الحل المفصل لامتحان شهادة البكالوريا مادة الرياضيات لشعبتي الآداب لسنة 2014

حل الموضوع الأول

حل التمرين الأول:

1) تعيين باقي قسمة العدد 28 على العدد 9:

بما أن $1 + 3 \times 9 = 28$ فإن باقي قسمة العدد 28 على العدد 9 هو **"1"**

2) تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي k: $10^k \equiv 1[9]$

بما أن $10 \equiv 1[9]$ فإن $10^k \equiv 1^k[9]$ ومنه $\mathbf{10^k \equiv 1[9]}$.

3) استنتاج أن: $4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 28 \equiv 1[9]$

بما أن $10^k \equiv 1[9]$ من أجل كل عدد طبيعي k و $28 \equiv 1[9]$ فإن:

$$4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 28 \equiv 4 + 3 + 2 + 1[9]$$

ومنه: $\mathbf{4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 28 \equiv 1[9]}$

4) أ) التحقق أن $2^3 \equiv -1[9]$

بما أن $2^3 = 8 = 9 - 1$ فإن: $\mathbf{2^3 \equiv -1[9]}$

ب) تعيين الأعدد الطبيعية n بحيث: $2^{6n} + n - 1 \equiv 0[9]$

لدينا $2^{6n} + n - 1 \equiv 0[9]$ ومنه $(2^3)^{6n} + n - 1 \equiv 0[9]$ ومنه $(-1)^{6n} + n - 1 \equiv 0[9]$

ومنه $n \equiv 0[9]$ لأن ($(-1)^{6n} = 1$) ومنه قيم الأعداد الطبيعية هي مضاعفات العدد 9 $\mathbf{(n = 9k)}$.

حل التمرين الثاني:

تعيين الاقتراح الصحيح:

1) الاقتراح جـ)

التبرير: بما أن بما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدها $(u_2 = 1)$ فإن عبارة الحد العام (u_n) هي:

$$u_n = u_2 + 3(n - 2) = 1 + 3n - 6; \ \mathbf{u_n = -5 + 3n}$$

2) الاقتراح أ)

التبرير: المجموع $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ مجموع n حد من متتالية حسابية حدها الأول يساوي 1 و أساسها 1

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n}{2}(1 + n); \ 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n^2 + n}{2}$$

3) الاقتراح جـ)

التبرير: من أجل $x = -2$ يكون $\left(\frac{x}{x+1} = \frac{x-2}{x} = 2\right)$

4) الاقتراح ب)

التبرير:

$$v_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} = 2 \times 3 \times 3^n = \mathbf{3}v_n$$

حل التمرين الثالث:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2};\ D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

1) تعيين العدد الحقيقي α:

$$f(x) = \alpha - \frac{3}{x+2} = \frac{\alpha x + 2\alpha - 3}{x+2}$$

بالمطابقة نجد $\alpha = 2$

ومنه: $f(x) = 2 - \frac{3}{x+2}$

2) تعيين النقط من المنحني (C_f) التي إحداثياتها صحيحة:

يكون $f(x)$ عددا صحيحا إذا كان $x + 2$ من قواسم 3 أي من أجل :

$x + 2 = 3\ ; x = 1\ ; f(1) = 1\ ;\ \boldsymbol{A_1(1:1)}$
$x + 2 = 1\ ; x = -1\ ; f(-1) = -1\ ;\ \boldsymbol{A_2(-1:-1)}$
$x + 2 = -1\ ; x = -3\ ; f(-3) = 1\ ;\ \boldsymbol{A_3(-3:5)}$
$x + 2 = -3\ ; x = -5\ ; f(-5) = 3\ ;\ \boldsymbol{A_1(-5:3)}$

3) حساب نهاية الدالة f عند حدود مجال مجموعة التعريف:

$\lim\limits_{x \to -\infty}$

$$\lim_{\substack{< \\ x \to -2}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to -2}} 2 - \frac{3}{x+2} = +\infty\ ;\ \lim_{\substack{> \\ x \to -2}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to -2}} 2 - \frac{3}{x+2} = -\infty$$

4) أ) تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\{-2\} - \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\{-2\} - \mathbb{R}$ حيث: $f'(x) = -\frac{-3}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$

ب) تشكيل جدول التغيرات لدالة f:

بما أن $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\{-2\} - \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2

5) **تعيين إحداثيات نقط تقاطع مع حاملي محوري الاحداثيات:**

مع حامل محور الفواصل: نحل المعادلة $f(x) = 0$ أي $x = -\frac{1}{2}$ ومنه $\left(C_f\right) \cap (xx') = \left\{\mathrm{B}\left(-\frac{1}{2};0\right)\right\}$

مع حامل محور التراتيب: $x = 0$ أي $f(x) = \frac{1}{2}$ ومنه $\left(C_f\right) \cap (yy') = \left\{C\left(0;\frac{1}{2}\right)\right\}$

6) **أ) كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحني $\left(C_f\right)$ عند النقطة ذات الفاصلة -1:**

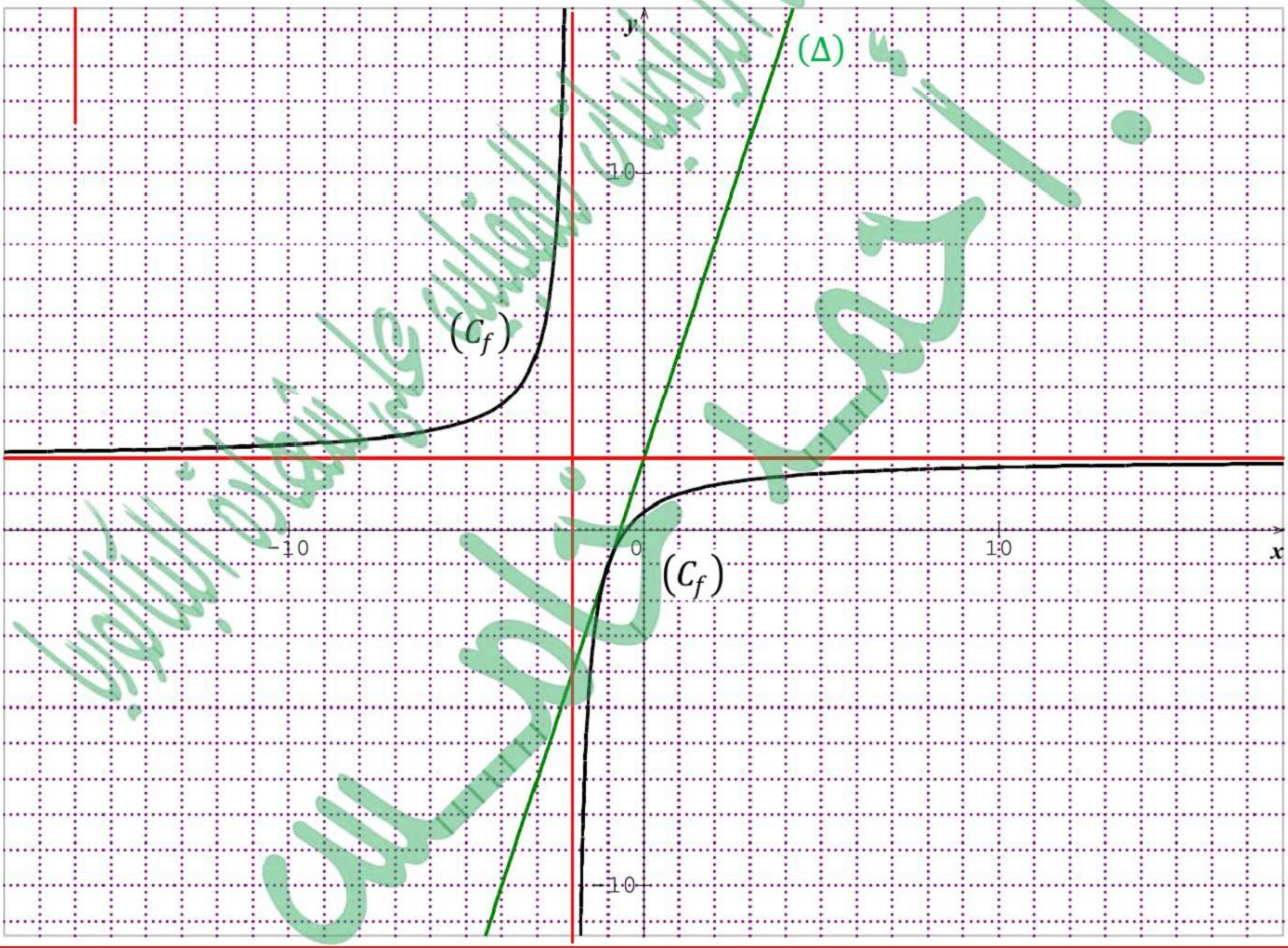
$$(T): y = f'(-1)(x+1) + f(-1)\,; \begin{cases} f'(-1) = 3 \\ f(-1) = -1 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{(T): y = 3x + 2}$$

ب) تبيين أنه يوجد مماس آخر (Δ') للمنحني $\left(C_f\right)$ يوازي المستقيم (Δ) :

بما أن الدالة f دالة تناظرية فإن $\left(C_f\right)$ يقبل مركز تناظر ومنه يوجد مماس آخر (Δ') للمنحني $\left(C_f\right)$ يوازي المستقيم (Δ) هو نظير له بالنسبة لمركز التناظر.

7) **رسم المماس (Δ) و المنحني $\left(C_f\right)$:**



حل الموضوع الثاني

حل التمرين الأول:

$$\begin{cases} v_{n+1} = 5v_n + 4 \\ v_0 = 1 \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$$

1) حساب الحدود v_1، v_2 و v_3

$v_1 = 5v_0 + 1 = 5(1) + 4 = 9$; $\boldsymbol{v_1 = 9}$

$v_2 = 5v_1 + 1 = 5(9) + 4 = 31$; $\boldsymbol{v_2 = 31}$

$v_3 = 5v_2 + 1 = 5(49) + 4 = 249$; $\boldsymbol{v_1 = 249}$

2) $u_n = v_0 + 1; n \in \mathbb{N}$

أ) تبيين أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدها الأول $u_0 = 2$:

لدينا $u_n = v_n + 1$ ومنه $u_{n+1} = v_{n+1} + 1$ وبما أن $v_{n+1} = 5v_n + 4$ فإن $u_{n+1} = 5u_n + 1 + 4$ أي $u_{n+1} = 5(v_n + 1)$ وعليه $u_{n+1} = 5u_n$ ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدها الأول $u_0 = 2$.$(u_0 = u_0 + 1 = 1 + 1 = 2)$

ب) تحليل العدد 1250 إلى جداء عوامل أولية واستنتاج أنه حد من حدود المتتالية (u_n):

$1250 = 2 \times 5^4$

ومنه العدد 1250 هو الحد الخامس من حدود المتتالية (u_n).

3) أ) حساب بدلالة n المجموع S_n

بما أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $(q = 5)$ وحدها الأول $(u_0 = 2)$ فإن:

$$S_n = u_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 2\frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1} = \frac{1}{4}(5^{n+1} - 1) \; ; \; \boldsymbol{S_n = \frac{1}{4}(5^{n+1} - 1)}$$

ب) حساب بدلالة n المجموع S'_n

$S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

بما أن $u_n = v_n + 1$ فإن: $v_n = u_n - 1$ ومنه

$S'_n = (u_0 + 1) + (u_1 - 1) + \cdots + (u_n - 1)$

$S'_n = (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) - (n + 1) = S_n - (n + 1)$

$$\boldsymbol{S'_n = \frac{1}{4}(5^{n+1} - 1) - (n + 1)}$$

حل التمرين الثاني:

تعيين الاقتراح الصحيح:

1) الاقتراح أ.)

التبرير: بما أن $1435 = 5 \times 7 \times 41$ فإن عدد قوسم العدد 1435 هو $8 = 2 \times 2 \times 2$

2) الاقتراح ب)

التبرير: بما أن $a \equiv -1[8]$ و $-1 = 7 - 8 \equiv 7[8]$ فإن $a \equiv 7[8]$ أي باقي قسمة a على 8 هو "**7**".

3) الاقتراح جـ)

التبرير: لأن $(2014 - 1453 = 561)$ من مضاعفات العدد 3

4) الاقتراح جـ)

التبرير: إذا كان $x \equiv 2[5]$ و $y \equiv 2[5]$ فإن $x^9 + y^9 \equiv 2^9 + 2^9[5]$ أي $x^9 + y^9 \equiv 4[5]$ لأن $2^9 = 512 \equiv 2[5]$

5) الاقتراح ب): لأن $21 \equiv 27[6]$ معناه: $\mathbf{21} + 6 = 27$ و بالقسمة على 3 نجد $\mathbf{7} + 2 = 9$ **أي** $9 \equiv 7[2]$

حل التمرين الثالث:

I. القراءة البيانية:

1) تخمين نهايتي عند $-\infty$ و $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \,; \; \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2) اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ وتشكيل جدول تغيراتها

الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;0]$ و $[2;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[0;2]$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ) كتابة معادلة المماس (T)

معادلة من الشكل $y = ax + b$ حيث $a = \frac{3-6}{1-0} = -3$ و $b = 6$ لأن المستقيم (T) يشمل النقطتين $A(1;3)$ والنقطة التي إحداثياتها $(0;6)$

ب) دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المماس (T)

نلاحظ من الرسم أن المنحني (C_f) يقع تحت المماس (T) في المجال$]-\infty;1[$ و فوقه في المجال $]1;+\infty[$ويخترقه في النقطة A

الاستنتاج بما أن (C_f) يخترق المماس (T) عند A فإن A تمثل نقطة الانعطاف .

4)تعيين حلول المتراجحة $f(x) > 5$

حلول المتراجحة $f(x) > 5$ هو المجال الذي يكون فيها المنحني (C_f) فوق المستقيم ذي المعادلة أي المجال $]3;+\infty[$.

II. 1) تعيين العددين a و b :

لدينا $f(x) = x^3 + ax^2 + b$

من الرسم نلاحظ: $f(x) = 5$ ومنه $b = 5$ وأيضا $f(1) = 3$ أي $1 + a + b = 3$ ومنه $a = -3$.

$$(a;b) = (-3;5)\,;\, f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$$

2) التحقق من صحة الإجابات السابقة:

أ) اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ ومنه

من أجل x ينتمي إلى المجالين $]-\infty;0]$ و $[2;+\infty[$ ، $f'(x) \geq 0$ أي أن الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;0]$ و $[2;+\infty[$ ومن أجل x ينتمي إلى المجال $[0;2]$ ، $f'(x) \leq 0$ أي أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0;2]$.

ب) معادلة المماس (T):

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)\,;\begin{cases} f'(1) = -3 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

$$(T): y = -3x + 6$$

جـ) نقطة الإنعطاف:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ مرتين حيث: $f''(x) = 6x - 6$ المشتقة الثانية تنعدم وتغير إشارتها من أجل $x = 1$ ومنه النقطة ذات الفاصلة 1 هي نقطة الانعطاف وهي النقطة A.

د) حلول المتراجحة $f(x) > 5$:

$f(x) > 5$ معناه $x^3 - 3x^2 + 5 > 5$ أي $x^2(x-3) > 0$ وحلول هذه المتراجحة هي حلول $(x-3) > 0$ لأن $x^2 \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x. ومنه الحلول هي $]3;+\infty[$