التصحيح المفصل للاختبار الاول في مادة الرياضيات شعبة الرياضيات

التمرين الاول :

$$y'+3y=3x^2-4x+4 \;............(E) \quad \text{و} \quad y'+3y=0 \;............(E')$$

1) حل المعادلة $y'+3y=0 \;............(E')$ هو $y=Ce^{-3x}$ حيث C ثابت حقيقي .

2) تعيين الأعداد الحقيقية $a\,;\,b\,;\,c$ حتى يكون $P(x)=ax^2+bx+c$ حل للمعادلة (E). أي لدينا $P'(x)=2ax+b$ و منه $p'(x)+3p(x)=3ax^2+(2a+3b)x+3c+b$ بالمطابقة مع الطرف الثاني لـ (E). نجد أن $\begin{cases}3a=3\\2a+3b=-4\\3c+b=4\end{cases}$ و منه $\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=2\end{cases}$ و منه $P(x)=x^2-2x+2$.

3) إثبات ان g حل للمعادلة (E') إذا وافقط إذا كانت الدالة f حيث $f(x)=g(x)+P(x)$ هي حل للمعادلة (E)

g حل للمعادلة (E') يعني ان $g'(x)+3g(x)=0$ و $p'(x)+3p(x)=3x^2-4x+4$ بالجمع و منه

$p'(x)+g'(x)+3p(x)+3g(x)=3x^2-4x+4$ و منه $f'(x)+3f(x)=3x^2-4x+4$

إذن f حل للمعادلة (E) ......(1)

f حل للمعادلة (E) يعني $f'(x)+3f(x)=3x^2-4x+4$ بالتعويض نجد أن

$[p(x)+g(x)]'+3[p(x)+3g(x)]=3x^2-4x+4$ و منه

$p'(x)+g'(x)+3p(x)+3g(x)=3x^2-4x+4$ و بما أن $p'(x)+3p(x)=3x^2-4x+4$ فإن

$g'(x)+3g(x)+3x^2-4x+4=3x^2-4x+4$ و منه $g'(x)+3g(x)=0$

أي ان g حل للمعادلة (E') ....(2)

من (1) و (2) نستنتج انها صحيحة .

4) تعين حلول المعادلة (E) هي f حيث $f(x)=g(x)+P(x)=Ce^{-3x}+x^2-2x+2$

الحل الخاص حيث $f(0)=\dfrac{9}{4}$ يعني ان $C+2=\dfrac{9}{4}$ و منه $C=\dfrac{1}{4}$ أي ان $f(x)=\dfrac{1}{4}e^{-3x}+x^2-2x+2$

التمرين الثاني :

n عدد طبيعي و a و b عددان طبيعيان حيث $a=n^3+5n^2+7n+24$ و $b=n+3$

1) البرهان أن $PGCD\,(a;b)=PGCD\,(b;\,21)$ لدينا $a=n^3+5n^2+7n+24$ و نقسمها إقليديا على b نجد $a=(n+3)(n^2+2n+1)+21$ و منه بما ان $PGCD\,(a;b)$ قاسم للعددين a و b فهو قاسم للعدد $a-b(n^2+2n+1)$ أي قاسم للعدد 21 و منه $PGCD\,(a;b)$ قاسم مشترك للعددين 21 و b و منه $PGCD\,(a;b)$ قاسم للعدد $PGCD\,(b;21)$ ......(1)

$PGCD\,(b;21)$ قاسم مشترك للعددين 21 و b فهو قاسم للعدد $b(n^2+2n+1)+21$ أي قاسم للعدد a و منه

$PGCD\,(b;21)$ قاسم مشترك للعددين a و b فهو قاسم للعدد $PGCD\,(a;b)$ أي ان $PGCD\,(b;21)$ قاسم

للعدد $PGCD\,(a;b)$ ....(2)

من (1) و (2) نجد أن $PGCD\,(a;b)=PGCD\,(b;\,21)$

2) استنتاج القيم الممكنة للعدد $PGCD\,(a;b)$ من ما سبق $PGCD\,(a;b)=PGCD\,(b;\,21)$ القيم الممكنة للعدد

$PGCD\,(a;b)$ هي قواسم الطبيعية 21 و هي $\{1;\,3;\,7;\,21\}$

3) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $PGCD\,(a;b)=7$ أي ان $PGCD\,(b;\,21)=7$ أي ان $n+3$ من

مضاعفات 7 و ليست من مضاعفات 21 أي ان $\begin{cases} n+3=3k+1 \\ \text{أو} \\ n+3=3k+2 \end{cases} : k\in\mathbb{N}^*$ و k عدد طبيعي غير معدوم و منه

$$\begin{cases} n=3k-2 \\ \text{أو} \\ n=3k-1 \end{cases} :\ k\in\mathbb{N}^*$$

4) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون الكسر $\dfrac{n^3+5n^2+7n+24}{n+3}$ غير قابل للاختزال أي ان العددان a و b أوليان

فيما بينهما $PGCD\,(a;b)=PGCD\,(b;\,21)=1$ أي ان العددان $n+3$ و 21 أوليان فيما بينهما إذن

$n+3=21\,k'+1\ \ : k'\in\mathbb{N}^*$ او $n+3=21\,k'+2\ \ : k'\in\mathbb{N}^*$ او $n+3=21\,k'+4\ \ : k'\in\mathbb{N}$ او

$n+3=21\,k'+5\ \ : k'\in\mathbb{N}$ او $n+3=21\,k'+8\ \ : k'\in\mathbb{N}$ أو $n+3=21\,k'+10\ \ : k'\in\mathbb{N}$ او

$n+3=21\,k'+11\ \ : k'\in\mathbb{N}$ او $n+3=21\,k'+13\ \ : k'\in\mathbb{N}$ او $n+3=21\,k'+17\ \ : k'\in\mathbb{N}$ او

$n+3=21\,k'+19\ \ : k'\in\mathbb{N}$ او $n+3=21\,k'+20\ \ : k'\in\mathbb{N}$ (الأعداد المُضافة أولية مع 21 في كل مرة)

و منه $n=21\,k'-2\ \ : k'\in\mathbb{N}^*$ او $n=21\,k'-1\ \ : k'\in\mathbb{N}^*$ او $n=21\,k'+1\ \ : k'\in\mathbb{N}$ او

$n=21\,k'+2\ \ : k'\in\mathbb{N}$ او $n=21\,k'+5\ \ : k'\in\mathbb{N}$ أو $n=21\,k'+7\ \ : k'\in\mathbb{N}$ او

$n=21\,k'+8\ \ : k'\in\mathbb{N}$ او $n=21\,k'+10\ \ : k'\in\mathbb{N}$ او $n=21\,k'+14\ \ : k'\in\mathbb{N}$ او

$n=21\,k'+16\ \ : k'\in\mathbb{N}$ او $n=21\,k'+17\ \ : k'\in\mathbb{N}$

التمرين الثالث :

نعتبر الدالة h المعرفة على $R-\{-2\}$ بـ $h(x)=ax+b+\dfrac{c}{2(x+2)}$ حيث $a\,;\,b\,;\,c$ أعداد حقيقية و (C_h) التمثيل

البياني لدالة h في المستوي المنسوب الى المعلم

المتعامد المتجانس

و جدول تغيراتها هو

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

1) النعيين باستعمال جدول التغيرات الدالة h الأعداد الحقيقية $a\ ;\ b\ ;\ c$. لدينا $\begin{cases} h(-1)=1 \\ h(-3)=-1 \end{cases}$ أي ان

$\begin{cases} -a+b+\dfrac{c}{2}=1 \\ -3a+b-\dfrac{c}{2}=-1 \end{cases}$ و منه بالجمع نجد $-4a+2b=0$ أي ان $b=2a......(1)$ بالتعويض في الجملة نجد

$c=-2a+2......(2)$

و لدينا $h'(-1)=0$ و $h'(x)=a-\dfrac{c}{2(x+2)^2}$ أي ان $a-\dfrac{c}{2}=0$ و منه $c=2a.......(3)$ من (2) و (3) نجد

$a=\dfrac{1}{2}$ بالتعويض في (1) و (3) نجد $c=1$ و $b=1$

2) نفرض أن $h(x)=\dfrac{1}{2}x+1+\dfrac{1}{2(x+2)}$

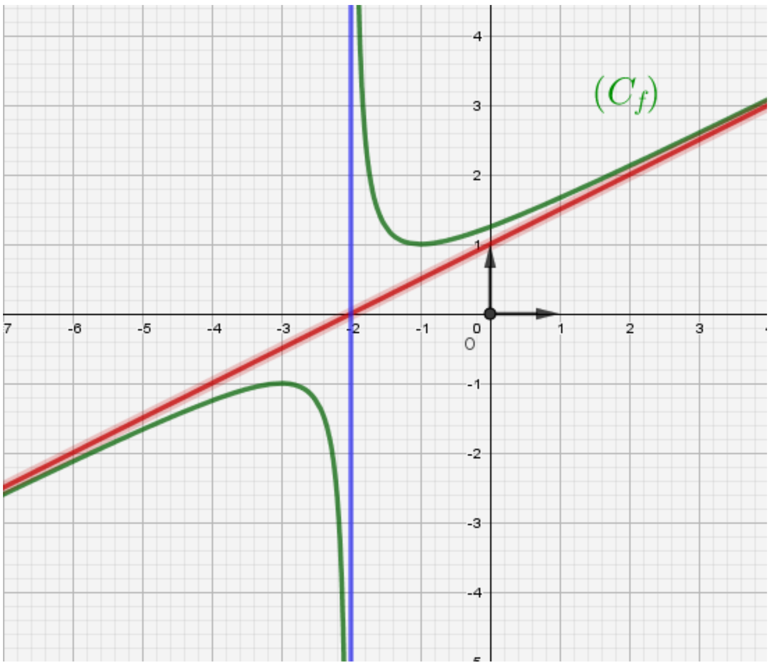
أ- تعيين معادلتي المستقيمان المقاربان للمنحنى (C_h) : $y=\dfrac{1}{2}x+1$ و $x=-2$

ب- حساب $h(-4-x)+h(x)$:

$h(-4-x)+h(x)=\dfrac{1}{2}(-4-x)+1+\dfrac{1}{2(-4-x+2)}+\dfrac{1}{2}x+1+\dfrac{1}{2(x+2)}$ أي ان

$h(-4-x)+h(x)=\dfrac{1}{2}(-4)+\dfrac{1}{2(-2-x)}+2+\dfrac{1}{2(x+2)}$ و منه $h(-4-x)+h(x)=0$

التفسير البياني : (C_h) يقبل مركز تناظر هو النقطة $A(-2;0)$



ج- أنشئ المستقيمان المقاربان و المنحنى (C_h)

3) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $h(x)=m(x+2)$ حلولها هي ايجاد فواصل نقط تقاطع (C_h) مع المستقيم (Δ_m) الذي معادلته $y=m(x+2)$

لما $m\in\left]-\infty\ ;\dfrac{1}{2}\right]$ نلاحظ ان (C_h) و (Δ_m) لا يتقاطعان ومنه المعادلة ليس لها حلول.

لما $m\in\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ نلاحظ ان (C_h) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتان ومنه للمعادلة حلين

4) نعتبر الدالة k حيث $k(x)=\ln\left(\frac{x^2+4x+5}{2x+4}\right)$

أ- تبين أن $k(x)=\ln(h(x))$ في مجال يطلب تعينه تكون الدالة k معرفة على المجال $]-2;+\infty[$ و الذي تكون فيه h موجبة .

ب- باستعمال جدول تغيرات h استنتاج اتجاه تغير الدالة k لدينا $k'(x)=\frac{h'(x)}{h(x)}$ و منه للدالتين k و h نفس اتجاه التغير على المجال $]-2;+\infty[$ و منه k متزايدة على المجال $[-1;+\infty[$ و متناقصة على المجال

ج-حساب نهايات الدالة k عند طرفي مجموعة تعريفها باستعمال نهاية دالة مركبة نجد أن بوضع $h(x)=t$

$\lim_{x\to+\infty} k(x)=\lim_{t\to+\infty}\ln(t)=+\infty$ و $\lim_{x\overset{>}{\to}-2} k(x)=\lim_{t\to+\infty}\ln(t)=+\infty$

تشكيل جدول تغيراتها

x	-2		-1		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5) $x\in]-2;+\infty[$: استنتاج حلول المتراجحة

$k(x)>\ln(2)$ و يكافئ ان

$\ln(h(x))>\ln(2)$ و

أي ان $h(x)>2$ معناه $\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2(x+2)}>2$ أي ان $\frac{1}{2}x-1+\frac{1}{2(x+2)}>0$ بتوحيد المقامات نجد

$\frac{x^2-3}{2(x+2)}>0$ بما ان $x\in]-2;+\infty[$ الكسر السابق اشارته من اشارة البسط أي ان $x^2-3>0$ و هي محققة من

أجل $x\in]-2;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};+\infty[$ و منه حلول المتراجحة هي $S=]-2;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};+\infty[$

التمرين الرابع (7 نقاط).

الجزء الأول : g دالة معرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية R بـ $g(x)=(2-x)e^x-2$

1) دراسة تغيرات الدالة g :

النهايات : $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(2-x)e^x=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}[(2-x)e^x-2]=-2$

المشتقة : $g'(x)=(1-x)e^x$ اشارتها من إشارة $(1-x)$ و هي موجبة على المجال $]-\infty;1]$ و سالبة على المجال $[1;+\infty[$ و منه g متزايدة على المجال $]-\infty;1]$ و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$

تشكيل جدول تغيراتها

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-2	$\nearrow$	$e-2$	$\searrow$	$-\infty$

2) تبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين إحداهما معدوم و الأخر α حيث $1{,}59<\alpha<1{,}60$ +

لدينا $g(0)=0$ و بما ان $g(1{,}6)=-0{,}02$ و $g(1{,}59)=0{,}01$ بما الدالة g مستمرة و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين إحداهما معدوم و الأخر α حيث $1{,}59<\alpha<1{,}60$.

استنتاج إشارة $g(x)$ من جدول تغيراتها نستنتج اشارتها

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
اشارة $g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الجزء الثاني :

f دالة عددية معرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية R كما يلي $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{e^x-1} : x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1) اثبات أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 : نحسب نهاية النسبة $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{e^h-1}=1=f'(0)$ و منه محققة .

كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي $y=x$.

2) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{e^x-1}=-\infty$ لان $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^x-1\right]=-1$.

3) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x فإن $f(x)=\dfrac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}}$: لدينا $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x-1}$ بضرب المقام و البسط في e^{-x} نجد $f(x)=\dfrac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}}$ و هو المطلوب

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}}=0$ لان $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1-e^{-x}\right]=1$

تفسير النتيجة هندسيا هو ان حامل محور الفواصل هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f)

4) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x فإن $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(e^x-1)^2}$: نحسب المشتقة

$f'(x)=\dfrac{2x(e^x-1)-x^2e^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{x[(2-x)e^x-2]}{(e^x-1)^2}=\dfrac{x\,g(x)}{(e^x-1)^2}$ و اشارتها من اشارة $x\,g(x)$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
اشارة $x\,g(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

و منه f متزايدة على المجال $]-\infty;\alpha]$ و متناقصة على المجال $[\alpha;+\infty[$

تشكيل جدول تغيراتها

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

5) ليكن (C) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto -x^2$

أ- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x^2\right]$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x^2\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2e^x}{e^x-1}=0$

و منه (C) و (C_f) متقاربان جهة $-\infty$

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (C) لدينا $\left[f(x)+x^2\right]=\frac{x^2e^x}{e^x-1}$ اشارته من إشارة المقام و ينعدم عند 0 و منه (C_f) يقع فوق (C) على المجال $]0;+\infty[$ و يتقاطعان في O و (C_f) يقع تحت (C) على المجال $]-\infty;0[$.

أرسم (T) و (C_f) و (C) :