

$$y'+3y=0 \dots\dots\dots(E') \quad \text{و} \quad y'+3y=3x^2-4x+4 \dots\dots\dots(E)$$

(1) حل المعادلة (E') $y'+3y=0$ هو $y=Ce^{-3x}$ حيث C ثابت حقيقي .

(2) تعيين الأعداد الحقيقية $a ; b ; c$ حتى يكون $P(x)=ax^2+bx+c$ حل للمعادلة (E) . أي لدينا

$$P'(x)=2ax+b \quad \text{و منه} \quad p'(x)+3p(x)=3ax^2+(2a+3b)x+3c+b \quad \text{بالمطابقة مع الطرف الثاني لـ}$$

$$(E) \text{ نجد أن } \begin{cases} 3a=3 \\ 2a+3b=-4 \\ 3c+b=4 \end{cases} \quad \text{و منه} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases} \quad \text{و منه} \quad P(x)=x^2-2x+2$$

(3) إثبات ان g حل للمعادلة (E') إذا وافقت إذا كانت الدالة f حيث $f(x)=g(x)+P(x)$ هي حل للمعادلة (E)

g حل للمعادلة (E') يعني ان $g'(x)+3g(x)=0$ و $p'(x)+3p(x)=3x^2-4x+4$ بالجمع و منه

$$f'(x)+3f(x)=3x^2-4x+4 \quad \text{و منه} \quad p'(x)+g'(x)+3p(x)+3g(x)=3x^2-4x+4$$

إذن f حل للمعادلة (E)(1)

f حل للمعادلة (E) يعني $f'(x)+3f(x)=3x^2-4x+4$ بالتعويض نجد أن

$$[p(x)+g(x)]+3[p(x)+3g(x)]=3x^2-4x+4 \quad \text{و منه}$$

$$p'(x)+3p(x)=3x^2-4x+4 \quad \text{و بما أن} \quad p'(x)+g'(x)+3p(x)+3g(x)=3x^2-4x+4$$

$$g'(x)+3g(x)=0 \quad \text{و منه} \quad g'(x)+3g(x)+3x^2-4x+4=3x^2-4x+4$$

أي ان g حل للمعادلة (E')(2)

من (1) و (2) نستنتج انها صحيحة .

(4) تعيين حلول المعادلة (E) هي f حيث $f(x)=g(x)+P(x)=Ce^{-3x}+x^2-2x+2$

$$f(0)=\frac{9}{4} \quad \text{يعني ان} \quad C+2=\frac{9}{4} \quad \text{و منه} \quad C=\frac{1}{4} \quad \text{أي ان} \quad f(x)=\frac{1}{4}e^{-3x}+x^2-2x+2$$

التمرين الثاني :

n عدد طبيعي و a و b عدنان طبيعيان حيث $a=n^3+5n^2+7n+24$ و $b=n+3$

(1) البرهان أن $PGCD(a;b)=PGCD(b;21)$ لدينا $a=n^3+5n^2+7n+24$ و نقسمها إقليديا على b نجد

$$a=(n+3)(n^2+2n+1)+21 \quad \text{و منه بما ان} \quad PGCD(a;b) \quad \text{قاسم للعددين} \quad a \quad \text{و} \quad b \quad \text{فهو قاسم للعدد}$$

$$a-b(n^2+2n+1) \quad \text{أي قاسم للعدد} \quad 21 \quad \text{و منه} \quad PGCD(a;b) \quad \text{قاسم مشترك للعددين} \quad 21 \quad \text{و} \quad b \quad \text{و منه}$$

$$PGCD(a;b) \quad \text{قاسم للعدد} \quad PGCD(b;21) \quad \text{.....(1)}$$

$PGCD(b; 21)$ قاسم مشترك للعددين 21 و b فهو قاسم للعدد $b(n^2 + 2n + 1) + 21$ أي قاسم للعدد a و منه
 $PGCD(b; 21)$ قاسم مشترك للعددين a و b فهو قاسم للعدد $PGCD(a; b)$ أي ان $PGCD(b; 21)$ قاسم
 للعدد $PGCD(a; b)$ (2)

من (1) و (2) نجد أن $PGCD(a; b) = PGCD(b; 21)$

(2) استنتاج القيم الممكنة للعدد $PGCD(a; b)$ من ما سبق $PGCD(a; b) = PGCD(b; 21)$ القيم الممكنة للعدد
 $PGCD(a; b)$ هي قواسم الطبيعية 21 و هي $\{1; 3; 7; 21\}$

(3) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $PGCD(a; b) = 7$ أي ان $PGCD(b; 21) = 7$ أي ان $n + 3$ من

مضاعفات 7 و ليست من مضاعفات 21 أي ان $k \in \mathbb{N}^*$: أو $n + 3 = 3k + 1$
 و k عدد طبيعي غير معدوم و منه $n + 3 = 3k + 2$

$$\begin{cases} n = 3k - 2 \\ \text{أو} \\ n = 3k - 1 \end{cases} : k \in \mathbb{N}^*$$

(4) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون الكسر $\frac{n^3 + 5n^2 + 7n + 24}{n + 3}$ غير قابل للاختزال أي ان العددين a و b أوليان

فيما بينهما $PGCD(a; b) = PGCD(b; 21) = 1$ أي ان العددين $n + 3$ و 21 أوليان فيما بينهما إذن

$n + 3 = 21k' + 1$: $k' \in \mathbb{N}^*$ أو $n + 3 = 21k' + 2$: $k' \in \mathbb{N}^*$ أو $n + 3 = 21k' + 4$: $k' \in \mathbb{N}$ أو
 $n + 3 = 21k' + 5$: $k' \in \mathbb{N}$ أو $n + 3 = 21k' + 8$: $k' \in \mathbb{N}$ أو $n + 3 = 21k' + 10$: $k' \in \mathbb{N}$ أو
 $n + 3 = 21k' + 11$: $k' \in \mathbb{N}$ أو $n + 3 = 21k' + 13$: $k' \in \mathbb{N}$ أو $n + 3 = 21k' + 17$: $k' \in \mathbb{N}$ أو

$n + 3 = 21k' + 19$: $k' \in \mathbb{N}$ أو $n + 3 = 21k' + 20$: $k' \in \mathbb{N}$ (الأعداد المضافة أولية مع 21 في كل مرة)

و منه $n = 21k' - 2$: $k' \in \mathbb{N}^*$ أو $n = 21k' - 1$: $k' \in \mathbb{N}^*$ أو $n = 21k' + 1$: $k' \in \mathbb{N}$ أو

$n = 21k' + 2$: $k' \in \mathbb{N}$ أو $n = 21k' + 5$: $k' \in \mathbb{N}$ أو $n = 21k' + 7$: $k' \in \mathbb{N}$ أو

$n = 21k' + 8$: $k' \in \mathbb{N}$ أو $n = 21k' + 10$: $k' \in \mathbb{N}$ أو $n = 21k' + 14$: $k' \in \mathbb{N}$ أو

$n = 21k' + 16$: $k' \in \mathbb{N}$ أو $n = 21k' + 17$: $k' \in \mathbb{N}$

التمرين الثالث :

نعتبر الدالة h المعرفة على $R - \{-2\}$ بـ $h(x) = ax + b + \frac{c}{2(x+2)}$ حيث $a; b; c$ أعداد حقيقية و (C_h) التمثيل

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	-1	$+\infty$	1	$+\infty$

البياني لدالة h في المستوي المنسوب الى المعلم

المتعامد المتجانس

و جدول تغيراتها هو

(1) النعين باستعمال جدول التغيرات الدالة h الأعداد الحقيقية $a ; b ; c$. لدينا $\begin{cases} h(-1)=1 \\ h(-3)=-1 \end{cases}$ أي ان

$$\begin{cases} -a+b+\frac{c}{2}=1 \\ -3a+b-\frac{c}{2}=-1 \end{cases} \quad \text{و منه بالجمع نجد } -4a+2b=0 \quad \text{أي ان } b=2a \dots (1) \quad \text{بالتعويض في الجملة نجد}$$

$$c=-2a+2 \dots (2)$$

ولدينا $h'(-1)=0$ و $h'(x)=a-\frac{c}{2(x+2)^2}$ أي ان $a-\frac{c}{2}=0$ و منه $c=2a \dots (3)$ من (2) و (3) نجد

$$a=\frac{1}{2} \quad \text{بالتعويض في (1) و (3) نجد } c=1 \quad \text{و } b=1$$

$$h(x)=\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2(x+2)} \quad \text{نفرض أن (2)}$$

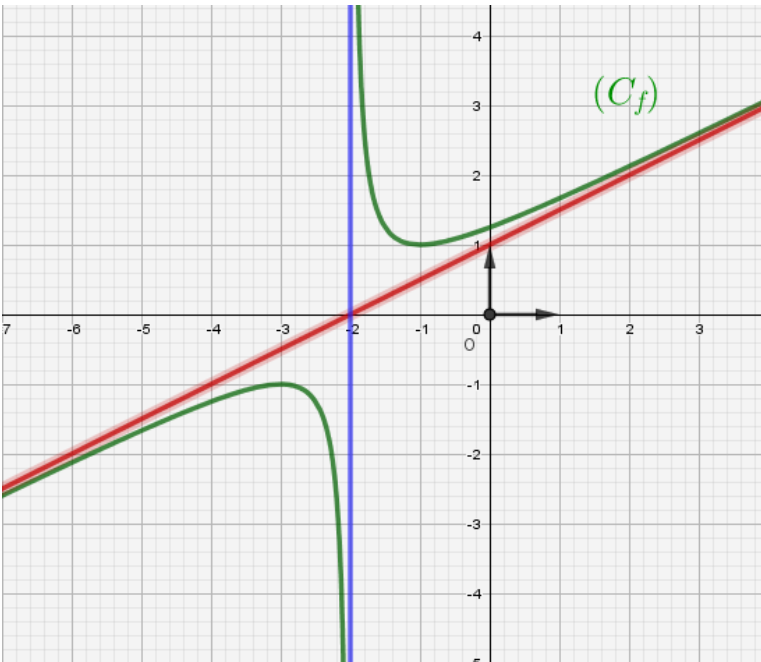
أ- تعيين معادلتى المستقيمان المقاربان للمنحنى (C_h) : $y=\frac{1}{2}x+1$ و $x=-2$

ب- حساب $h(-4-x)+h(x)$:

$$h(-4-x)+h(x)=\frac{1}{2}(-4-x)+1+\frac{1}{2(-4-x+2)}+\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2(x+2)}$$

$$h(-4-x)+h(x)=0 \quad \text{و منه } h(-4-x)+h(x)=\frac{1}{2}(-4)+\frac{1}{2(-2-x)}+2+\frac{1}{2(x+2)}$$

التفسير البياني : (C_h) يقبل مركز تناظر هو النقطة $A(-2;0)$



ج- أنشئ المستقيمان المقاربان والمنحنى (C_h)

(3) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول

المعادلة : $h(x)=m(x+2)$ حلولها هي إيجاد فواصل نقط

تقاطع (C_h) مع المستقيم (Δ_m) الذي معادلته

$$y=m(x+2)$$

لما $m \in \left] -\infty ; \frac{1}{2} \right[$ نلاحظ ان (C_h) و (Δ_m) لا

يتقاطعان ومنه المعادلة ليس لها حلول.

لما $m \in \left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[$ نلاحظ ان (C_h) و (Δ_m) يتقاطعان

في نقطتان ومنه للمعادلة حلين

$$(4) \text{ نعتبر الدالة } k \text{ حيث } k(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 4x + 5}{2x + 4}\right)$$

أ- تبين أن $k(x) = \ln(h(x))$ في مجال يطلب تعيينه تكون الدالة k معرفة على المجال $]-2; +\infty[$ و الذي تكون فيه h موجبة .

ب- باستعمال جدول تغيرات h استنتاج اتجاه تغير الدالة k لدينا $k'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$ و منه للدالتين k و h نفس اتجاه التغير

على المجال $]-2; +\infty[$ و منه k متزايدة على المجال $]-1; +\infty[$ و متناقصة على المجال

ج- حساب نهايات الدالة k عند طرفي مجموعة تعريفها باستعمال نهاية دالة مركبة نجد أن بوضع $h(x) = t$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} k(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) = +\infty$$

تشكيل جدول تغيراتها

x	-2	-1	$+\infty$
$k'(x)$		0	$+$
$k(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

(5) $x \in]-2; +\infty[$: استنتاج حلول المتراجحة

$$k(x) > \ln(2) \quad \text{و يكافئ ان}$$

$$\ln(h(x)) > \ln(2)$$

$$\text{أي ان } h(x) > 2 \text{ معناه } \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2(x+2)} > 2 \text{ أي ان } \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{2(x+2)} > 0 \text{ بتوحيد المقامات نجد}$$

$$\frac{x^2 - 3}{2(x+2)} > 0 \text{ بما ان } x \in]-2; +\infty[\text{ الكسر السابق اشارته من اشارة البسط أي ان } x^2 - 3 > 0 \text{ و هي محققة من}$$

$$\text{أجل } x \in]-2; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[\text{ و منه حلول المتراجحة هي } S =]-2; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$$

التمرين الرابع (7 نقاط) .

الجزء الأول : g دالة معرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية R بـ $g(x) = (2-x)e^x - 2$

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\text{النهايات : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x)e^x = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(2-x)e^x - 2] = -2$$

المشتقة : $g'(x) = (1-x)e^x$ اشارتها من إشارة $(1-x)$ و هي موجبة على المجال $]-\infty; 1[$ و سالبة على المجال

$]1; +\infty[$ و منه g متزايدة على المجال $]-\infty; 1[$ و متناقصة على المجال $]1; +\infty[$

تشكيل جدول تغيراتها

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	$-$
$g(x)$	-2	$e-2$	$-\infty$

(2) تبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين إحداها معدوم و الآخر α حيث $1,59 < \alpha < 1,60$ لدينا $g(0)=0$ و بما ان $g(1,6)=-0,02$ و $g(1,59)=0,01$ بما الدالة g مستمرة و متناقصة على المجال $[1; +\infty[$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين إحداها معدوم و الآخر α حيث $1,59 < \alpha < 1,60$.

استنتاج إشارة $g(x)$ من جدول تغيراتها نستنتج اشارتها

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
اشارة $g(x)$	—	0	+	—

الجزء الثاني :

f دالة عددية معرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية R كما يلي $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} : x \neq 0$ و $f(0) = 0$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم

متعامد و متجانس

(1) اثبات أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 : نحسب نهاية النسبة $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{e^h - 1} = 1 = f'(0)$ منه محققة .

كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي $y = x$.

(2) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = -\infty$: لان $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x - 1] = -1$.

(3) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x فإن $f(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ لدينا $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$ بضرب المقام و البسط

في e^{-x} نجد $f(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ و هو المطلوب

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}} = 0$: لان $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} [1 - e^{-x}] = 1$

تفسير النتيجة هندسيا هو ان حامل محور الفواصل هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f)

(4) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x فإن $f'(x) = \frac{xg(x)}{(e^x - 1)^2}$: نحسب المشتقة

$$f'(x) = \frac{2x(e^x - 1) - x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{x[(2 - x)e^x - 2]}{(e^x - 1)^2} = \frac{xg(x)}{(e^x - 1)^2}$$

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
اشارة $xg(x)$	+	0	+	—

استنتاج اتجاه تغير الدالة f و منه f متزايدة على المجال

$]-\infty; \alpha[$ و متناقصة على المجال $[\alpha; +\infty[$

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$-$
$f(x)$		0	$f(\alpha)$	0

(5) ليكن (C) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto -x^2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x^2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^x}{e^x - 1} = 0 \quad \text{أ- حساب } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x^2]$$

و منه (C) و (C_f) متقاربان جهة $-\infty$

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (C) لدينا $[f(x) + x^2] = \frac{x^2 e^x}{e^x - 1}$ اشارته من إشارة المقام و

ينعدم عند 0 و منه (C_f) يقع فوق (C) على المجال $]0; +\infty[$ و يتقاطعان في 0 و (C_f) يقع تحت

(C) على المجال $]-\infty; 0[$.

أرسم (T) و (C_f) و (C):

