تصحيح الاختبار الأول | الشعبة : 3 تقني رياضي | السنة الدراسية : 2014 – 2015

الإجابة	التنقيط
التمرين الأول : ☜ لدينا : $(E): y'+2y=3x^2-1$	08 نقاط
1- تبيان أنه توجد دالة وحيدة P كثير حدود من الدرجة الثانية حل المعادلة (E) : ☜ نفرض أنّ $P(x)=ax^2+bx+c$ P حل للمعادلة (E) يعني $P'(x)+2P(x)=3x^2-1$ ولدينا : $P'(x)=2ax+b$ إذن : $2ax+b+2ax^2+2bx+2c=3x^2-1$ أي $2ax^2+(2b+2a)x+b+2c=3x^2-1$ بالمطابقة نجد : $\begin{cases}2a=3\\2a+2b=0\\b+2c=-1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\b=-a=-\frac{3}{2}\\2c=-1-b=-1+\frac{3}{2}\end{cases}$ أي $\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\b=-a=-\frac{3}{2}\\2c=\frac{1}{2}\end{cases}$ أي $\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\b=-\frac{3}{2}\\c=\frac{1}{4}\end{cases}$ وبالتالي $P(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$ حل للمعادلة (E)	02
2- تعيين في $\mathbb{R}$ مجموعة حلول المعادلة التفاضلية: $(E'): y'+2y=0$: $y'+2y=0$ تكافئ $y'=-2y$ مجموعة حلول المعادلة (E') من الشكل $y=\lambda e^{-2x}$ حيث λ عدد حقيقي .	01
3- البرهان أنّ دالة g هي حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة $(g-p)$ هي حل للمعادلة (E'): ☜ إذا كانت g هي حل للمعادلة (E) فإنّ $g'(x)+2g(x)=3x^2-1$ ومنه $g'(x)+2g(x)=P'(x)+2P(x)$ لأنّ P حل للمعادلة (E) أي $g'(x)+2g(x)-P'(x)-2P(x)=0$ وبالتالي : $g'(x)-P'(x)+2g(x)-2P(x)=0$ أي $(g'-P')(x)+2(g-P)(x)=0$ **إذن $(g-p)$ حل للمعادلة (E')** ☜ إذا كانت $(g-p)$ حل للمعادلة (E') فإنّ $(g'-P')(x)+2(g-P)(x)=0$ ومنه $g'(x)-P'(x)+2g(x)-2P(x)=0$ أي $g'(x)+2g(x)=P'(x)+2P(x)$ وبالتالي : $g'(x)+2g(x)=3x^2-1$ **إذن g هي حل للمعادلة (E)**	01 + 01
4- استنتاج مجموعة حلول المعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{R}$: لدينا : $(g-p)(x)=\lambda e^{-2x}$ لأنّ $(g-p)$ حل للمعادلة (E') ومنه : $g(x)=\lambda e^{-2x}+P(x)=\lambda e^{-2x}+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$ أي $g(x)=\lambda e^{-2x}+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4},(\lambda\in\mathbb{R})$	01.5
5- تعيين الحل g للمعادلة (E) و الذي يأخذ القيمة $\frac{9}{4}$ من أجل القيمة 0 للمتغير:	

01.5	• لدينا : $g(x)=\lambda e^{-2x}+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4},(\lambda\in\mathbb{R})$ $g(0)=\frac{9}{4}$ معناه $\lambda e^{-2(0)}+\frac{3}{2}(0)^2-\frac{3}{2}(0)+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$ ومنه $\lambda=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=\frac{9-1}{4}=2$ أي $\lambda=2$ ومنه $g(x)=2e^{-2x}+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$
12 نقطة	التمرين الثاني:
	.I لدينا : $g(x)=x^2-1-2\ln(x)$ $D_g=]0;+\infty[$
0.25 + 0.25	**1) دراسة تغيرات الدالة g :** • حساب النهايات : $\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}(x^2-1-2\ln(x))=+\infty$ $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2-1-2\ln(x))=\lim_{x\to+\infty}x\left(x-\frac{1}{x}-2\frac{\ln(x)}{x}\right)=+\infty$
0.75	• **حساب المشتقة :** $g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$ أي $g'(x)=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$
0.5	• **دراسة إشارة المشتقة :** إشارة المشتقة من نفس إشارة $2(x-1)(x+1)$ <table><tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$2(x-1)(x+1)$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td>‖</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr></table>
0.5	• **جدول تغيرات الدالة g :** <table><tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td>‖</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>‖</td><td>$+\infty \searrow$</td><td>0</td><td>$\nearrow$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>
0.5	**2) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:** <table><tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>‖</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr></table> إذن من أجل $x\in]0;+\infty[$ لدينا : $g(x)\geq0$
	.II لدينا : $f(x)=x+\frac{1-(\ln x)^2}{x}$ $D_f=]0;+\infty[$
0.25 + 0.25	-1 حساب $\lim_{x\to0^+}f(x)$: $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x+\frac{1-(\ln x)^2}{x}\right)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to0^+}\left(-(\ln x)^2\right)=-\infty$ - التفسير الهندسي : $x=0$ مستقيم مقارب أفقي للمنحنى (C_f)
	-2 البرهان أنّ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$: • نضع : $\sqrt{x}=t$ ومنه $x=t^2$ عندما $x\to+\infty$ فإنّ $t\to+\infty$

01

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{(\ln t^2)^2}{t^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{(2\ln t)^2}{t^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{4(\ln t)^2}{t^2}=4\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2=0$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ لأنّ $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$

0.5

- **حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1-(\ln x)^2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x}-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)=+\infty$$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

01

3- أ) تبيان أنّ : $f'(x)=\frac{g(x)+(\ln x)^2}{x^2}$ **من أجل كل عدد حقيقي من المجال** $]0;+\infty[$ **:**

- لدينا : $f'(x)=1+\frac{-2\ln x\times\frac{1}{x}\times x-\left(1-(\ln x)^2\right)}{x^2}=1+\frac{-2\ln x-1+(\ln x)^2}{x^2}$

أي $f'(x)=\frac{x^2-2\ln x-1+(\ln x)^2}{x^2}=\frac{g(x)+(\ln x)^2}{x^2}$ ومنه

$$f'(x)=\frac{g(x)+(\ln x)^2}{x^2}$$

01

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

* دراسة إشارة المشتقة : من نفس إشارة $g(x)+(\ln x)^2$

x	0		1	$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$+$
$(\ln x)^2$	‖	$+$	0	$+$
$g(x)+(\ln x)^2$	‖	$+$	0	$+$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$

0.5

- **جدول تغيرات الدالة** f :

x	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	**2**	↗ $+\infty$

0.5

4- أ) تبيان أنّ المستقيم (Δ) **ذي المعادلة** $y=x$ **مقارب مائل للمنحنى** (C_f) **عند** $+\infty$ **:**

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1-(\ln x)^2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)=0$$

ومنه (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) **بالنسبة إلى** (Δ)**:**

☜ ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

- لدينا : $f(x)-y=x+\frac{1-(\ln x)^2}{x}-x=\frac{1-(\ln x)^2}{x}$

$f(x)-y=0$ يعني $\dfrac{1-(\ln x)^2}{x}=0$

ومنه $1-(\ln x)^2=0$ و $x\neq 0$ أي $(\ln x)^2=1$

- إما $\ln x=1$ ومنه $x=e$ (مقبول لانَ $e\in\,]0;+\infty[$)
- أو $\ln x=-1$ ومنه $x=e^{-1}$ (مقبول لانَ $e^{-1}\in\,]0;+\infty[$)

0.5

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$1+\ln x$	‖	$-$	0	$+$	¦	$+$	
$1-\ln x$	‖	$+$	¦	$+$	0	$-$	
$1-(\ln x)^2$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	‖	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	

0.75

ب) تبيان أنَ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $0.3<\alpha<0.4$:

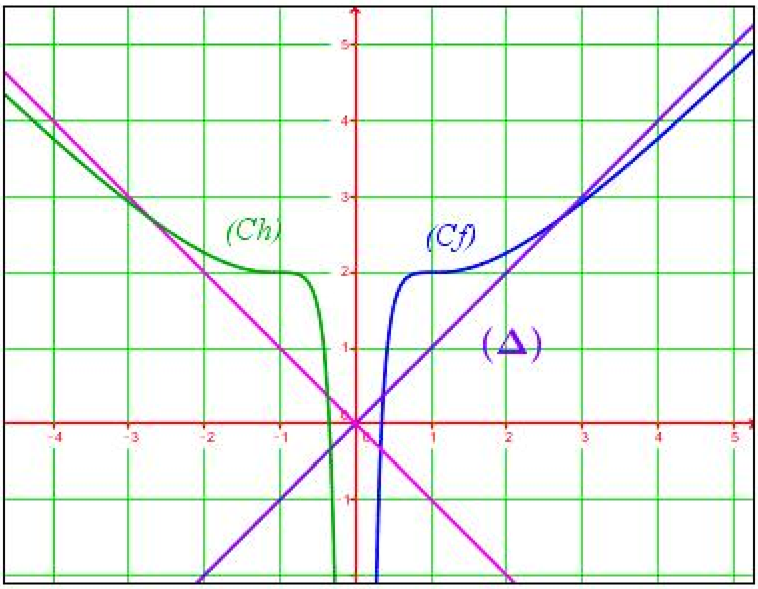
الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0.3;0.4]$ ولدينا :

$f(0.3)=-0.2$ و $f(0.4)=0.08$ أي $f(0.3)\times f(0.4)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $0.3<\alpha<0.4$

0.75

ج) الرسم :



01+01

5- لدينا : $h(x)=f(-x)$ $\qquad D_h=\,]-\infty;0[$

- **كيفية رسم المنحنى (C_h) باستعمال المنحنى (C_f):**

لدينا : $h(x)=f(-x)$ يعني أنَ (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور التراتيب .

0.25

✌بالتوفيق في البكالوريا جوان 2015 ❀