
0.5	4/ الكتابتان الجبرية والأسية للعدد $Z : Z = -i, Z = e^{i\frac{3\pi}{2}}$		
0.5+0.5	التحقق أن $\overline{AB} = \overline{JI}$ وطبيعة الرباعي $ABIJ$ مربع		
05		تمرين 2: (5 نقاط)	هندسة قضائية
	01	1/ $G(\frac{10}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{7}{4})$	
	01	2/ المجموعة (Γ) هي سطح كرة مركزها G ونصف قطرها 1	
	0.5	3/ أ- تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) : $\begin{cases} x = \frac{10}{4} + u \\ y = -\frac{1}{4} - 2u \\ z = \frac{7}{4} + 3u \end{cases} u \in \mathbb{R}$	
	0.75	ب- إحداثيات $H(\frac{135}{56}, -\frac{4}{56}, \frac{83}{56})$	
	0.75	ج- $d(G, p) = \frac{5}{4\sqrt{14}}$	
	0.5	4/ بحل الجملة المشكلة من معادلة (P) وتمثيل وسيطي (P') نجد:	
	0.5	$t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \lambda = 2t$	
0.5	إيجاد شعاع ناظمي لـ (P') : $\vec{n}_p(2; -1; 1)$ وتبين \vec{n}_p لا يوازي \vec{n}_p		
	إيجاد التمثيل الوسيطي (غير وحيد)		

العلامة		عناصر الإجابة	محاور الموضوع
مجموع	مجزأة		
		تمرين 3: (7 نقاط)	
	0.25 $(a,b) = (1, -4)$ ، $f(x) = x + \frac{-4}{3(e^x - 1)}$.1	
	4×0.25 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.2	
	0.25+0.5 $f'(x) > 0$ ، $f'(x) = 1 + \frac{4e^x}{3(e^x - 1)^2}$.3	
	0.25 جدول التغيرات	
	0.25 $y = x$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$ -1 .4	
07	0.25 (C_f) أسفل (D) في جوار $+\infty$	
	0.25 (D') $y = x + \frac{4}{3}$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + \frac{4}{3})] = 0$	
	0.25 (C_f) فوق (D') في جوار $-\infty$	
	2×0.5	$f(x_0) = 0$ و $0,9 < x_0 < 0,91$ $f(x_1) = 0$ و $-1,66 < x_1 < -1,65$ نظرية القيم المتوسطة	
	2×0.25 $f(x) + f(-x) = \frac{4}{3}$ - $\omega(0, \frac{2}{3})$ مركز تناظر (C_f)	
	0.5+0.25 رسم (D) و (D') و (C_f)	
	0.25 $m < 0$ أو $m > \frac{4}{3}$ حل وحيد	
	0.25 $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$ لا توجد حلول	
		.5. مركب الدالتين f والدالة مربع $(g'(x) = 2f(x)f'(x))$.	
	1		

العلامة		عناصر الإجابة	محاور الموضوع
مجموع	مجزأة		
03	0.5	تمرين 4: (3 نقط) $n = 11\alpha 00$ $0 \leq \alpha \leq 6, n = 49\alpha + 2744$	
	0.75	1/ لدينا $n \equiv 0[3]$ معناه $\alpha + 2 \equiv 0[3]$ أي $\alpha \equiv 1[3]$ ومنه $\alpha \in \{1, 4\}$	
	0.75	2/ $n \equiv 0[5]$ معناه $4\alpha + 4 \equiv 0[5]$ أي $\alpha + 1 \equiv 0[5]$ ومنه $\alpha \equiv 4[5]$ إذن $\alpha = 4$	
	0.5	n يقبل القسمة على 15 إذا فقط إذا كان $\alpha = 4$	
	0.5	3/ من أجل $\alpha = 4$ نجد : $n = 2940$	

العلامة		عناصر الإجابة	محاور الموضوع
مجموع	مجزأة		
		الموضوع الثاني	
05	0.75	التمرين الأول : (05 ن) $a = 4e^{\frac{2\pi}{3}i} - i$ (1)	الأعداد المركب
	0.5	ب - بوضع $Z = re^{i\theta}$ ينتج $r^2 e^{i2\theta} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$	
	2×0.5	ومنه $Z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ أو $Z = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$	
	3×0.5 $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ؛ $\left \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right = \sqrt{3}$ ؛ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i\sqrt{3} - i$ (2)	
	0.25 ب- المثلث ABC قائم في A	
	0.5 (3) أ- $\bar{z}_B + 2 = 1 + \sqrt{3}i$ ، $\arg(\bar{z} + 2) = \frac{\pi}{3}$ ، $(B \in E)$ ، ب- $\arg(Z + 2) = -\arg(\bar{z} + 2) = -\frac{\pi}{3}$	
	0.5 $E = [AB) - \{A\}$	
04	6×0.25	التمرين الثاني : (04 ن) (1) $n = 6k$ الباقي 1 ، $n = 6k + 3$ الباقي 12 $n = 6k + 1$ الباقي 10 ، $n = 6k + 4$ الباقي 3 $n = 6k + 2$ الباقي 9 ، $n = 6k + 5$ الباقي 4	الموافقات
	1 (2) $2008 \equiv 4[6]$ و $10^{2008} \equiv 3[6]$ ومنه $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0[13]$	
	6×0.25 (3) $n = 6k + 2$ أو $n = 6k + 4$ حيث $k \in \mathbb{N}$	
05	0.5	التمرين الثالث: (05 ن) $(P_1): x - z - 1 = 0$ /1	تطبيقات الجداء السلمي في الفضاء -
	2×0.5 /2 أ- $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ ، $\vec{v} \cdot \overline{AB} = 0$ ومنه \vec{v} ناظمي لـ (P_2) .	
	0.5 ب- معادلة $(P_2): x + y + z - 3 = 0$	
	2×0.5 /3 أ) $\overline{AC} \cdot \overline{AD} = 0$ المثلث ACD قائم في A ، مساحته: $S = \frac{9\sqrt{6}}{2} ua$	
	2×0.5 ب) $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0$ و $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$	
2×0.5 ج) $v = \frac{1}{3} S \times AB = 27uv$		

العلامة		عناصر الإجابة	محاور الموضوع	
مجموع	مجزأة			
06		التمرين الرابع: (06 نقاط)	الدوال الصماء	
		0.25	 f دالة فردية (1/1)
		0.5	 $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$ (ب)
		2×0.25	 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (ج)
		0.5	 f متزايدة تماما على \mathbb{R} . $(f'(x) > 0)$
		0.25	 جدول تغيراتها
		0.5	 $y = 2x : (T)$ (1/2)
		0.5	 (ب) إشارة $f(x) - 2x$ و (C_r) يخرق (T) في المبدأ O .
		0.25	 المبدأ O نقطة انعطاف لـ (C_r) .
		0.5	 (ج) مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x + 1$ في جوار $+\infty$
		0.5	 (d') : $y = x - 1$ مقارب (C_r) في جوار $-\infty$
		1	 (ج) رسم $(C_r), (d'), (d)$
		0.25	 g -1 دالة زوجية (3/1)
		0.5	 ب- رسم (C_r)