(دورة جوان 2008)

شعبة تقني رياضي

التمرين الأول : (4 نقط)

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (*) المعرفة كما يلي :

$$Z^3+(2-4i)Z^2-(6+9i)Z+9(-1+i)=0 ......(*)$$

1) بين ان $Z_0=3i$ هو حل للمعادلة (*)

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (*) ثم اكتب حلولها Z_0 ، Z_1 ، Z_2 على الشكل الأسي حيث : $|Z_1|\langle|Z_2|$

3) لتكن A ، B ، C صور الحلول Z_0 ، Z_1 ، Z_2 على الترتيب في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

عين النقطة G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,1),(C,-1)\}$.

4) عين المجموعة (E) للنقط حيث : $AM^2+BM^2-CM^2=-13$

بين أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (E) ثم انشئ (E)

5) تحقق أن النقط O ، B و G في استقامية ثم عين صورة المجموعة (E) بالتحاكي الذي مركزه النقطة O و يحول B إلى G محددا عناصره المميزة.

✓ الحل :

1) التحقق من ان $Z_0=3i$ حلا للمعادلة (*)

$$\begin{aligned}&(3i)^3+(2-4i)(3i)^2-(6+9i)(3i)+9(-1+i)\\&=-27i+(2-4i)(-9)-18i-27-9+9i\\&=-27i-18+36i-18i-27-9+9i\\&=0\end{aligned}$$

2) حل المعادلة (*) ، المعادلة (*) تكتب على الشكل

$$(Z-3i)(Z^2+bZ+c)=0$$

$$\begin{array}{l|l} Z^3+(2-4i)Z^2-(6+9i)Z+9(-1+i) & Z-3i \\ \text{بالطرح} \quad Z^3-3iZ^2 & \overline{Z^2+(2-i)Z-3-3i} \\ \hline (2-i)Z^2-(6+9i)Z+9(-1+i) & \\ \text{بالطرح} \quad (2-i)Z^2+(-6i-3)Z & \\ \hline (-3-3i)Z+9(-1+i) & \\ \text{بالطرح} \quad (-3-3i)Z+9i-9 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

إذن المعادلة (*) تكتب على الشكل:

$(Z-3i)[Z^2+(2-i)Z-3-3i]=0$

(*) تكافئ:

$\begin{cases} Z-3i=0 \\ Z^2+(2-i)Z-3-3i=0 \end{cases}$ أو

- نحل المعادلة

$(*)'$ ....$Z^2+(2-i)Z-3-3i=0$

$$\begin{aligned}\Delta &= (2-i)^2-4(1)(-3-3i) \\ &= 4-4i-1+12+12i \\ &= 15+8i\end{aligned}$$

ليكن $\sigma=x+iy$ جذرا تربيعيا لـ Δ إذن $\sigma^2=\Delta$

$\sigma^2=\Delta$ تكافئ

$$\begin{cases} x^2-y^2=15 ....(1) \\ 2xy=8 ....(2) \\ x^2+y^2=17 ....(3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (3) طرفا لطرف نجد، $2x^2=32$ و منه

$x^2=16$ إذن، $x=4$ أو $x=-4$

- من أجل $x=4$ نجد $y=1$
- من أجل $x=-4$ نجد $y=-1$

إذن، $\sigma_1=4+i$ و $\sigma_2=-4-i$

إذن المعادلة $(*)'$ لها حلان هما،

$$Z_1=\frac{-2+i+4+i}{2}=1+i$$

$$Z_2=\frac{-2+i-4-i}{2}=-3$$

و عليه فالمعادلة (*) لها ثلاث حلول هي Z_0 ، Z_1 ، Z_2

(3) تعين G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,1),(C,-1)\}$

نرمز بـ Z_G إلى لاحقة النقطة G إذن

$$Z_G = Z_A + Z_B - Z_C$$
$$= Z_0 + Z_1 - Z_2$$
$$= 3i + 1 + i + 3 = 4 + 4i$$

إذن احداثيات G هي $(4,4)$

4) $$AM^2 + BM^2 - CM^2 = \left(\vec{AG} + \vec{GM}\right)^2 + \left(\vec{BG} + \vec{GM}\right)^2 - \left(\vec{CG} + \vec{GM}\right)$$
$$= GM^2 + AG^2 + BG^2 - CG^2$$

لكن:

$$AG^2 = |Z_G - Z_A|^2 = |4 + 4i - 3i|^2$$
$$= |4 + i|^2 = 17$$
$$BG^2 = |Z_G - Z_B|^2 = |4 + 4i - 1 - i|^2$$
$$= |3 + 3i|^2 = 18$$
$$CG^2 = |Z_G - Z_C|^2 = |4 + 4i + 3|^2$$
$$= |7 + 4i|^2 = 65$$

إذن ، $AM^2 + BM^2 - CM^2 = GM^2 - 30$

و منه ، $AM^2 + BM^2 - CM^2 = -13$ تكافئ $GM^2 - 30 = -13$

تكافئ $GM^2 = 17$

تكافئ $GM = \sqrt{17}$

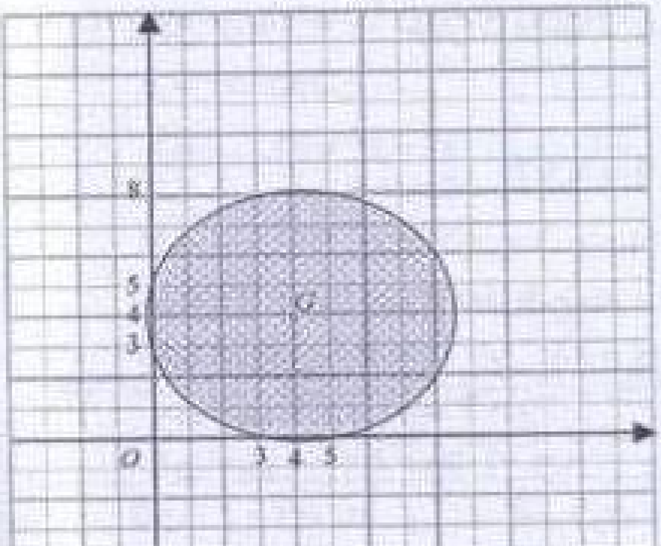
و بالتالي المجموعة (E) هي دائرة

مركزها G و طول نصف قطرها $\sqrt{17}$

- اثبات ان A تنتمي الى (E) ،

$$GA^2 = |Z_G - Z_A|^2 = |4 + 4i - 3i|^2$$
$$= |4 + i|^2 = 17$$

إذن A نقطة من (E)



5) $\vec{OG}(4,4)$ ، $\vec{OB}(1,1)$

لاحظ ان $\vec{OG} = 4\vec{OB}$ و منه النقط O ، B و G تقع على استقامة واحدة

- نسبة التحاكي هي $k = \frac{OG}{OB} = 4$

- صورة الدائرة (E) هي الدائرة (E') مركزها G' صورة G بالتحاكي

و طول نصف قطرها هو $R' = 4AG$

$R' = 4AG = 4 \times \sqrt{17}$ و لدينا ، $\vec{OG'} = 4\vec{OG}$

التمرين الثاني : (5 نقط)

نعتبر الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

$A(1,2,2)$ و $B(3,2,1)$ و $C(1,3,3)$ نقط من هذا الفضاء

1) برهن ان النقط A ، B و C تعين مستو يطلب تعيين معادلته الديكارتية

2) نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) المعرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين:

$(P_1): x-2y+2z-1=0$

$(P_2): x-3y+2z+2=0$

بين ان (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ)

3) بين ان النقطة C تنتمي الى المستقيم (Δ)

4) بين ان الشعاع $\vec{u}(2,0,-1)$ هو احد اشعة توجيه المستقيم (Δ)

5) استنتج ان التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) هوالجملة:

$$\begin{cases} x=2k+1 \\ y=3 \\ z=-k+3 \end{cases} \quad \text{حيث } (k\in\mathbb{R})$$

6) لتكن M نقطة من المستقيم (Δ) ،اوجد قيمة الوسيط k حتى يكون الشعاعان $\vec{AM}$ و $\vec{u}$ متعامدين ، ثم استنتج المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ)

✓ الحل :

$A(1,2,2)$ ، $B(3,2,1)$ ، $C(1,3,3)$

1) اثبات ان النقط A ، B و C تعين مستوي

لاثبات ان النقط A ، B و C تعين مستوي يجب اثبات ان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيا

$\vec{AB}(2,0,-1)$ ، $\vec{AC}(0,1,1)$

نفرض انه يوجد λ بحيث $\vec{AC}=\lambda\vec{AB}$

$\vec{AC}=\lambda\vec{AB}$ يكافئ:

$$(I)\ldots\begin{cases} 0=2\lambda \\ 1=\lambda\times 0=0 \\ 1=-\lambda \end{cases}$$

الجملة (I) مستحيلة لأن $1=0$ خاطئة

لان لا يوجد λ بحيث $\vec{AC}=\lambda\vec{AB}$ و منه الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطان خطيا و عليه فالنقاط A ، B و C تعين مستوي

2) $(P_1): x-2y+2z-1=0$

$(P_2): x-3y+2z+2=0$

اثبات ان (P_1) و (P_2) يتقاطعان في مستقيم (Δ)

ليكن $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ ناظمي (P_1) و (P_2) على الترتيب

$\vec{n_2}(1,-3,2)$ و $\vec{n_1}(1,-2,2)$

بما ان $\frac{1}{1} \neq \frac{-3}{-2} \neq \frac{2}{2}$ فإن الشعاعين $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ غير مرتبطين خطيا و بالتالي (P_1) و (P_2) متقاطعان في مستقيم (Δ).

3) اثبات ان C تنتمي الى (Δ) يعني ان C تنتمي الى (P_1) و C تنتمي الى (P_2)

لدينا $1-2\times3+2\times3-1=1-6+6-1=0$ إذن C تنتمي الى (P_1)

لدينا $1-3\times3+2\times3+2=1-9+6+2=0$ إذن C تنتمي الى (P_2)

4) $\vec{u}(2,0,-1)$ شعاع توجيه لـ (Δ) لابد ان يكون

$\vec{u}.\vec{n_2}=0$ و $\vec{u}.\vec{n_1}=0$

$$\vec{u}.\vec{n_1}=(2,0,-1)(1,-2,2)$$
$$=2+0-2=0$$
$$\vec{u}.\vec{n_2}=(2,0,-1)(1,-3,2)$$
$$=2+0-2=0$$

اذن u هو احد أشعة توجيه للمستقيم (Δ)

5) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من (Δ)

اذن يوجد λ بحيث: $\vec{CM}=\lambda\vec{u}$

لدينا: $\vec{CM}(x-1,y-3,z-3)$

$\vec{CM}=\lambda\vec{u}$ يكافئ

$$\begin{cases} x-1=2\lambda \\ y-3=0 \\ z-3=-\lambda \end{cases}$$

اذن:

$$\begin{cases} x=2\lambda+1 \\ y=3 \\ z=-\lambda+3 \end{cases}$$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$

6) ايجاد قيمة k بحيث $\vec{AM}$ و $\vec{u}$ متعامدين

$\vec{AM}(x-1,y-2,z-2)$

$\vec{AM}.\vec{u}=0$ يكافئ $2(x-1)+0(y-2)+(-1)(z-2)=0$

يكافئ $2x-1-z+2=0$

يكافئ $4k+2-1+k-3+2=0$

يكافئ: $5k=0$

يكافئ: $k=0$

المسافة بين A و المستقيم هي الطول AM من أجل $k=0$

إحداثيات النقطة M هي $C(1,3,3)$ إذن، $AM=AC=\sqrt{2}$

التمرين الثالث: (7 نقط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,2]$ بالعبارة، $f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$

1) أ) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0,2]$.

ب) انشئ (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (الوحدة على المحورين $4\,cm$).

ج) برهن انه إذا كان $x\in[0,2]$ فإن $f(x)\in[0,2]$.

2) نعرف المتتالية العددية (U_n) على $\mathbb{N}$ كالآتي،

$$\begin{cases}U_0=0\\U_{N+1}=f(U_n)\end{cases}$$

أ) برر وجود المتتالية (U_n) . احسب الحدين U_1 و U_2

ب) مثل الحدود U_0 و U_1 و U_2 على محور الفواصل و ذلك بالاستعانة بالمنحنى (C) و المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$

ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغير (U_n) و تقاربها انطلاقا من التمثيل السابق.

3) أ) برهن بالتراجع على العدد الطبيعي n ان، $0\le U_n\le\sqrt{3}$

ب) برهن انه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن، $U_{n+1})U_n$

ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (U_n)؟

ج) تحقق ان، $U_{n+1}-\sqrt{3}\le\frac{2-\sqrt{3}}{U_n+2}\left(U_n-\sqrt{3}\right)$ من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

عين عددا حقيقيا k من $]0,1[$ بحيث، $\left|U_{n+1}-\sqrt{3}\right|\le k\left|U_n-\sqrt{3}\right|$

بين انه من اجل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $\left|U_n-\sqrt{3}\right|\le k^n\left|U_0-\sqrt{3}\right|$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

✓ الحل:

1) أ) دراسة تغيرات الدالة f على المجال $[0,2]$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0,2]$ و لدينا

$$f'(x)=\frac{2(x+2)-(2x+3)}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{2x+4-2x-3}{(x+2)^2}=\frac{1}{(x+2)^2}$$

من اجل كل $x\in[0,2]$ ،

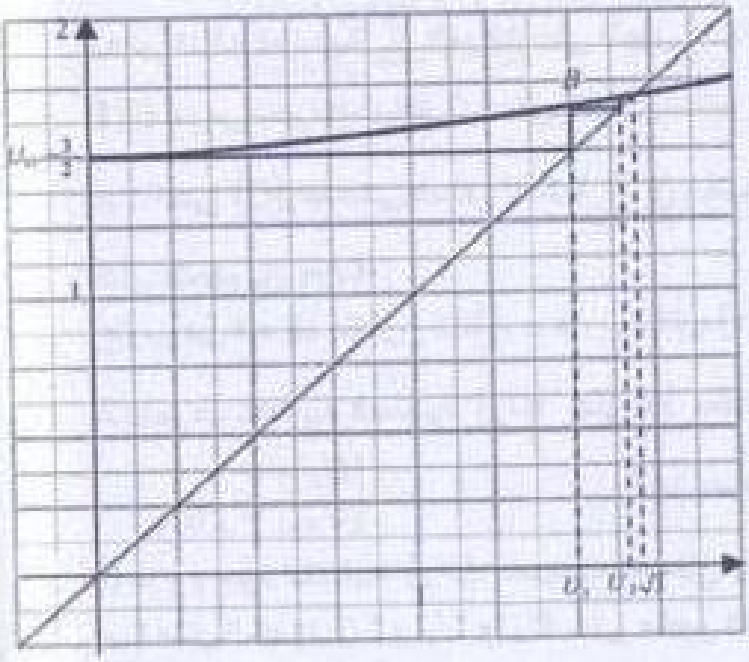
$f'(x)\rangle 0$ ومنه الدالة f

متزايدة تماما على $[0,2]$

جدول تغيرات f ،

x	0		2
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\frac{7}{4}$

ب) الرسم



ج) الدالة f متزايدة تماما على $[0,2]$ و بالتالي $f(x)\in[f(0),f(2)]$

لكن $f(0)=\frac{3}{2}$ و $f(2)=\frac{7}{4}$

إذن $f(x)\in\left[\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right]$

و بما ان $\left[\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right]\subset[0,2]$

فإن $f(x)\in[0,2]$

2)

$$\begin{cases}U_0=0\\ U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$$

ا) بما ان الدالة f معرفة على I و من اجل كل $x\in I$ ، $f(x)\in I$ و $U_0\in I$

فإننا نستطيع تعريف متتالية (U_n) بـ $U_{n+1}=f(U_n)$

$$U_1=f(U_0)=f(0)=\frac{3}{2}$$

$$U_2=f(U_1)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2\times\frac{3}{2}+3}{\frac{3}{2}+2}=\frac{6}{\frac{7}{2}}=\frac{12}{7}$$

ب) نرسم مستقيم يوازي محور الفواصل معادلته $y=U_0$

هذا المستقيم يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في النقطة A احداثياتها (U_0,U_0) و من النقطة A نرسم مستقيم يوازي محور التراتيب يقطع (C_f) في B . إذن احداثيات B هي $(U_0,f(U_0))$ اي $B(U_0,U_1)$

بنفس الكيفية نعلم U_2

ج) نلاحظ من التمثيل البياني ان المتتالية (U_n) متزايدة و متقاربة

3) ا) البرهان على ان $0\le U_n\le\sqrt{3}$

- من اجل $n=0$ لدينا $u_0=0$ و $0\le 0\le\sqrt{3}$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$
- نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي n مع $n\ge 0$
و نبرهن ان الخاصية صحيحة من اجل $n+1$
بما ان $0\le U_n\le\sqrt{3}$ و f متزايدة تماما على $[0,2]$ فإن $f(0)\le f(U_n)\le f(\sqrt{3})$ لكن ،

$$f(0)=0 \text{ و } f(\sqrt{3})=\frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2}=\frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

إذن $0\le U_{n+1}\le\sqrt{3}$
إذن الخاصية صحيحة من اجل $n+1$
و بالتالي الخاصية صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n
ب) إثبات انه من اجل كل عدد طبيعي $U_{n+1}\rangle U_n$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{2U_n+3}{U_n+2}-U_n$$
$$=\frac{2U_n+3-U_n^2-2U_n}{U_n+2}$$
$$=\frac{-U_n^2+3}{U_n+2}$$
$$=\frac{(\sqrt{3}-U_n)(\sqrt{3}+U_n)}{U_n+2}$$

بما ان $0\le U_n\le\sqrt{3}$ فإن $\sqrt{3}-U_n\ge 0$ و $\sqrt{3}+U_n\ge 0$ و $U_n+2\ge 0$ و عليه يكون
$U_{n+1}-U_n\rangle 0$ و بالتالي (U_n) متزايدة تماما على N اي $U_{n+1}\rangle U_n$
- بما ان المتتالية (U_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى ب $\sqrt{3}$ فإنها متقاربة نحو عدد حقيقي l
ج)

$$U_{n+1}-\sqrt{3}=\frac{2U_n+3}{U_n+2}-\sqrt{3}$$
$$=\frac{2U_n+3-\sqrt{3}U_n-2\sqrt{3}}{U_n+2}$$
$$=\frac{2(U_n-\sqrt{3})+\sqrt{3}(\sqrt{3}-U_n)}{U_n+2}$$
$$=\frac{2(U_n-\sqrt{3})-\sqrt{3}(U_n-\sqrt{3})}{U_n+2}$$
$$=\frac{(U_n-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{U_n+2}$$

$$|U_{n+1}-\sqrt{3}|=\frac{|2-\sqrt{3}||U_n-\sqrt{3}|}{|U_n+2|}$$

$0\le U_n\le\sqrt{3}$ و منه $2\le|U_n+2|\le|2+\sqrt{3}|$

و بالقلب:

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} \le \frac{1}{|U_n+2|} \le \frac{1}{2}$$

$$|U_{n+1}-\sqrt{3}| \le \frac{|2-\sqrt{3}|}{2}|U_n-\sqrt{3}|$$

$$|U_{n+1}-\sqrt{3}| \le \left|1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right||U_n-\sqrt{3}|$$

اذن ، $k=\left|1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$ مع $0\langle k\langle 1$

نبرهن على صحة المتباينة بالتراجع

من اجل $n=1$ ،

لدينا ، $U_1-\sqrt{3}=\frac{3}{2}-\sqrt{3}$

$$k^1|0-\sqrt{3}|=\left|1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\sqrt{3}$$

$$=\left|\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right|$$

اذن $|U_1-\sqrt{3}| \le k^1|U_0-\sqrt{3}|$

و منه الخاصية صحيحة من اجل $n=1$

- نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي n اي

$$|U_n-\sqrt{3}| \le k^n|U_0-\sqrt{3}|$$

و نبرهن ان الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ اي $|U_{n+1}-\sqrt{3}| \le k^{n+1}|U_0-\sqrt{3}|$

لدينا :

$$|U_{n+1}-\sqrt{3}| \le k\ |U_n-\sqrt{3}|$$

$$\le k\times k^n|U_0-\sqrt{3}|$$

$$\le k^{n+1}|U_0-\sqrt{3}|$$

اذن الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ و بالتالي من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فان الخاصية صحيحة

التمرين الرابع: (4 نقط)

n عدد طبيعي اكبر من 5 .

1) a و b عددان طبيعيان حيث $a=n-2$ و $b=2n+3$

ا) ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الاكبر للعددين a و b ؟

ب) بين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n+5$ مضاعف للعدد 7

ج) عين قيم n التي من اجلها $PGCD(a,b)=7$

2) نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث :

$q=n^2-7n+10$ و $p=2n^2-7n-15$

ا) بين أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n-5$

ب) عين تبعا لقيم n و بدلالة n ، $PGCD(p,q)$

الحل :

1) $a=n-2$ و $b=2n+3$

ا) تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الاكبر

نستطيع أن نكتب :

$$\begin{aligned} b &= 2n-4+7 \\ &= 2(n-2)+7 \\ &= 2a+7 \end{aligned}$$

ليكن d القاسم المشترك الاكبر للعددين a و b

إذن d يقسم $2a$ و b و منه d يقسم $b-2a$ اي d يقسم 7

و عليه فالقيم الممكنة للقاسم المشترك الاكبر هي 1 و 7

ب) نستطيع ان نكتب : $b=n-2+n+5$

$$b=a+n+5$$

- إذن إذا كان a و b مضاعفين للعدد 7 فإن $b-a$ مضاعف للعدد 7

و بمان $b-a=n+5$ فإن $n+5$ مضاعف للعدد 7

- إذن إذا كان $n+5$ مضاعف للعدد 7 فإننا نكتب $n+5=7k$ مع $k\in\mathbb{N}^*$

إذن $n=7k-5$

نعوض قيمة n في a و b نجد :

$$\begin{aligned} a &= 7k-5-2=7k-7 \\ a &= 7(k-1)=7k' \end{aligned}$$

إذن a مضاعف لـ 7

$$\begin{aligned} b &= 2n+3 \\ &= 2(7k-5)+3 \\ &= 14k-10+3 \\ &= 14k-7 \\ &= 7(2k-1)=7k'' \end{aligned}$$

إذن b مضاعف لـ 7

ج) تعين قيم n بحيث $PGCD(a,b)=7$

القاسم المشترك الاكبر للعددين a و b يساوي 7 هذا يعني ان a و b من مضاعفات 7

و بالتالي $n+5$ مضاعف لـ 7 و عليه قيم n تكون من الشكل $7k-5$ مع k عدد طبيعي غير معدوم

2) $p=2n^2-7n-15$

$q=n^2-7n+10$

ا) نحلل p إلى جداء عوامل

	$2n^2-7n-15$	$n-5$
بالطرح	$2n^2-10n$	$2n+3$
	$3n-15$	
بالطرح	$3n-15$	
	0	

إذن $p=(n-5)(2n+3)$

نحلل q إلى جداء عوامل

	$n^2-7n+10$	$n-5$
بالطرح	n^2-5n	$n-2$
	$-2n+10$	
بالطرح	$-2n+10$	
	0	

إذن $q=(n-5)(n-2)$

إذن $(n-5)$ تقسم p و تقسم q

ب) عين تبعا لقيم n و بدلالة n ، $PGCD(p,q)$

$$PGCD(p,q)=(n-5)\times PGCD(2n+3,n-2)$$
$$=(n-5)\times PGCD(a,b)$$

- إذا كان $n+5$ مضاعف للعدد 7 فإن $PGCD(b,a)=7$

و عليه، $PGCD(p,q)=7(n-5)$

- إذا كان $n+5$ ليس مضاعف للعدد 7 فإن $PGCD(b,a)=1$

و عليه، $PGCD(p,q)=1\times(n-7)$
$=n-7$