# تصحيح الاختبار الأول لقسم 3 تقني رياضي 2018/2017

## التمرين الأول : (09 نقط )

1) أ) اتمام الجدول التالي، تدور النتائج الى $10^{-2}$ .....(01ن)

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 2 | 3.14 | 2.18 | 1.19 | 0.61 | 0.31 | 0.16 | 0.08 | 0.04 |

ب) يبدو أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة ابتداءا من الحد الثاني .....(0.5ن)

2) أ) برهان بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $u_n \geq \frac{15}{4}\times(0.5)^n$ .....(01.5ن)

- نتأكد من صحة الخاصية من أجل $n=1$: $u_1 = 3.4$ و $3.4 \geq \frac{15}{8}$ . ( $\frac{15}{8} \approx 1.875$ )

اذن الخاصية صحيحة من اجل $n=1$ .

- نفرض صحة الخاصية من أجل $n$ حيث $n \geq 1$ أي $u_n \geq \frac{15}{4}\times(0.5)^n$ ونبرهن على صحة الخاصية من أجل $(n+1)$ أي : $u_{n+1} \geq \frac{15}{4}\times(0.5)^{n+1}$ .

لدينا : $u_n \geq \frac{15}{4}\times(0.5)^n$ اذن $\frac{1}{5}u_n \geq \frac{3}{4}\times(0.5)^n$ وبالتالي

$\frac{1}{5}u_n + 3(0.5)^n \geq \frac{3}{4}\times(0.5)^n + 3(0.5)^n$ يعني $\frac{1}{5}u_n + 3(0.5)^n \geq \frac{15}{4}\times(0.5)^n$ أي

$u_{n+1} \geq \frac{15}{4}\times(0.5)^n$ .

نعلم انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم ، $(0.5)^n > (0.5)^{n+1}$ .

وبالتالي : $u_{n+1} \geq \frac{15}{4}\times(0.5)^{n+1}$. اذن الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$ .

وعليه : من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $u_n \geq \frac{15}{4}\times(0.5)^n$ .

ب) استنتاج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ .....(01.5ن)

من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + 3(0.5)^n - u_n = -\frac{4}{5}u_n + 3(0.5)^n = \frac{4}{5}\left(-u_n + \frac{15}{4}\times(0.5)^n\right)$$

من الاجابة 2) أ) من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $u_n \geq \frac{15}{4}\times(0.5)^n$ .

اذن من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $u_{n+1} - u_n \leq 0$

اذن المتتالية $(u_n)$ متتالية متناقصة .

ج) استنتاج أن $(u_n)$ متتالية متقاربة .....(0.5ن)

بما أن المتتالية متناقصة ( الاجابة 1) ب) ) ومحدودة من الاسفل، من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $u_n \geq \frac{15}{4}\times(0.5)^n > 0$ (الاجابة 1 ) أ) ) فهي متقاربة .

3) أ) نبين أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .....(01ن)

من اجل كل عدد طبيعي $n$ ،

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 10\times(0.5)^{n+1}$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3(0.5)^n - 10(0.5)^n \times (0.5)$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3(0.5)^n - 5(0.5)^n$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n - 2(0.5)^n$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{5}\left(u_n - 10(0.5)^n\right)$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$$

اذن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$ وحدها الاول $v_0$ حيث

$v_0 = u_0 - 10(0.5)^0 = 2 - 10 = -8$ .....(0.5ن)

ب) كتابة $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج $u_n$ بدلالة $n$ .

$v_n = v_0 q^n = -8\left(\frac{1}{5}\right)^n$ حيث $n$ عدد طبيعي .....(0.5ن)

لدينا : $v_n = u_n - 10\times(0.5)^n$ وبالتالي $u_n = v_n + 10\times(0.5)^n$ اذن $u_n = -8\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times(0.5)^n$ من اجل كل عدد طبيعي $n$ .....(0.5ن)

ج) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .....(0.5ن)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[-8\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10(0.5)^n\right] = 0$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(0.5)^n = 0$ حيث $\frac{1}{5}$ و 0.5 عنصران من المجال $]-1;1[$ .

4) حساب المجموع $S_n$ حيث : $S_n = u_0 + u_1 + ..... + u_n$ .....(01ن)

$$S_n = u_0 + u_1 + ..... + u_n$$
$$S_n = v_0 + 10(0.5)^0 + v_1 + 10(0.5)^1 + ..... + v_n + 10(0.5)^n$$
$$S_n = v_0 + v_1 + ..... + v_n + 10\left[(0.5)^0 + (0.5)^1 + ..... + (0.5)^n\right]$$
$$S_n = -8\left(\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{5} - 1}\right) + 10\left[\frac{(0.5)^{n+1} - 1}{0.5 - 1}\right]$$
$$S_n = 10\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} - 1\right] - 20\left[(0.5)^{n+1} - 1\right]$$
$$S_n = 10\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} - 20(0.5)^{n+1} + 10$$

## التمرين الثاني : (11نقطة)

1) حساب $\lim_{n\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{n\to-\infty} f(x)$ .....(0.5ن+0.5ن)

$\lim_{n\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{n\to-\infty} f(x) = +\infty$ .

2) أ) نبين انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x) = \left(\frac{4e^{2x} - 1}{4e^{2x} + 1}\right)$ .....(01ن)

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\Re$ :

$$f'(x) = \frac{e^x - \frac{e^{-x}}{4}}{e^x + \frac{e^{-x}}{4}}$$
$$f'(x) = \frac{\frac{4e^x - e^{-x}}{4}}{\frac{4e^x + e^{-x}}{4}}$$
$$f'(x) = \frac{4e^x - e^{-x}}{4e^x + e^{-x}}$$
$$f'(x) = \frac{e^{-x}\left(4e^{2x} - 1\right)}{e^{-x}\left(4e^{2x} + 1\right)}$$
$$f'(x) = \frac{4e^{2x} - 1}{4e^{2x} + 1}$$

ب) دراسة اشارة $f'(x)$ على $\Re$ ثم انجاز جدول تغيرات الدالة $f$ .....(01ن)

$f'(x) = 0$ يعني $4e^{2x} - 1 = 0$ يعني $(2e^x - 1)(2e^x + 1) = 0$ يعني $2e^x - 1 = 0$ يعني

$x = -\ln 2$ .

| $x$ | $-\infty$ | $-ln2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

الدالة متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-2\ln 2]$ ومتزايدة تماما على المجال $[-2\ln 2;+\infty[$ .

جدول التغيرات :.....(0.5ن)

| $x$ | $-\infty$ | | $-ln2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(-ln2)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$$f(-\ln 2)=0$$

3) أ) نبين ان المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب للمنحنى $(Cf)$ بجوار $+\infty$

$$f(x)-y=\ln\left(e^{x}+\frac{e^{-x}}{4}\right)-x$$

$$f(x)-x=\ln\left(e^{x}+\frac{e^{-x}}{4}\right)-\ln e^{x}$$

$$f(x)-x=\ln\left(\frac{e^{x}}{e^{x}}+\frac{e^{-x}}{4e^{x}}\right)$$

$$f(x)-x=\ln\left(1+\frac{e^{-2x}}{4}\right)$$

اذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}[f(x)-x]=\ln 1=0$ .....(01ن)

وبالتالي : المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب للمنحنى $(Cf)$ بجوار $+\infty$

ب) نبين انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f(x)=-x-2\ln 2+\ln(4e^{2x}+1)$ .

من اجل كل عدد حقيقي $x$ :

$$f(x)=\ln\left(e^{x}+\frac{e^{-x}}{4}\right)$$
$$f(x)=\ln\left(\frac{4e^{x}+e^{-x}}{4}\right)$$
$$f(x)=\ln\left(4e^{x}+e^{-x}\right)-\ln 4$$ (ن01.5).....
$$f(x)=\ln e^{-x}\left(4e^{2x}+1\right)-\ln 2^{2}$$
$$f(x)=\ln e^{-x}+\ln\left(4e^{2x}+1\right)-2\ln 2$$
$$f(x)=-x-2\ln 2+\ln\left(4e^{2x}+1\right)$$

ج) استنتاج ان المنحنى $(Cf)$ يقبل مستقيما مقاربا اخر $(\Delta')$ بجوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(4e^{2x}+1\right)\right]=\ln 1=0$ فان المنحنى $(Cf)$ يقبل مستقيما مقاربا اخر $(\Delta')$ بجوار $-\infty$ معادلة له $y=-x-2\ln 2$ .....(ن01)

4)تعين نقط تقاطع المنحنى $(Cf)$مع محور التراتيب ثم رسم المنحنى $(Cf)$ .....(ن01)

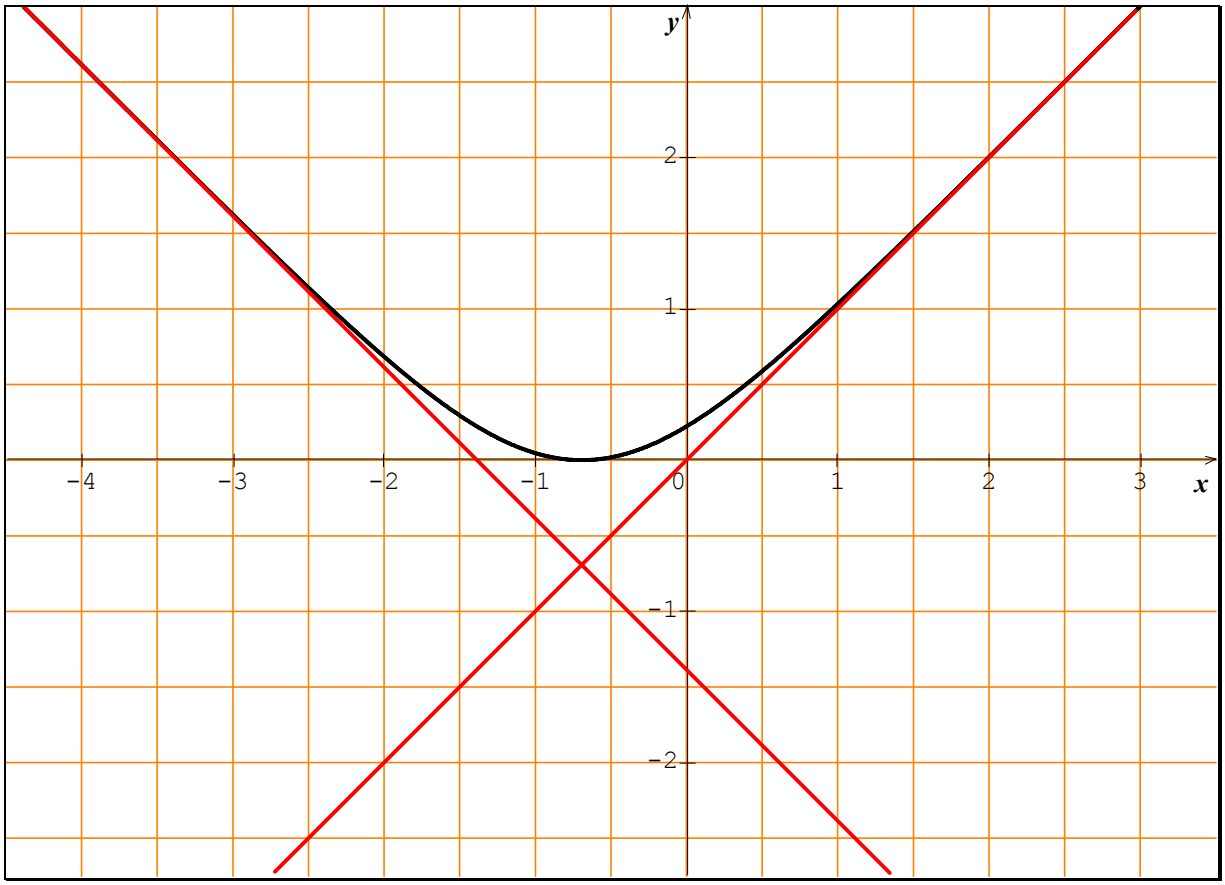
$(Cf)$يقطع محور التراتيب يعني $f(x)=0$ يعني $\ln\left(e^{x}+\frac{e^{-x}}{4}\right)=0=\ln 1$ يعني

$\left(e^{x}+\frac{e^{-x}}{4}\right)=1$ يعني $4e^{x}+e^{-x}=4$ يعني $4e^{2x}+1=4e^{x}$ يعني $4e^{2x}-4e^{x}+1=0$ .

يعني $\left(2e^{x}-1\right)^{2}=0$ يعني $\left(2e^{x}-1\right)=0$ يعني $x=-\ln 2$

اذن : $(Cf)\cap(yy')=\{A(-\ln 2;0)\}$

رسم المنحنى $(Cf)$ .....(ن01.5)




**5)** المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد واشارة حلول المعادلة $(1)$ .....**(01ن)**

حلول المعادلة $(1)$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى $(Cf)$ مع المستقيم ذو معادلة $y = m - 2$

- اذاكان : $m - 2 < 0$ أي $m < 2$ المعادلة لا تقبل حلولا .
- اذا كان : $m - 2 = 0$ أي $m = 2$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا سالبا .
- اذا كان : $m - 2 < -\ln 2$ أي $m < 2 - \ln 2$ المعادلة تقبل حلين متمايزين سالبين .
- اذا كان : $m - 2 = -\ln 2$ أي $m = 2 - \ln 2$ المعادلة تقبل حلين متمايزين أحدهما سالب والاخر معدوم .
- اذا كان : $m - 2 > -\ln 2$ أي $m > 2 - \ln 2$ المعادلة تقبل حلين متمايزين أحدهما موجب والاخر سالب .