الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: 2022

الشعبة: تقني رياضي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و30 د

**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:**

## الموضوع الأول

### التمرين الأول: (04 نقاط)

$a$ و $b$ عددان طبيعيان حيث $a=2022$ و $b=124$

1) عيّن باقي القسمة الإقليدية لكلّ من العددين $a$ و $b$ على 7

2) أُدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الإقليدية للعدد $5^n$ على 7

3) بيّن أنّ العدد $a^a+b^b+4$ يقبل القسمة على 7

4) نضع، من أجل كلّ عدد طبيعي $n$، $A_n=2021^n+2022^n+2023^n+2024^n$

– بيّن أنّ $A_n \equiv 1+5^n+6^n\,[7]$ ثم عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ حتى يكون $A_n+1$ مضاعفا للعدد 7

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

أجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير في كلّ حالة مما يلي:

1) من أجل كلّ عدد طبيعي $n$، $n(n^2-1)$ مضاعف للعدد 3

2) الدالة العددية $x \mapsto x^2+2x+x\ln x$ حلّ للمعادلة التفاضلية $y''=2+\dfrac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$

3) المستقيم ذو المعادلة $y=x+e$ مماس لمنحنى الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x+(x-2)e^x$

4) $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n=\ln\dfrac{ne^n}{n+1}$

عبارة المجموع $S_n$ حيث $S_n=v_1+v_2+\dots+v_n$ هي: $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}-\ln(n+1)$

### التمرين الثالث: (05 نقاط)

$(u_n)$ و $(v_n)$ المتتاليتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_1=2$

ومن أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $u_{n+1}=\dfrac{n}{2n+2}u_n-\dfrac{1}{n+1}$ و $v_n=n\,u_n+2$

1) أُحسب $u_2$ و $u_3$

2) أ– برهن أنّ المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$

ب– أُكتب $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج $u_n$ بدلالة $n$

**3)** أُحسب، بدلالة $n$، المجموع $S_n$ حيث $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

**4)** نضع من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ غير معدوم، $w_n = \dfrac{4n}{v_n - nu_n}$

أُحسب، بدلالة $n$ ، المجموع $S'_n$ حيث $S'_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

$f$ الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + (x-1)\ln x$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2\,cm$

**1)** أ– أُدرس حسب قيم العدد الحقيقي $x$ الموجب تماما إشارة كلٍّ من $\dfrac{x-1}{x}$ و $\ln x$

**ب**– اِستنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ الموجب تماما إشارة $\dfrac{x-1}{x} + \ln x$

**2)** أ– أُحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)$

**ب**– أُدرس اتّجاه تغيّر الدّالة $f$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

**3)** $h$ الدّالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $h(x) = x - 2 + \ln x$

أ– بيّن أنّ الدّالة $h$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

**ب**– برهن أنّ المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلاًّ وحيدا $\alpha$ حيث $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$ ثم بيّن أنّ $\ln(\alpha) = 2 - \alpha$

**جـ**– بيّن أنّ $y = \dfrac{-\alpha^2 + 3\alpha - 1}{\alpha}x$ معادلة لـ $(T)$ مماس $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة $\alpha$

**4)** أنشئ $(T)$ و $(C_f)$ على $[0;4]$ (نأخذ $\dfrac{-\alpha^2 + 3\alpha - 1}{\alpha} \simeq 0{,}8$)

**5)** أ– بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ موجب تماما، $f(x) - x = (x-1)(-1 + \ln x)$

**ب**– أُدرس حسب قيم العدد الحقيقي $x$ الموجب تماما إشارة $f(x) - x$

**6)** $K$ الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $K(x) = -\dfrac{3}{4}x^2 + 2x + \left(\dfrac{1}{2}x^2 - x\right)\ln x$

أ– بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ موجب تماما $K'(x) = f(x) - x$

**ب**– أُحسب مساحة حيز المستوي المحدد بـ $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $y = x$ ، $x = 1$ و $x = e$

**7)** $g$ الدّالة المعرّفة على $]-2;+\infty[$ بـ : $g(x) = (x+1)\ln(x+2)$ ، $(C_g)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

– بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ من $]-2;+\infty[$ ، $g(x) = f(x+2) - 1$

– استنتج أنّ $(C_g)$ صورة $(C_f)$ بانسحاب يطلب تعيين شعاعه. ( لا يُطلب إنشاء $(C_g)$)

انتهى الموضوع الأول

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: (04 نقاط)

نضع من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ : $a=5n+2$ ، $b=n+1$ ، $c=9n+2$

و $d=p\gcd(a;b)$ ، $d'=p\gcd(b;c)$

**1)** عيّن القيم الممكنة لكلّ من $d$ و $d'$ ثم استنتج $p\gcd(a;b;c)$

**2)** عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ حتى يكون العدد $b$ قاسما لـ $a$

**3)** نعتبر المعادلة: $(E)\cdots 17x-4y=29$ حيث $x$ و $y$ عددان صحيحان.

بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة $(E)$ فإنّ $x\equiv 1[4]$ ثم حل المعادلة $(E)$

**4)** عيّن الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة $(E)$ والتي تحقق $xy<279$

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كلّ حالة من الحالات التالية مع التبرير.

**1)** مجموعة حلول المعادلة $e^{(\ln x)^2-6}=x$ ذات المجهول الحقيقي $x$ في المجال $]0;+\infty[$ هي:

أ) $S=\{e^3\}$ ب) $S=\{-2;3\}$ جـ) $S=\{e^{-2};e^3\}$

**2)** باقي القسمة الإقليدية للعدد $9^{2023}$ على $7$ هو:

أ) $2$ ب) $3$ جـ) $5$

**3)** العدد الحقيقي $\int_0^{\ln 4043}\frac{1}{1+e^{-x}}\,dx$ يساوي :

أ) $2022$ ب) $\ln 2022$ جـ) $\ln 4043$

**4)** $F$ الدالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $F(x)=(x+2)\sqrt{x}$

$F$ دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ . عبارة الدالة $f$ هي :

أ) $f(x)=\frac{3x+2}{2x}$ ب) $f(x)=\frac{3x+2}{2x}\sqrt{x}$ جـ) $f(x)=\frac{2x+3}{2x}\sqrt{x}$

### التمرين الثالث: (05 نقاط)

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرّفة بحدها الأول $u_0$ حيث $u_0=0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي $n$، $u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n-2)$

**1)** برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n$، $u_n>-2$

**2)** أُدرس اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ ثم إستنتج أنّ $(u_n)$ متقاربة .

**3)** $(v_n)$ المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $v_n=\frac{1}{u_{n+1}-u_n}$

أ- برهن أنّ المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $2$ ثم أُكتب $v_n$ بدلالة $n$

ب- أُحسب، بدلالة $n$، المجموع $S_n$ حيث $S_n=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+\cdots+\frac{1}{v_n}$

4) أ- بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n$، $u_n=2\left(\frac{1}{2^n}-1\right)$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

ب- أُحسب بدلالة $n$ المجموع $S'_n$ حيث $S'_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

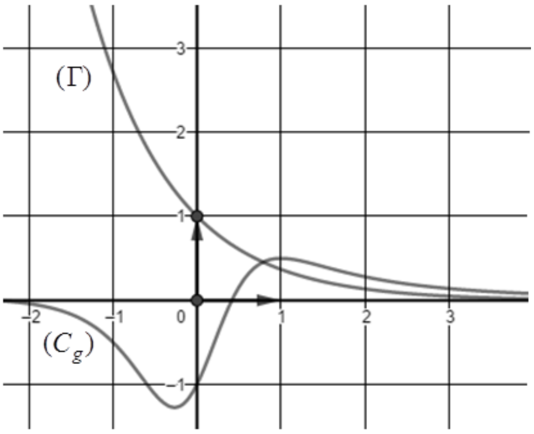
I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

$(\Gamma)$ التمثيل البياني للدالة : $x\mapsto e^{-x}$ و $(C_g)$ التمثيل

البياني للدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=\frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$

$\alpha$ فاصلة نقطة تقاطع $(C_g)$ و $(\Gamma)$

(كما هو مبيّن في الشكل المقابل)




1) بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)-e^{-x}$

2) تحقّق حسابيا أنّ $0,7<\alpha<0,8$

II) $f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{-x}-\frac{x+1}{x^2+1}$، $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس.

1) أُحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ثم أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ وفسّر النتيجة بيانيا .

2) أ- بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي $x$، $f'(x)=g(x)-e^{-x}$

ب- اِستنتج اتجاه تغير الدالة $f$ وشكل جدول تغيّراتها.

3) أ- أُحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-e^{-x}\right]$ وفسّر النتيجة بيانيا.

ب- أُدرس الوضعية النسبية للمنحنيين $\left(C_f\right)$ و $(\Gamma)$

4) أ- أُكتب معادلة لـ $(T)$ مماس $\left(C_f\right)$ في النقطة ذات الفاصلة 0

ب- أنشئ $(T)$ و $(\Gamma)$ و $\left(C_f\right)$ (نأخذ $f(\alpha)\simeq-0.6$ )

جـ- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$، عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)-m=0$

5) علما أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ من المجال $[-1;0]$ : $\frac{1}{2}x+1\le\frac{1}{x^2+1}\le\frac{5}{4(1-x)}$

أ- عيّن حصرا للعدد $I$ حيث : $I=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2+1}$

ب- أُحسب $J$ حيث : $J=\int_{-1}^{0}\frac{x}{x^2+1}dx$ ثم استنتج حصرا لـ $A$، مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنيين $(\Gamma)$ و $\left(C_f\right)$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=-1$ و $x=0$

انتهى الموضوع الثاني